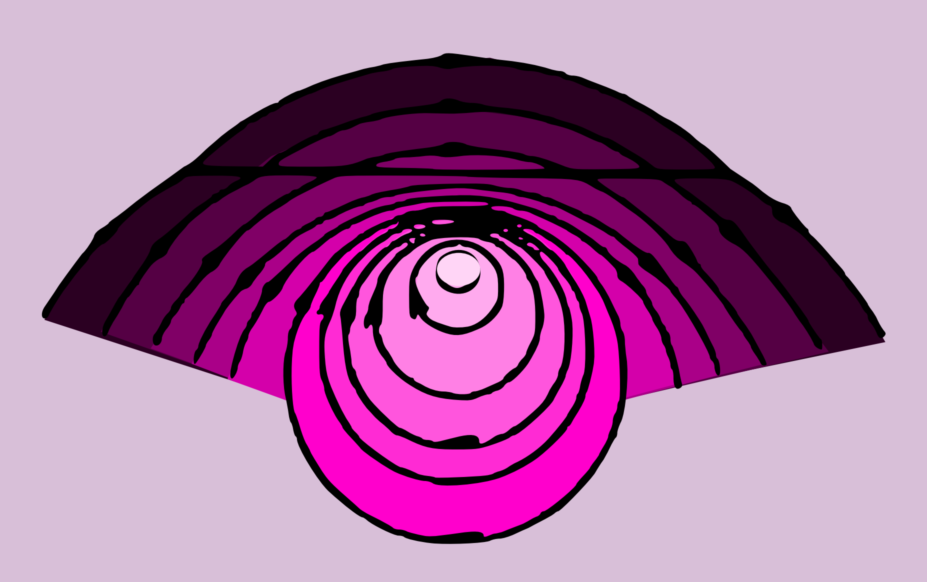
L. Bessonov

COURS D'ÉLECTRO-TECHNIQUE THÉORIQUE



Éditions «Ecole Superieure» Moscou

THÉORIE DES CIRCUITS
ÉLECTRIQUES LINÉAIRES

THÉORIE DES CIRCUITS
ÉLECTRIQUES NON LINÉAIRES

THÉORIE DU CHAMP
ÉLECTROMAGNÉTIQUE

L * A * B E S

COURS D'ELECTROTECHNIQUE

S O N O V

THEORIQUE

EDITIONS
« ECOLE SUPERIEURE »
MOSCOU
1 9 6 8

4И (Фр)
Б53

Traduit du russe par
I. A. Krivochéine

ЛЕВ АЛЕКСЕЕВИЧ БЕССОНОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
на французском языке

Редакторы *Г. П. Андреева, Э. К. Глухян*
Издательский редактор *В. М. Гагарина*
Художественный редактор *В. М. Поздняков*
Художник *Л. М. Чернышов*
Технический редактор *Л. М. Матюшина*
Корректоры *Г. Г. Коняхина, Л. Ф. Хлудова*

Сдано в набор 12/VI-67 г. Подп. к печати 9/I-68 г.
Формат 60×90[1]/16. Объем 44,75 печ. л. 47,57 уч.-изд. л.
Изд. № РПЛ=132. Тираж 7.600 экз. Заказ 1088. Цена 3 р. 60 к.
Тематический план издательства «Высшая школа» (вузы техникумы) на 1967 г. Позиция № 283
Москва К-51, Неглинная ул. д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9

Imprimé en U.R.S.S.

3—3—8
283—67

Ire PARTIE

CHAPITRE I
CIRCUITS ÉLECTRIQUES LINÉAIRES À COURANT CONTINU

§ 1. Définition des circuits électriques linéaires et non linéaires. L'ensemble des sources d'énergie électrique et des charges, reliées entre elles et pouvant être traversées par un courant électrique, est appelé circuit électrique.

Nous examinerons dans le présent chapitre les circuits électriques à courant continu. On appelle courant continu un courant invariable en fonction du temps. Le courant continu est un déplacement orienté et organisé de particules portant des charges électriques.

Ainsi qu'il a été expliqué dans le cours de physique, les porteurs de charges dans les métaux sont les électrons libres et ce sont les ions dans les liquides. Le mouvement organisé des porteurs de charges dans les conducteurs est dû au champ électrique, créé dans ces conducteurs par les sources d'énergie électrique. Les sources d'énergie électrique sont celles qui transforment l'énergie chimique, mécanique et les autres espèces d'énergie en énergie électrique. Une source d'énergie électrique est caractérisée par la valeur et le sens de la force électromotrice (F.E.M.) et par la valeur de sa résistance interne.

On désigne par convention un courant continu par la lettre I, la F.E.M. d'une source par la lettre E et une résistance par la lettre R. Dans le Système International d'unités (S.I.) * le courant est mesuré en ampères (A), la F.E.M. en volts (V) et la résistance en ohms (Ω).

La représentation du circuit électrique à l'aide de signes conventionnels sur un dessin est appelée schéma électrique (fig. 1, *a*).

La désignation conventionnelle (le symbole) de la résistance R dans un schéma électrique est un rectangle allongé. La désignation conventionnelle d'une source d'énergie électrique est un cercle, ayant une flèche à l'intérieur. Cette flèche indique le sens positif de la F.E.M. (les sources d'énergie seront décrites en détail au § 2).

On prend comme sens positif de la F.E.M. d'une source d'énergie le sens des potentiels croissants à l'intérieur de cette source.

* Suivant les premières lettres du Système International.

Le récepteur d'énergie et les conducteurs raccordant le récepteur à la source d'énergie sont appelés partie « extérieure » du circuit électrique ou plus simplement, circuit extérieur. Dans le circuit extérieur le courant circule du + de la source d'énergie vers son —, et à l'intérieur de la source il circule du — au +.

On appelle *caractéristique courant-tension* la loi suivant laquelle le courant circulant dans une résistance varie en fonction de la tension aux bornes de cette résistance. Les caractéristiques courant-tension peuvent être représentées sous forme de courbes. Dans ce cas on porte habituellement la tension en abscisses, à une certaine échelle et on porte le courant en ordonnées.

On distingue deux types de caractéristiques courant-tension essentiellement différents. Dans le premier la caractéristique courant-tension est une ligne droite (fig. 1, *b*) et dans le second, c'est une certaine courbe (fig. 1, *c*).

Les résistances, dont les caractéristiques courant-tension sont des lignes droites, sont appelées *résistances linéaires*, et les circuits électriques comprenant des résistances uniquement linéaires sont appelés par convention *circuits électriques linéaires*.

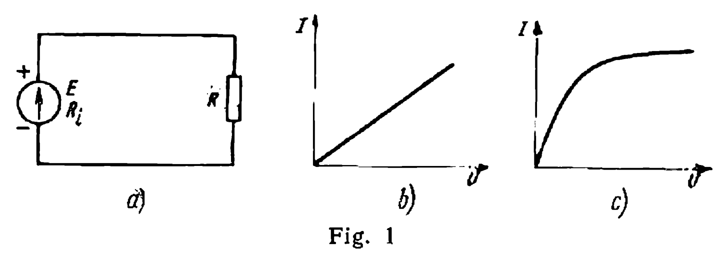


Fig. 1

Les résistances dont les caractéristiques courant-tension ne sont pas des lignes droites (c'est-à-dire ne sont pas linéaires), sont appelées *résistances non linéaires*, et les circuits électriques comprenant des résistances non linéaires sont appelés *circuits électriques non linéaires*.

§ 2. Source de F.E.M. et source de courant. Lors du calcul et de l'analyse des circuits électriques, la source d'énergie électrique est remplacée par son équivalent théorique. Cet équivalent peut être:

1. Soit une source de F.E.M. et une résistance R_i couplée en série avec cette source et égale à la résistance interne de la source d'énergie réelle (fig. 2, *a*).

2. Soit une source de courant avec une résistance R_i couplée en parallèle à cette source et égale à la résistance interne de la source d'énergie réelle (fig. 2, *b*).

Nous allons appeler *source de F.E.M.* une source idéalisée d'alimentation, dont la F.E.M. est constante, ne dépend pas de la valeur du courant qui y circule et est égale à la F.E.M. de la source réelle d'énergie. La résistance interne de cette source d'alimentation est nulle.

La source de F.E.M. est représentée sur les schémas par un cercle ayant une flèche à l'intérieur et la lettre E écrite à côté. La flèche indique

le sens positif de la F.E.M. (sens d'élévation du potentiel à l'intérieur de la source).

On entend par *source de courant* une source idéalisée d'alimentation, qui débite un courant I_k indépendant de la valeur de la charge R du circuit et égal au quotient de la F.E.M. de la source réelle par la résistance interne R_i de cette source $\left(I_k = \frac{E}{R_i}\right)$.

Pour que la source de courant puisse débiter un courant I_k indépendant de la valeur de la résistance de la charge, la résistance interne de cette source et sa F.E.M. doivent tendre théoriquement vers l'infini.

Par définition, une source de courant débite un courant I_k, indépendant de la valeur de la résistance de charge R. En d'autres termes, la résistance R du schéma de la fig. 2, *b* peut être égale à zéro (court-circuit) ou à l'infini (marche à vide), le courant I_k restant constant. Examinons dans quelles conditions ceci est possible. Pour cela désignons par R_{sc} la résistance interne de la source de

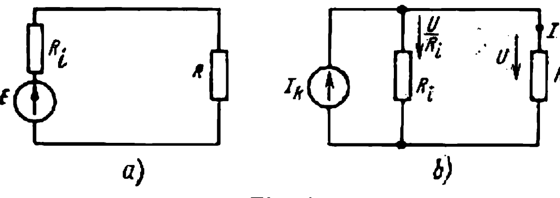


Fig. 2

courant et par E_{sc} sa F.E.M. et écrivons les deux équations, définissant le fonctionnement du circuit de la fig. 2, *b* pour les deux régimes limites de fonctionnement, mentionnés ci-dessus:

Pour $R = 0$

$$I_k R_{sc} = E_{sc}. \quad \text{(a)}$$

Pour $R = \infty$

$$I_k (R_{sc} + R_i) = E_{sc} \text{ ou } I_k R_{sc} \left(1 + \frac{R_i}{R_{sc}}\right) = E_{sc}. \quad \text{(b)}$$

Les équations (a) et (b) ne peuvent être compatibles que lorsque $\frac{R_{sc}}{R_i} \to \infty$.

En d'autres termes, la résistance de la source de courant R_{sc} tend théoriquement vers l'infini (R_i étant une valeur finie). Mais si R_{sc} tend vers l'infini, I_k étant une grandeur finie, $E_{sc} = I_k R_{sc}$ doit théoriquement également tendre vers l'infini (le rapport des deux grandeurs infiniment grandes E_{sc} et R_{sc} est égal à une grandeur finie, à savoir au courant I_k).

Comme nous l'avons déjà dit, une source de F.E.M. ainsi qu'une source de courant sont des sources idéalisées. Il est impossible de les obtenir en réalité, puisque la résistance interne des sources réelles ne peut pas être nulle, ni être égale à l'infini pour un courant de valeur finie.

Cependant, lorsque la résistance interne R_i d'une source réelle d'alimentation est faible par rapport à la résistance R du circuit extérieur (par exemple, lorsqu'à tous les régimes possibles de fonctionnement la résistance de la charge R est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à R_i), la source d'alimentation fonctionne en un régime suffisamment proche de celui qui caractérise une source de F.E.M. De même, si la résistance interne R_i d'une source réelle d'alimentation à tous les régimes possibles du fonctionnement du circuit, est nettement plus grande que la résistance du circuit extérieur R (de plusieurs ordres de grandeur, par exemple), la source d'alimentation fonctionne en un régime suffisamment proche de celui

qui caractérise une source de courant (lorsque la résistance R ne varie qu'entre des valeurs suffisamment rapprochées, il n'y a pas lieu d'exiger que R_{sc} ainsi que E_{sc} tendent vers l'infini).

Il y a lieu de remarquer que le schéma de la fig. 2, *b* est équivalent au schéma de la fig. 2, *a* seulement en ce qui concerne l'énergie dégagée dans la résistance R de la charge, mais ne lui est pas équivalent en ce qui concerne l'énergie dégagée dans la résistance interne de la source de courant.

Sur un schéma la source de courant est représentée par un cercle, ayant une flèche à l'intérieur, à côté duquel on écrit la lettre I avec un indice approprié (par exemple, k). La flèche indique le sens positif du courant I_k.

Le courant circulant dans la charge (dans la résistance R) est le même dans les deux schémas équivalents (dans le schéma de la fig. 2, *a* et dans celui de la fig. 2, *b*) ; il est égal au courant circulant dans le schéma 1, *a*

$$I=\frac{E}{R+R_i}.$$

Pour le schéma de la fig. 2, *a*, c'est tellement évident qu'il est nullement besoin de s'y arrêter.

Examinons le cas du schéma de la fig. 2, *b*. Le courant I_k de la source de courant dans ce schéma est réparti entre les deux branches en parallèle en raison inverse des résistances R et R_i de ces deux branches. Dans la charge R le courant I est

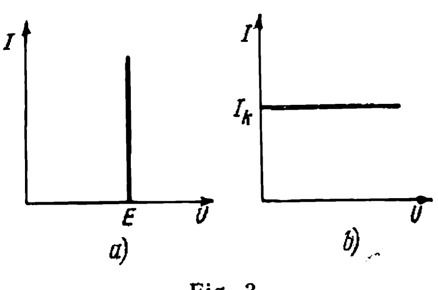


Fig. 3

$$I=I_k\frac{R_i}{R+R_i}=\frac{E}{R_i}\frac{R_i}{R+R_i}=\frac{E}{R+R_i}.$$

Ainsi, on peut utiliser pour les calculs indifféremment l'un des deux schémas équivalents mentionnés. Par la suite nous allons utiliser dans l'essentiel « le schéma équivalent numéro 1 », autrement dit, nous allons remplacer la source réelle d'énergie électrique par une source de F.E.M. avec résistance R_i branchée en série avec cette source.

Signalons en conclusion que les propriétés d'une source F.E.M. et d'une source de courant peuvent être caractérisées d'une manière suffisamment évidente par les courbes représentées sur les fig. 3, *a* et *b*. Sur ces courbes le courant I, circulant dans une source idéalisée d'énergie est représenté en fonction de la tension U aux bornes de cette source (la fig. 3, *a* correspond à la fonction $I = f(U)$ pour une source de F.E.M. et la fig. 3, *b* correspond à la même fonction pour une source de courant).

Exemple 1a. La source de courant, représentée sur le schéma de la fig. 2, *b*, débite un courant $I_k = 50\ A$. La résistance R_i, shuntant cette source, est égale à 2Ω. Trouver la valeur de la F.E.M. d'une source équivalente de F.E.M. conformément au schéma de la fig. 2, *a*.

Solution. La F.E.M. $E = I_kR_i = 100\ V$.

Ainsi les paramètres du schéma équivalent, représenté sur la fig. 2, *a* sont : $E = 100\ V$ et $R_i = 2\Omega$.

§ 3. Circuits électriques ramifiés et non ramifiés. Les circuits électriques peuvent être répartis en circuits ramifiés et non ramifiés. Le schéma de la fig. 1, *a* représente le circuit non ramifié le plus simple, dont tous les éléments sont parcourus par le même courant. Le circuit ramifié le plus simple est représenté sur la fig. 4, *a*; il comporte trois branches et deux nœuds. Chaque branche est parcourue par le courant qui lui est propre. Une branche peut être définie comme un tronçon du circuit, constitué par des éléments couplés en série et intercalé entre deux nœuds. A son tour, chaque nœud est un point de circuit, auquel aboutissent trois branches au moins. Si l'intersection de deux lignes est représentée sur un schéma électrique par un point « gras » (fig. 4, *b*) les deux lignes sont reliées électriquement en ce point; dans le cas contraire (fig. 4, *c*) les lignes se coupent sans être reliées électriquement entre elles.

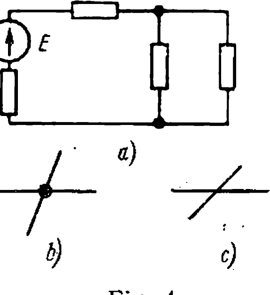


Fig. 4

§ 4. Tension aux bornes d'un tronçon de circuit. On appelle tension aux bornes d'un certain tronçon d'un circuit électrique la différence de potentiel entre les points extrêmes de ce tronçon.

La fig. 5 représente un tronçon de circuit comprenant une résistance R, mais où il n'existe pas de F.E.M. Les points extrêmes de ce tronçon sont désignés par les lettres a et b. Supposons que le courant I circule du point a vers le point b.

Dans un tronçon de circuit, ne comportant pas de F.E.M., le courant circule des potentiels élevés aux potentiels bas. Par conséquent, le potentiel du point a (φ_a) est plus élevé que le potentiel du point b (φ_b), d'une valeur égale au produit du courant I par la résistance R:

$$\varphi_a = \varphi_b + IR.$$

Conformément à la définition de la tension entre les points a et b

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

Par conséquent, $U_{ab} = IR$. En d'autres termes, la tension aux bornes d'une résistance est égale au produit du courant circulant dans cette résistance par la valeur de cette dernière.

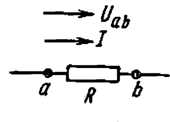


Fig. 5

En électrotechnique la différence de potentiel aux bornes d'une résistance est habituellement appelée soit « tension aux bornes d'une résistance », soit « chute de tension ». Par la suite nous appellerons chute de tension la différence de potentiel aux bornes d'une résistance, c'est-à-dire le produit IR. Le sens positif de la chute de tension coïncide avec le sens positif du courant circulant dans la résistance considérée.

Examinons maintenant quelle est la tension aux bornes d'un tronçon de circuit, comprenant non seulement une résistance mais également une F.E.M.

Les fig. 6, *a* et *b* représentent des tronçons de certains circuits, parcourus par le courant I. Cherchons la différence de potentiel (la tension) entre les points *a* et *c* de ces tronçons.

Par définition

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c. \tag{1.1}$$

Exprimons le potentiel du point *a* en fonction du potentiel du point *c*. En se déplaçant du point *c* vers le point *b* (fig. 6, *a*) nous allons à l'encontre de la F.E.M. E et, par conséquent, le potentiel au point *b* est inférieur au potentiel du point *c* de la valeur E de la F.E.M ; autrement dit

$$\varphi_b = \varphi_c - E.$$

Pour la fig. 6, *b* lorsqu'on la parcourt du point *c* vers le point *b*, on se déplace dans le sens de la F.E.M. E et, par conséquent, le potentiel du point *b* est plus élevé (plus grand), que le potentiel du point *c* de la valeur E de la F.E.M., c'est-à-dire

$$\varphi_b = \varphi_c + E.$$

Nous avons déjà signalé que dans un tronçon de circuit ne comprenant pas de F.E.M., le courant va des potentiels élevés aux potentiels bas.

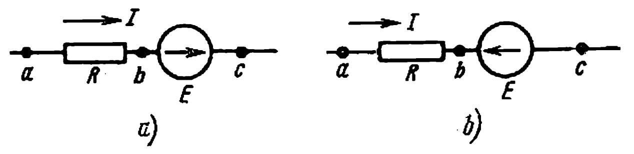


Fig. 6

Par conséquent, pour les deux schémas de la fig. 6, le potentiel du point *a* est supérieur au potentiel du point *b* de la valeur de la chute de tension dans la résistance R :

$$\varphi_a = \varphi_b + IR.$$

Ainsi, nous obtenons pour la fig. 6, *a*

$$\varphi_a = \varphi_c - E + IR, \quad \text{ou} \quad U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = IR - E, \tag{1.2a}$$

et pour la fig. 6, *b*

$$\varphi_a = \varphi_c + E + IR, \quad \text{ou} \quad U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = IR + E. \tag{1.2b}$$

Sur les schémas le sens positif de la tension est indiqué par une flèche. Cette flèche doit être dirigée de la première lettre de l'indice vers la seconde. Ainsi, le sens positif de la tension U_{ac} est représenté par une flèche dirigée de *a* vers *c*.

Il résulte également de la définition même de la tension que $U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a$. Par conséquent, $U_{ca} = -U_{ac}$. En d'autres termes, l'inversion en question des indices équivaut à un changement du signe de la tension. Il découle nettement de notre exposé que la tension peut être une grandeur positive comme une grandeur négative.

§ 5a. Loi d'Ohm pour un tronçon de circuit ne comprenant pas de F.E.M. La loi d'Ohm donne la relation entre le courant et la tension dans un certain tronçon de circuit. Ainsi pour le tronçon de circuit, représenté sur la fig. 5, on peut écrire

$$U_{ab} = IR$$

ou

$$I = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R}. \tag{1.3}$$

§ 5b. Loi d'Ohm pour un tronçon de circuit comprenant une F.E.M. La loi d'Ohm pour un tronçon de circuit comprenant une F.E.M. permet de calculer le courant dans ce circuit en partant de la différence de potentiel ($\varphi_a - \varphi_c$) aux bornes de ce tronçon et de la valeur E de la F.E.M. existant dans ce dernier. Ainsi, en partant de l'expression (1.2a) établie pour le schéma de la fig. 6, *a*, on a

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_c + E}{R} = \frac{U_{ac} + E}{R}.$$

De même, on déduit de (1.2b) pour le schéma de la fig. 6, *b*

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_c - E}{R} = \frac{U_{ac} - E}{R}.$$

Et dans le cas général

$$I = \frac{U_{ac} \pm E}{R} = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) \pm E}{R}. \tag{1.4}$$

L'équation (1.4) exprime sous la forme mathématique la loi d'Ohm pour un tronçon de circuit comprenant une F.E.M.; le signe + placé devant E correspond à la fig. 6, *a* et le signe — à la fig. 6, *b*.

Dans le cas particulier, où $E = 0$, l'expression (1.4) se réduit à (1.3).

Exemple 1b. On branche aux bornes *a* et *c* du schéma de la fig. 7 un voltmètre à résistance très grande, théoriquement infinie (par conséquent, le branchement de ce voltmètre n'exerce pas d'influence sur le régime de fonctionnement du circuit).

Si un courant $I = 10$ *A* circule de *a* vers *c*, le voltmètre indique $U_{ac} = -18$ *V*.

Si le courant $I = 10$ *A* circule de *c* vers *a*, le voltmètre indique $U_{ac} = -20$ *V*.

Calculer la valeur de la résistance R et la valeur E de la F.E.M.

Solution. Dans le premier cas

$$U_{ac}^{I} = -18 = -E + IR = -E + 10R.$$

Dans le deuxième cas

$$U_{ac}^{II} = -20 = -E - IR = -E - 10R.$$

Résolvant ce système de deux équations, nous trouvons: $E = 19$ *V* et $R = 0{,}1\Omega$.

§ 6. Lois de Kirchhoff. Tous les circuits électriques obéissent à la première et à la deuxième lois de Kirchhoff.

La première loi de Kirchhoff peut être formulée de deux manières. Premier énoncé: la somme algébrique des courants arrivant à un nœud quelconque ou partant de ce dernier d'un circuit est nulle. Deuxième énoncé: la somme des courants arrivant à un nœud quelconque d'un circuit est égale à la somme des courants partant de ce nœud.

Ainsi, en ce qui concerne la fig. 8, considérant comme positifs les courants arrivant au nœud de ce circuit et comme négatifs les courants qui en partent, on peut écrire conformément au premier énoncé

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0;$$

et conformément au deuxième

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4.$$

Au point de vue physique, la première loi de Kirchhoff signifie que le déplacement des charges dans un circuit est tel qu'elles ne peuvent s'accumuler en aucun de ces nœuds.

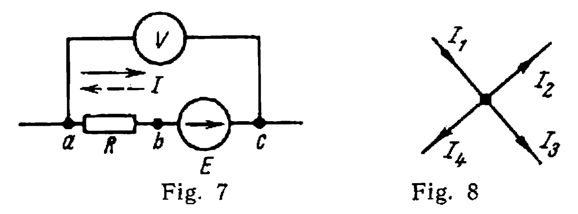


Fig. 7 Fig. 8

La deuxième loi de Kirchhoff peut être également énoncée de deux manières différentes.

Premier énoncé: la somme algébrique des chutes de tension dans une maille fermée quelconque est égale à la somme algébrique des F.E.M. le long de cette maille. Elle s'écrit de la manière suivante:

$$\sum IR = \sum E.$$

Dans chacune de ces sommes les termes figurent avec le signe + si leurs sens coïncident avec celui de parcours de la maille, et avec le signe — si leurs sens ne coïncident pas avec le sens de ce parcours.

Deuxième énoncé: la somme algébrique des tensions (mais non de chutes de tensions!) le long d'une maille fermée quelconque est nulle

$$\sum U_k = 0.$$

Ainsi pour la maille périphérique du schéma de la fig. 9

$$U_{ae} + U_{ec} + U_{cd} + U_{da} = 0.$$

§ 7. Utilisation des équations de Kirchhoff pour le calcul des courants dans les divers circuits. Les lois de Kirchhoff servent à trouver les courants dans les branches d'un circuit. Chaque branche du circuit étant parcourue par un courant qui lui est propre, le nombre total des courants inconnus est égal à celui des branches du circuit. Avant d'établir les équations, il faut:

a) choisir arbitrairement les sens positifs des courants dans toutes les branches et les indiquer sur le schéma;

b) choisir les sens positifs du parcours des circuits pour établir les équations conformément à la deuxième loi de Kirchhoff.

Pour éviter la diversité, il est recommandé de choisir les sens positifs identiques pour tous les circuits, par exemple celui des aiguilles d'une montre.

Désignons le nombre des branches du schéma considéré par b et le nombre de nœuds par n. Afin d'obtenir des expressions linéairement indépendantes, on établit, conformément à la première loi de Kirchhoff, un nombre d'équations égal au nombre des nœuds moins un, c'est-à-dire $n - 1$. Le nombre des équations établies suivant la deuxième loi de Kirchhoff doit être égal au nombre des branches moins le nombre d'équations établies suivant la première loi de Kirchhoff, c'est-à-dire:

$$b-(n-1).$$

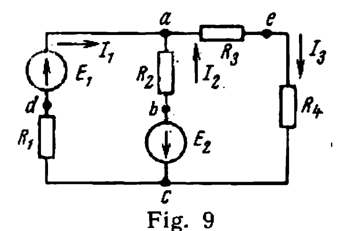


Fig. 9

Lorsqu'on établit les équations suivant la deuxième loi de Kirchhoff, il faut veiller à y faire figurer toutes les branches du schéma. En général, établissant des équations linéairement indépendantes suivant la deuxième loi de Kirchhoff, il faut le faire de manière que chaque nouvelle maille, décrite par l'équation en question, comprenne au moins une nouvelle branche, non utilisée dans les mailles précédentes, pour lesquelles ces équations ont déjà été établies. Ces mailles seront appelées par la suite mailles indépendantes.

Il y a lieu de signaler que l'obligation de faire figurer dans chaque nouvelle maille une nouvelle branche au moins est par trop rigoureuse dans un certain nombre de cas (c'est une condition suffisante, mais non pas nécessaire) et pour certains circuits complexes à grand nombre de mailles elle ne peut être réalisée.

Dans ces cas, on est obligé d'établir une partie des équations, suivant la deuxième loi de Kirchhoff, pour des mailles dont toutes les branches figurent déjà parmi les mailles utilisées précédemment.

Exemple 2. Calculer les courants dans les branches du schéma de la fig. 9 pour lequel $E_1 = 80\ V$ et $E_2 = 64\ V$, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 1\Omega$.

Solution. Choisissons arbitrairement et portons sur le schéma (fig. 9) les sens positifs des courants dans toutes les branches. Ce circuit comprend deux nœuds. Par conséquent, suivant la première loi de Kirchhoff on ne peut établir qu'une seule équation

$$I_1 + I_2 = I_3. \qquad \text{(a)}$$

Il est facile de voir que pour le second nœud l'équation est identique. Il faut maintenant établir suivant la deuxième loi de Kirchhoff $b - (n - 1) = 3 - (2 - 1) = 2$ équations. Les sens positifs de parcours des mailles sont ceux des aiguilles d'une montre.

Pour la maille $R_1E_1R_2E_2$ on a:

$$I_1R_1 - I_2R_2 = E_1 + E_2. \qquad \text{(b)}$$

Le signe + a été pris devant I_1R_1 parce que le sens du courant I_1 coïncide avec celui du parcours de la maille. Et I_2R_2 a été affecté du signe — parce que le sens du courant I_2 est contraire à celui du parcours de la maille.

Pour la maille $E_2R_2R_3R_4$ on a:

$$I_2R_2 + I_3(R_3 + R_4) = -E_2. \qquad \text{(c)}$$

En résolvant en commun les équations (a), (b), (c), on obtient $I_1 = 14\ A$, $I_2 = -15\ A$, $I_3 = -1\ A$. Du fait que les sens positifs des courants ont été choisis arbitrairement, un ou plusieurs des courants calculés peuvent être négatifs. Ainsi, dans l'exemple examiné, les courants I_2 et I_3 sont négatifs. Les signes — placés devant ces courants doivent être interprétés comme suit: les sens des courants I_2 et I_3 ne coïncident pas avec les sens qu'on leur a attribués sur la fig. 9, c'est-à-dire qu'en réalité les courants I_2 et I_3 circulent en sens inverse.

§ 8. De la mise à la terre d'un des points du circuit. Lorsqu'on met à la terre un point quelconque du circuit, la répartition des courants dans ce circuit ne change pas; en effet la mise à la terre ne fait apparaître aucune branche nouvelle dans laquelle pourraient circuler les courants. Il en va tout autrement si on met à la terre deux des points du circuit, portés à des potentiels différents, ou davantage. Il se forme alors des branches nouvelles passant par la terre (ou un autre milieu conducteur quelconque), le circuit lui-même devient différent du circuit initial et la répartition des courants dans ce nouveau circuit se trouve modifiée.

§ 9. Diagramme des potentiels. On appelle diagramme des potentiels celui de répartition des potentiels le long d'un tronçon quelconque d'un circuit ou le long d'une maille fermée. On porte en abscisses de ce diagramme les résistances le long du circuit, en commençant par un point arbitraire quelconque, et les potentiels sont portés en ordonnées. A chaque point d'un tronçon du circuit ou d'une maille fermée correspond ainsi un point déterminé du diagramme des potentiels.

Examinons le mode de construction d'un diagramme des potentiels en partant des données de l'exemple 2.

E x e m p l e 3. Construire le diagramme des potentiels pour la maille *abcea* (fig. 9).

S o l u t i o n. Calculons la résistance globale de la maille. Elle est égale à: $4 + 3 + 1 = 8\Omega$. Choisissons l'échelle en abscisses (axe x) et celui en ordonnées (axe y).

Prenons arbitrairement comme nul le potentiel d'un des points, par exemple du point a. Plaçons ce point à l'origine des coordonnées sur le diagramme de la fig. 10.

Le potentiel du point b est $\varphi_b = \varphi_a + I_2 \cdot 4 = \varphi_a - 60 = -60\ V$. Ces coordonnées sont $x = 4$; $y = -60$.

Potentiel du point c: $\varphi_c = \varphi_b + E_2 = 4$ V. Coordonnées du point c: $x = 4$, $y = 4$.

Point e: $\varphi_e = \varphi_c + I_3R_4 = 4 - 1 \cdot 1 = 3V$. Coordonnées du point e: $x = 5$, $y = 3$.

La tangente de l'angle α_1 entre la droite ab et l'axe des abscisses est proportionnelle au courant I_2, tandis que la tangente de l'angle α_2 (la pente de la droite ce) est proportionnelle au courant I_3.

§ 10. Bilan énergétique des circuits électriques. Les résistances dégagent de la chaleur lorsqu'elles sont parcourues par des courants. Suivant la loi de la conservation d'énergie, la quantité de chaleur dégagée par unité de temps dans les résistances d'un circuit doit être égale à l'énergie fournie pendant le même laps de temps par la source d'alimentation.

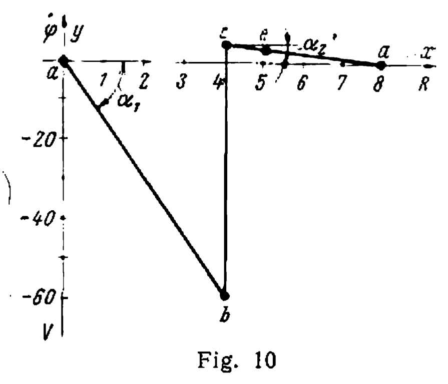


Fig. 10

Lorsque la source de F.E.M. E est parcourue par un courant I, circulant dans le sens qui correspond à celui de la F.E.M., cette source fournit au circuit par unité de temps une énergie (ou une puissance *), égale à EI (le produit EI figure dans l'équation du bilan énergétique avec le signe +). Si le courant I est dirigé à l'encontre de la F.E.M. E, cette source ne fournit pas d'énergie électrique mais au contraire en consomme (un accumulateur se charge, par exemple) et le produit EI figure dans l'équation du bilan énergétique avec le signe —. L'équation du bilan énergétique, lorsque l'alimentation est faite uniquement par des sources de F.E.M. s'écrit comme suit:

$$\sum I^2R = \sum EI.$$

Si le circuit est alimenté non seulement par des sources de F.E.M., mais également par des sources de courant, autrement dit, lorsque des courants provenant des sources de courant arrivent à certains nœuds du circuit ou en partent, il faut, en dressant le bilan énergétique, tenir également compte de l'énergie fournie par les sources de courant. Supposons que le courant I_k provenant d'une source de courant arrive au nœud a du circuit et que ce courant s'écoule à partir du nœud b. La puissance fournie par la source du courant est égale à $U_{ab}I_k$. La tension U_{ab} et les courants circulant dans les branches du circuit doivent être calculés en tenant compte du courant provenant de la source du courant. Ceci peut être fait le plus simplement d'après la méthode des potentiels des nœuds (§ 20). Sous sa forme générale l'équation du bilan énergétique peut être écrite comme suit:

$$\sum I^2R = \sum EI + \sum U_{ab}I_k.$$

* La puissance est égale à l'énergie dépensée par unité de temps.

Dans la pratique pour permettre de calculer les circuits électriques avec une dépense moindre de temps et de travail qu'à l'aide des lois de Kirchhoff, on a mis au point un certain nombre de méthodes, que nous allons examiner ci-après.

§ 11. Méthode des grandeurs proportionnelles. Utilisée seule, cette méthode ne peut être appliquée qu'au calcul des circuits comprenant uniquement des résistances couplées en série et en parallèle et lorsqu'il n'existe dans le circuit qu'une seule source. Cependant cette méthode peut être combinée avec d'autres modes de calcul (transformation d'un triangle en étoile, méthode de superposition, etc.) qui seront examinées par la suite; ceci élargit nettement les possibilités d'emploi de cette méthode. Suivant la méthode des grandeurs proportionnelles on choisit dans le circuit la branche la plus éloignée de la source de F.E.M. (branche initiale) et on suppose que le courant y ait une certaine intensité, 1 A par exemple. Ensuite, on parcourt le circuit de sa fin vers son origine et on calcule les courants dans les branches parcourues et les tensions aux bornes de divers tronçons du circuit. A la fin du calcul on obtient ainsi la valeur de la tension au commencement du circuit et les courants dans toutes ses branches dans l'hypothèse que le courant dans la branche initiale du circuit était de 1 A.

La valeur ainsi trouvée de la tension au commencement du circuit n'étant pas égale en général à la F.E.M. de la source, on trouve les valeurs exactes des courants dans toutes les branches en les multipliant par un facteur égal au rapport de la F.E.M. de la source à la valeur trouvée pour la tension au commencement du circuit.

Exemple 4. Trouver les courants circulant dans les branches du circuit de la fig. 11, en utilisant la méthode des grandeurs proportionnelles. Les résistances écrites sur ce schéma sont exprimées en ohms.

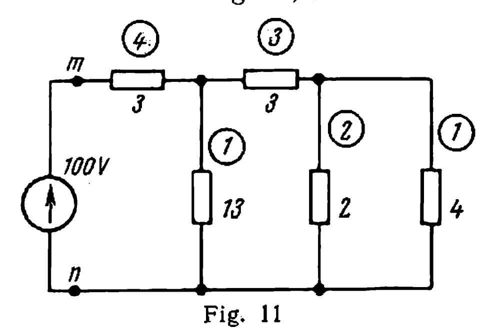


Fig. 11

Solution. Supposons que le courant circulant dans la résistance de 4Ω est égal à 1 A et calculons les courants dans toutes les autres branches. Les valeurs de ces courants sont écrites dans des cercles sur le schéma. La tension entre les points m et n est $1\cdot 4+3\cdot 3+4\cdot 3=25\,V$. Comme la F.E.M. alimentant le circuit est égale à 100 V, il faut multiplier tous les courants par le facteur $k=\frac{100}{25}=4$.

§ 12. Méthode des courants fictifs maillés. Dans la méthode des courants fictifs maillés on suppose que chaque maille indépendante * du circuit soit parcourue par un courant fictif maillé qui lui est propre. Les équations sont établies pour les courants fictifs maillés. Après les

* Pour les circuits compliqués, il faut également tenir compte des deux derniers alinéas du § 7.

avoir calculés, on détermine les courants dans les branches à partir des courants fictifs maillés trouvés.

Ainsi, la méthode des courants fictifs maillés peut être considérée comme une méthode de calcul dans laquelle on prend ces courants comme valeurs inconnues. Dans cette méthode le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations qu'il aurait fallu établir pour le circuit considéré conformément à la deuxième loi de Kirchhoff.

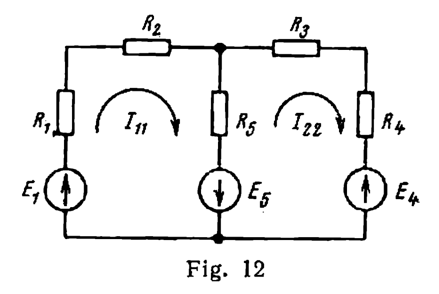


Fig. 12

Etablissons les équations pour le schéma de la fig. 12. Le circuit représenté comprend deux mailles indépendantes. Supposons que dans la maille de gauche le courant I_{11} circule dans le sens des aiguilles d'une montre, tandis que dans la maille de droite circule (dans le même sens) le courant I_{22}. Etablissons pour chacune de ces mailles une équation suivant la deuxième loi de Kirchhoff. N'oublions pas que dans la branche commune (branche à résistance R_5) le courant circule de haut en bas $(I_{11} - I_{22})$. Parcourons les deux mailles également dans le sens des aiguilles d'une montre.

Nous obtenons ainsi pour la première maille

$$I_{11}(R_1+R_2)+(I_{11}-I_{22})R_5=E_1+E_5,$$

ou

$$I_{11}(R_1+R_2+R_5)+(-R_5)I_{22}=E_1+E_5$$

et pour la deuxième maille

$$-(I_{11}-I_{22})R_5+I_{22}(R_3+R_4)=-E_5-E_4,$$

ou

$$(-R_5)I_{11}+I_{22}(R_3+R_4+R_5)=-E_4-E_5.$$

Dans la première équation, le facteur du courant I_{11} est la somme des résistances de la première maille, que nous désignons par R_{11}; le facteur du courant I_{22} dans la première équation également est la résistance de la branche commune, prise avec le signe —; désignons-la par R_{12}.

Récrivons ces équations sous forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} I_{11}R_{11}+I_{22}R_{12}=E_{11} \\ I_{11}R_{21}+I_{22}R_{22}=E_{22} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4')$$

où

$$R_{11}=R_1+R_2+R_5, \qquad E_{11}=E_1+E_5,$$
$$R_{22}=R_3+R_4+R_5, \qquad E_{22}=-E_4-E_5,$$
$$R_{12}=R_{21}=-R_5.$$

Dans la première de ces équations (1.4') le facteur du courant I_{11} de la première maille, R_{11}, est la résistance propre ou totale de cette

maille, tandis que le facteur du courant I_{22} est la résistance de la branche commune à la première et à la deuxième maille prise avec le signe — *.

E_{11} est la F.E.M. résultante de la première maille; elle est égale à la somme algébrique des F.E.M. de cette maille. Les F.E.M. dont le sens coïncide avec celui du parcours de cette maille y figurent avec le signe +.

R_{22} est la résistance totale ou propre de la deuxième maille.

R_{21} est la résistance de la branche commune à la première et à la deuxième mailles, prise avec le signe —.

E_{22} est la F.E.M. résultante de la deuxième maille.

Si le circuit comprenait plus de deux mailles, trois par exemple, le système d'équations prendrait la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} I_{11}R_{11}+I_{22}R_{12}+I_{33}R_{13}=E_{11} \\ I_{11}R_{21}+I_{22}R_{22}+I_{33}R_{23}=E_{22} \\ I_{11}R_{31}+I_{22}R_{32}+I_{33}R_{33}=E_{33} \end{aligned}\right\}. \qquad (1.4'')$$

Il est recommandé pour que les signes des résistances à indices différents soient uniformes d'orienter tous les courants fictifs maillés dans le même sens, dans celui des aiguilles d'une montre, par exemple.

S'il résulte de la solution de ce système d'équations que le courant fictif maillé quelconque s'avère être négatif, cela veut dire qu'en réalité le sens de ce courant est inverse à celui qu'on a considéré comme positif.

Dans les branches qui ne sont pas communes à deux mailles voisines (comme, par exemple, dans les branches à résistances R_1, R_2 du schéma de la fig. 12), le courant fictif maillé calculé est le courant réel qui y circule. Pour les branches communes il faut trouver les courants réels à partir des courants fictifs maillés. Ainsi, par exemple, dans la branche à résistance R_5 le courant circulant du haut en bas est égal à la différence des courants $I_{11} - I_{22}$.

Si un circuit électrique comprend n mailles indépendantes, le nombre d'équations sera égal à n.

La solution générale du système à n équations par rapport au courant I_{kk} est

$$I_{kk}=E_{11}\frac{\Delta k1}{\Delta}+E_{22}\frac{\Delta k2}{\Delta}+E_{33}\frac{\Delta k3}{\Delta}+\ldots+E_{nn}\frac{\Delta kn}{\Delta}. \qquad (1.5)$$

Où Δ — déterminant du système

$$\begin{vmatrix} R_{11}R_{12}R_{13} & \ldots & R_{1n} \\ R_{21}R_{22}R_{23} & \ldots & R_{2n} \\ R_{31}R_{32}R_{33} & \ldots & R_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n1}R_{n2}R_{n3} & \ldots & R_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.6)$$

* On peut dire en général que la résistance de la branche commune (R_{km}) des mailles k et m figure dans l'équation avec le signe —, si les sens des courants fictifs maillés I_{kk} et I_{mm} le long de cette branche sont opposés, et avec le signe + si les sens de ces courants concordent.

Δ_{km} est le complément algébrique (ou mineur) obtenu à partir du déterminant Δ, en rayant la colonne k et la ligne m, et en multipliant le déterminant ainsi obtenu par $(-1)^{k+m}$.

Si on trace en partant du coin gauche supérieur du déterminant une diagonale vers son coin droit inférieur (cette diagonale est appelée diagonale principale) et si on tient compte que $R_{12} = R_{21}$ et, qu'en général, $R_{km} = R_{mk}$ on voit ce que le déterminant est divisé en deux moitiés symétriques par rapport à cette diagonale. Cette propriété du déterminant est appelée symétrie par rapport à la diagonale principale. En vertu de cette symétrie, on peut écrire

$$\Delta_{km} = \Delta_{mk}.$$

Exemple 5. Calculer les courants circulant dans le circuit de la fig. 13 en utilisant la méthode des courants fictifs maillés. Les valeurs numériques des résistances et des F.E.M. sont indiquées sur le schéma.

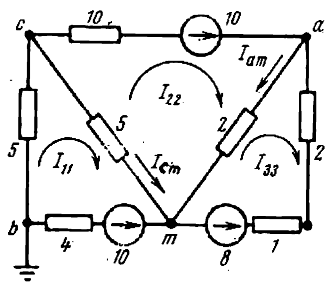


Fig. 13

Solution. Choisissons comme sens positif pour tous les courants fictifs maillés I_{11}, I_{22} et I_{33} celui des aiguilles d'une montre.

Calculons:

$R_{11} = 5+5+4 = 14\Omega$; $R_{23} = R_{32} = -2\Omega$;

$R_{22} = 5+10+2 = 17\Omega$; $E_{11} = -10V$;

$R_{33} = 2+2+1 = 5\Omega$; $E_{22} = 10V$;

$R_{12} = R_{21} = -5\Omega$; $E_{33} = -8V$.

$R_{13} = R_{31} = 0$;

Ecrivons le système d'équations suivant:

$$14I_{11} - 5I_{22} = -10; \quad -5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} = 10; \quad -2I_{22} + 5I_{33} = -8.$$

Le déterminant du système $\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009.$

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0{,}635A.$$

$$I_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -10 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{226}{1009} = 0{,}225A.$$

$$I_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -5 & -10 \\ -5 & 17 & 10 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-1524}{1009} = -1{,}52A.$$

Courant dans la branche cm $I_{cm} = I_{11} - I_{22} = -0{,}635 - 0{,}225 = -0{,}86\ A$.

Courant dans la branche am $I_{am} = I_{22} - I_{33} = 0{,}225 + 1{,}52 = 1{,}745\ A$.

L'expression (1.5) de la méthode des courants fictifs maillés est utilisée dans un certain nombre de paragraphes suivants comme expression de départ dans l'étude de certains problèmes importants de la théorie des circuits électriques linéaires, comme par exemple: calcul des conductances d'entrée et mutuelles de diverses branches, principe de réciprocité, méthode de superposition et relations linéaires dans les circuits électriques.

§ 13. Principe de superposition et méthode de superposition. Examinons le courant circulant dans la branche k d'un circuit compliqué. En écrivant les équations suivant la méthode des courants fictifs maillés fixons le choix des mailles de manière que la branche k ne fasse partie que de la maille k seulement. Il est toujours possible de le faire.

Alors le courant circulant dans la branche k sera égal au courant fictif maillé I_{kk} calculé à l'aide de l'équation (1.5). Chaque terme du second membre de (1.5) représente le courant engendré dans la branche k par la F.E.M. de la maille correspondante. Ainsi, par exemple, $E_{11}\frac{\Delta_{k1}}{\Delta}$ est la composante du courant de la branche k, due à la F.E.M. E_{11}. Chacune des F.E.M. des mailles peut être exprimée par les F.E.M. des branches E_1, E_2, E_3, ..., E_k, ..., E_n; on peut ensuite grouper tous les facteurs de ces F.E.M. et obtenir ainsi l'équation de la forme suivante:

$$I_k = E_1 g_{k1} + E_2 g_{k2} + E_3 g_{k3} + \ldots + E_k g_{kk} + \ldots + E_n g_{kn}. \qquad (1.7)$$

Si les mailles ont été choisies de manière qu'une F.E.M. quelconque, E_m par exemple, ne figure que dans la maille m et ne fasse partie d'aucune autre maille, $g_{km} = \frac{\Delta_{km}}{\Delta}$.

L'équation (1.7) exprime le principe de superposition. *Le principe de superposition* est énoncé de la manière suivante: le courant circulant dans la branche k est égal à la somme algébrique des courants engendrés séparément par chacune des F.E.M. du circuit. Ce principe est vrai pour tous les circuits linéaires, c'est-à-dire pour les circuits dont les résistances ont les caractéristiques courant-tension sous forme de lignes droites.

Le principe de superposition est utilisé dans la méthode de calcul appelée *méthode de superposition*.

Pour calculer les circuits par la méthode de superposition, on procède de la manière suivante: on commence par calculer successivement les courants engendrés par chacune des F.E.M. en éliminant mentalement du circuit toutes les autres F.E.M., mais en y laissant les résistances internes des sources; ensuite on trouve les courants circulant dans les branches en faisant la somme algébrique des courants partiels précédemment calculés. Notons cependant que la méthode de superposition n'est pas applicable au calcul des puissances dégagées dans les résistan-

ces, par addition des puissances dues aux courants partiels; en effet la puissance est une fonction quadratique du courant ($P = RI^2$).

Ainsi, si les courants partiels I_1 et I_2, dirigés dans le même sens, circulent dans une certaine résistance R, la puissance dégagée dans cette résistance est égale à $P = R\,(I_1+I_2)^2$ et, par conséquent, elle n'est pas égale à la somme des puissances dues aux courants partiels:

$$P \neq RI_1^2 + RI_2^2.$$

E x e m p l e 6. Trouver par la méthode de superposition les courants dans le circuit de la fig. 9.

S o l u t i o n. Représentons le circuit de la fig. 9 sous forme de deux circuits: circuit de la fig. 14, *a* et celui de la fig. 14, *b*. Les valeurs numériques des résistances et des F.E.M. sont indiquées sur les schémas.

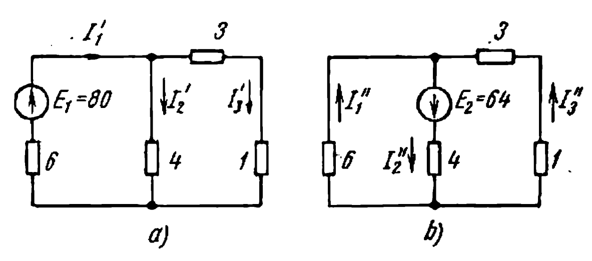


Fig. 14

La F.E.M. $E_1 = 80\ V$ figure sur le schéma de la fig. 14, *a*, tandis que la F.E.M. E_2 en est éliminée; par contre, la F.E.M. E_2 est laissée dans le schéma de la fig. 14, *b* et la F.E.M. E_2 n'y figure pas.

Calculons les courants pour le schéma de la fig. 14, *a*

$$I_1' = \frac{80}{6+\frac{4\cdot 4}{4+4}} = 10A; \qquad I_2' = I_3' = 5A.$$

Dans le schéma de la fig. 14, *b*

$$I_2'' = \frac{64}{4+\frac{6\cdot 4}{6+4}} = 10A; \qquad I_1'' = 10\cdot\frac{4}{6+4} = 4A; \qquad I_3'' = 10-4 = 6A.$$

Pour trouver les courants résultants, faisons la somme algébrique des courants partiels, ainsi calculés, en prenant comme sens positifs pour les courants circulant dans les branches les sens indiqués sur la fig. 9:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 10+4 = 14A; \qquad -I_2 = I_2' + I_2'' = 10+5 = 15A;$$
$$-I_3 = I_3'' - I_3' = 6-5 = 1A.$$

§ 14. Conductances d'entrée et conductances mutuelles des branches. Résistance d'entrée. Le schéma dit « fonctionnel » d'un circuit passif est représenté sur la fig. 15, *a*. Seuls les branches et les nœuds sont représentés sur ce schéma. Chaque branche comporte une résistance. Isolons deux branches dans ce schéma. Appelons l'une d'elles branche

m et l'autre branche k. Plaçons la F.E.M. E_m dans la branche m (il n'existe d'autre F.E.M. dans le circuit). Choisissons les mailles dans ce schéma de manière que la branche k fasse partie de la maille k seulement et que la branche m n'appartienne qu'à la maille m. Alors la F.E.M. E_m engendre dans la branche k le courant

$$I_k = E_m g_{km}$$

et dans la branche m le courant

$$I_m = E_m g_{mm} \tag{1.8}$$

Les facteurs g ont les dimensions des conductances. Ce facteur à deux indices identiques (g_{mm}) est appelé *conductance d'entrée* de la branche (de la branche m). Il est *numériquement* égal au courant engendré dans la branche m, par une F.E.M. E_m, égale à 1 V (à une F.E.M. unitaire) : $I_m = 1 \cdot g_{mm}$.

Les facteurs g à indices différents sont appelés *conductances mutuelles*. Ainsi g_{km} est la conductance mutuelle des branches k et m. La valeur

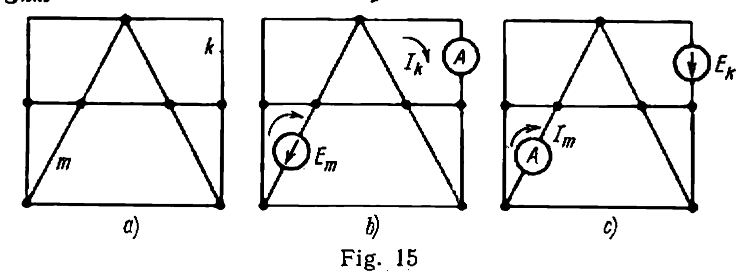


Fig. 15

numérique de g_{km} est égale au courant engendré dans la branche k par une F.E.M. unitaire intercalée dans la branche m *.

Les conductances d'entrée et mutuelles des branches sont utilisées pour établir les propriétés générales des circuits électriques linéaires (§ 15 et 17) et pour calculer ces circuits par la méthode de superposition à l'aide de l'expression (1.7).

Les conductances propres et mutuelles peuvent être déterminées par voie de calcul et par voie expérimentale.

Examinons comment on peut les trouver par des calculs. Pour cela, il faut établir pour le circuit considéré des équations appropriées par la méthode des courants fictifs maillés, en veillant à ce que les branches, dont les conductances mutuelles et d'entrée présentent un intérêt, ne fassent partie chacune que de la maille qui lui est propre et ne figurent pas dans d'autres mailles. Trouvons ensuite le déterminant Δ du système

---

* Les conductances d'entrée et mutuelles des branches peuvent être définies d'une manière quelque peu différente.

La conductance d'entrée d'une certaine branche m est le coefficient de proportionnalité entre le courant circulant dans cette branche et la F.E.M. de la même branche (en l'absence de F.E.M. dans les autres branches du circuit).

La conductance mutuelle des branches k et m est le coefficient de proportionnalité entre le courant de la branche k et la F.E.M. de la branche m, en l'absence de F.E.M. dans les autres branches du circuit.

et calculons à l'aide de ce déterminant les compléments algébriques nécessaires

$$g_{mm}=\frac{\Delta_{mm}}{\Delta}, \tag{1.9}$$

$$g_{km}=\frac{\Delta_{km}}{\Delta}. \tag{1.10}$$

Pour déterminer les valeurs de g_{mm} et g_{km} par voie expérimentale, il faut procéder comme suit: brancher la F.E.M. E_m dans la branche m du circuit et intercaler un ampèremètre (ou un milliampèremètre) dans la branche k. On obtient g_{km} en divisant le courant circulant dans la branche k par la F.E.M. E_m. Pour trouver la conductance d'entrée g_{mm} de la branche m, il faut mesurer le courant circulant dans la branche m et dû à la F.E.M., intercalée dans cette branche. Le quotient du courant de la branche m par la F.E.M. de cette branche est égal à g_{mm}.

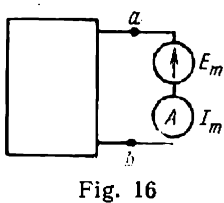


Fig. 16

Isolons la branche m ne représentant la partie restante du circuit (ne comprenant pas de F.E.M.) par un certain rectangle (fig. 16). L'ensemble du circuit, représenté par ce rectangle, comporte une certaine résistance par rapport aux bornes ab. Appelons-la résistance d'entrée. Puisque dans l'exemple examiné il s'agit de la résistance d'entrée pour la branche m, désignons cette résistance par $R_{ent\,m}$

$$R_{ent\,m}=\frac{E_m}{I_m}=\frac{1}{g_{mm}}. \tag{1.11}$$

Ainsi, la résistance d'entrée de la branche m est l'inverse de la conductance de la même branche m. Il ne faut pas la confondre avec la résistance totale de la maille m, utilisée dans la méthode des courants fictifs maillés, elle n'a rien de commun avec cette dernière.

Exemple 7. Calculons la conductance d'entrée g_{11} et la conductance mutuelle g_{12} pour le schéma représenté sur la fig. 13.

Solution. Les mailles sont choisies sur le schéma de la fig. 13 de manière que la branche *1* (branche *cbm*) comprenant la F.E.M. E_1 ne figure que dans la première maille, tandis que la branche *2* (branche *ca*) avec la F.E.M. E_2 fasse partie de la seconde maille; par conséquent, nous pouvons utiliser le déterminant Δ du système et les compléments algébriques Δ_{11} et Δ_{12}, établis d'après les données de l'exemple 5 pour le schéma de la fig. 13:

$$g_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-5 & -2\\ 0 & 5\end{vmatrix}(-1)^{1+2}}{1009}=\frac{25}{1009}=0{,}025\,S\,*;$$

$$g_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}17 & -2\\ -2 & 5\end{vmatrix}(-1)^{1+1}}{1009}=\frac{81}{1009}=0{,}081\,S.$$

* L'unité de conductance Ω^{-1} est appelée siemens (S) dans le Système International (S.I.). Elle est désignée par S.

§ 15. Théorème de réciprocité. Ce théorème s'énonce comme suit : Dans un système linéaire quelconque aussi compliqué soit-il, le courant I_k circulant dans la branche k et engendré par la F.E.M. E_m, faisant partie du circuit m,

$$I_k = E_m g_{km},$$

est égal au courant I_m circulant dans la branche m et engendré par la F.E.M. E_k (numériquement égale à la F.E.M. E_m), faisant partie de la branche k

$$I_m = E_k g_{mk}.$$

Pour démontrer le théorème de réciprocité rapportons-nous à la fig. 15, *a*. De même que pour le raisonnement du paragraphe précédent,

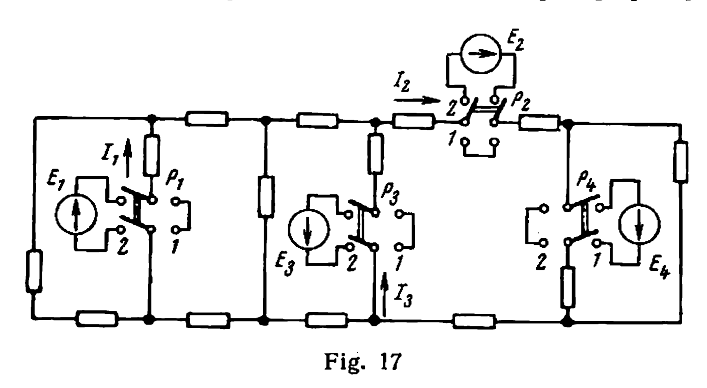


Fig. 17

isolons deux branches du reste du circuit : la branche k et la branche m. Intercalons la F.E.M. E_m dans la branche m et un ampèremètre * pour mesurer le courant I_k dans la branche k. Supposons que les branches k et m ne font partie chacune que des mailles k et m respectivement. Alors, conformément à la méthode des courants fictifs maillés $I_k = E_m \frac{\Delta_{km}}{\Delta}$. Permutons ensuite la F.E.M. et l'ampèremètre, c'est-à-dire transportons la F.E.M. de la branche m dans la branche k et appelons-la maintenant E_k et déplaçons l'ampèremètre de la branche k dans la branche m. Dans ce cas, le courant $I_m = E_k \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}$.

Du fait que $E_k = E_m$ et $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$, par suite de la symétrie du déterminant Δ du système par rapport à sa diagonale principale (voir § 12), le courant I_k dans le schéma de la fig. 15, *b* est égal au courant I_m du schéma de la fig. 15, *c*.

Lorsqu'on utilise dans la pratique le théorème de réciprocité, il ne faut pas oublier de veiller à la correspondance correcte entre les sens des courants et des F.E.M. dans les schémas des fig. 15, *b* et *c*.

---

* L ampèremètre est intercalé pour rendre la démonstration mieux compréhensible. La résistance de l'ampèremètre est considérée comme nulle.

Ainsi, lorsque la F.E.M. E_k, faisant partie de la branche k du schéma de la fig. 15, c est dirigée dans le même sens que le courant fictif maillé I_k du schéma de la fig. 15, b, le sens positif du courant I_m dans le schéma de la fig. 15, c coïncide avec le sens de la F.E.M. E_m du schéma de la fig. 15, b.

Exemple 8. Dans le schéma de la fig. 17, les commutateurs P_1, P_2, P_3 et P_4 peuvent être placés en première ou deuxième positions. S'ils se trouvent en première position (1), seule la F.E.M. E_4 existe dans le circuit. Les courants dus à E_4, circulant dans le circuit, auront les valeurs suivantes: $I_1 = 1{,}5\ A$, $I_2 = 3\ A$, $I_3 = 1\ A$.

Trouver le courant I_4, lorsque tous les commutateurs se trouvent en position *2*, en supposant que $E_1 = 20\ V$, $E_2 = 40\ V$, $E_3 = 50\ V$ et $E_4 = 10\ V$.

Solution. Pour calculer le courant I_4, utilisons le principe de superposition et le principe de réciprocité. Si le circuit ne comprenait que la F.E.M. E_1 seule et si elle était égale à 10 V, tandis que les autres F.E.M. (E_2 et E_3) n'existaient pas, le courant dans la branche *4* * serait égal à 1,5 A et serait dirigé de bas en haut, conformément au principe de réciprocité. Du fait que la F.E.M. E_1 est égale en réalité à 20 V, au lieu de 10 V, le courant dans la branche *4*, dû à cette F.E.M. sera $1{,}5 \cdot \frac{20}{10} = 3\ A$. Calculons d'une manière analogue les courants dans la branche *4* dus à l'action la F.E.M. E_2 et, ensuite à celle de la F.E.M. E_3 et effectuons l'addition algébrique des courants partiels ainsi obtenus (en tenant compte de leur sens)

$$I_4 = 1{,}5 \cdot \frac{20}{10} + 3 \cdot \frac{40}{10} - 1 \cdot \frac{50}{10} = 10A.$$

§ 16. Théorème de compensation. Dans n'importe quel circuit électrique et sans que la répartition des courants dans ce circuit se trouve

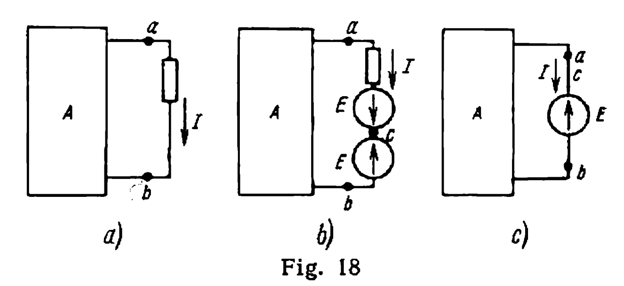


Fig. 18

modifiée, on peut remplacer une résistance par une F.E.M., numériquement égale à la chute de tension dans la résistance remplacée et dirigée à l'encontre du courant dans cette résistance.

Pour démontrer le théorème de compensation isolons du circuit une branche à résistance R, parcourue par le courant I et remplaçons le reste du circuit par un rectangle (fig. 18, a).

* Le numéro des branches correspond à l'indice des F.E.M.

Si on intercale dans la branche ainsi isolée deux F.E.M. E de valeur égale et de sens contraire, numériquement égales à la chute de tension dans la résistance R, due au courant I ($E = IR$; voir fig. 18, *b*), le courant I dans ce circuit ne sera pas modifié de ce fait. Assurons-nous que la différence de potentiel entre les points a et c dans le schéma de la fig. 18, b sera nulle dans ces conditions.

En effet,

$$\varphi_c = \varphi_a - IR + E = \varphi_a - IR + IR = \varphi_a.$$

Mais si $\varphi_c = \varphi_a$, les points a et c peuvent être confondus en un seul ou, en d'autres termes, on peut court-circuiter le tronçon ac et obtenir ainsi le schéma de la fig. 18, *c*. Dans ce schéma la résistance R est remplacée par la F.E.M. E.

Exemple 9. S'assurer de l'identité des schémas des fig. 19, *a* et *b*.

Solution. Dans le schéma de la fig. 19, a le courant $I = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$.

Pour le schéma de la fig. 19, b nous avons:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1} = \frac{E_1 - E_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{R_1} = \frac{E_1}{R_1 + R_2}.$$

Ainsi le remplacement de la résistance R_2 par la F.E.M. E_2 dans le schéma de la fig. 19 n'entraîne pas de modification du courant dans le circuit, ce qui est conforme au théorème de compensation.

§ 17. Relations linéaires dans les circuits électriques. Si dans un circuit électrique linéaire la F.E.M. ou la résistance varie dans *une branche* quelconque, deux autres grandeurs quelconques (courant et

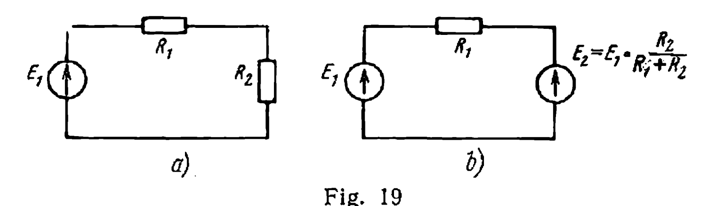


Fig. 19

tension) dans *deux autres branches quelconques* sont liées entre elles par des équations linéaires de la forme $y = a + bx$.

Le rôle de x est joué par le courant ou la tension de l'une des branches et le rôle de y est assumé par le courant ou la tension de l'autre branche.

Démonstration. Conformément à la méthode des courants fictifs maillés, l'expression générale pour le courant dans la branche k peut être écrite sous la forme (1.7). Si dans le circuit considéré une seule F.E.M., la F.E.M. E_m par exemple, est variable, tous les termes de (1.7), sauf le terme $E_m g_{km}$, sont constants et peuvent, pour simplifier l'écriture, être remplacés par un certain terme A_k. Par conséquent:

$$I_k = A_k + E_m g_{km}. \tag{1.12}$$

De même pour une autre branche quelconque p

$$I_p = A_p + E_m g_{pm} \tag{1.13}$$

Calculons E_m à l'aide de (1.13)

$$E_m = \frac{I_p - A_p}{g_{pm}}$$

et en introduisant cette valeur dans (1.12) écrivons:

$$I_k = a_k + b_k I_p. \tag{1.14}$$

Ici

$$a_k = A_k - A_p \frac{g_{km}}{g_{pm}} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{g_{km}}{g_{pm}} \ldots$$

Il résulte de (1.14) que lorsque la F.E.M. E_m varie, les courants I_k et I_p sont liés entre eux par une relation linéaire. On sait d'autre part de la théorie de compensation qu'on peut remplacer une résistance quelconque par une F.E.M.

Par conséquent, une variation de la résistance dans la branche m est équivalente à une variation de la F.E.M. E_m. Ainsi une relation linéaire (1.14) entre deux courants quelconques existe non seulement en cas de variation de la F.E.M. E_m, mais également en cas de variation de la résistance d'une branche quelconque m.

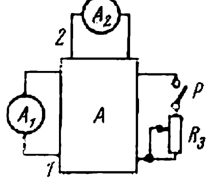


Fig. 20

En multipliant les deux membres de (1.12) par la résistance R_k de la branche k et en effectuant des opérations identiques à celles décrites, on peut s'assurer que la tension dans la branche k est une fonction linéaire du courant de la branche p.

Les facteurs a_k et b_k dans (1.14) et dans d'autres expressions analogues peuvent être déterminés par voie de calcul ou par voie expérimentale.

Pour déterminer ces facteurs par voie expérimentale, il suffit de mesurer deux courants (ou respectivement deux tensions) pour deux régimes différents de fonctionnement du circuit et, ensuite résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Soit, par exemple, au cours d'un premier essai $I_k = I_{k1}$ et $I_p = I_{p1}$ et au cours du deuxième essai $I_k = I_{k2}$ et $I_p = I_{p2}$; on obtient alors

$$I_{k1} = a_k + b_k I_{p1}$$

et

$$I_{k2} = a_k + b_k I_{p2}.$$

D'où

$$a_k = \frac{I_{k2} - \dfrac{I_{p2}}{I_{p1}} I_{k1}}{1 - \dfrac{I_{p2}}{I_{p1}}}$$

et

$$b_k = \frac{I_{k1} - a_k}{I_{p1}}.$$

Si dans un circuit les F.E.M. et les résistances dans deux branches quelconques varient en même temps, les trois valeurs quelconques de ce circuit (courant, tension) sont liées entre elles par une relation linéaire du type $y = a + bx + cz$.

Cette relation se démontre d'une manière analogue à la précédente.

Exemple 10. Le schéma de la fig. 20 représente un circuit dont on a isolé trois branches. L'ampèremètre A est intercalé dans la branche *1*, et l'ampèremètre A_2 dans la branche *2*. La troisième branche comprend l'interrupteur P et la résistance R_3. Si l'interrupteur P est ouvert l'ampèremètre A_1 indique 1 A et l'ampèremètre A_2 indique 5 A. Lorsqu'on ferme l'interrupteur P, A_1 indique 2 A et A_2 — 4 A. L'interrupteur P étant fermé, on a modifié la résistance R_3 de manière que l'ampèremètre A_2 indique 4,5 A. Quelle est l'intensité du courant lue sur l'ampèremètre A_1 en ce régime?

Solution. Exprimons I_1 en fonction de I_2

$$I_1 = a + bI_2.$$

Ecrivons deux équations pour calculer a et b:

$$1 = a + 5b;$$
$$2 = a + 4b;$$

il en découle que $a = 6$ et $b = -1$.

Pour $I_2 = 4{,}5A$

$$I_1 = 6 - 4{,}5 \cdot 1 = 1{,}5A.$$

§ 18. Remplacement de plusieurs branches couplées en parallèle et comprenant des sources de F.E.M. par une seule branche équivalente. Le calcul des circuits compliqués est nettement facilité si on remplace plusieurs branches, couplées en parallèle et comprenant des sources de F.E.M. et des résistances, par une seule branche équivalente.

Le tronçon du schéma de la fig. 21, *b* est équivalent au tronçon du schéma de la fig. 21, *a* si pour les valeurs quelconques du courant I, fourni par la partie du circuit, non représentée sur le schéma, la tension U_{ab} aux bornes a et b est la même pour les deux circuits (21*a* et *b*). Pour connaître les valeurs de R_e et E_e (l'indice e symbolisant équivalent), écrivons les équations pour ces deux circuits.

Pour le schéma de la fig. 21, *a* nous avons

$$I_1 + I_2 + I_3 = I,$$

mais

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = (E_1 - U_{ab})\, g_1;$$
$$I_2 = (E_2 - U_{ab})\, g_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$I_n = (E_n - U_{ab})\, g_n. \qquad (1.15)$$

Par conséquent,

$$I=\sum_{k=1}^{n} I_k=\sum_{k=1}^{n} E_k g_k-U_{ab}\sum_{k=1}^{n} g_k. \qquad (1.16)$$

Ici n désigne le nombre des branches en parallèle. L'identité suivante est vraie pour le circuit de la fig. 21, b

$$I=E_e g_e-U_{ab} g_e, \qquad (1.17)$$

où

$$g_e=\frac{1}{R_e}.$$

L'égalité des courants I dans les circuits des fig. 21, a et b doit avoir lieu pour des valeurs quelconques de U_{ab}, et ceci n'est possible que lorsque le facteur de U_{ab} dans (1.16) est égal au facteur de U_{ab} dans (1.17). Par conséquent,

$$g_e=\sum_{k=1}^{n} g_k. \qquad (1.18)$$

Mais si les termes comprenant U_{ab} dans (1.16) et (1.17) sont égaux et si les courants I sont également égaux du fait de l'équivalence des deux circuits, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} E_k g_k=E_e g_e;$$

d'où

$$E_e=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} E_k g_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} g_k}. \qquad (1.19)$$

L'équation (1.18) permet de calculer la conductance g_e et, en partant de cette dernière, R_e dans le schéma de la fig. 21, b. Il découle de (1.18) que la conductance g_e ne dépend pas de la présence ou de l'absence d'une F.E.M. dans les branches du circuit de la fig. 21, a.

Lorsqu'on effectue des calculs à l'aide de (1.19), il ne faut pas perdre de vue les considérations suivantes: s'il n'existe pas de F.E.M. dans une branche quelconque du circuit, le terme correspondant du numérateur de (1.19) disparaît, mais la conductance de cette branche, figurant au dénominateur de (1.19), demeure; si une F.E.M. dans le circuit initial a un sens contraire à celui représenté sur la fig. 21, a, le terme correspondant doit figurer au numérateur de l'expression (1.19) avec le signe —.

Les branches du schéma de la fig. 21, a et la branche du schéma 21, b ne sont équivalentes que par leur comportement par rapport au tronçon du circuit non représenté sur la fig. 21, mais ne sont pas équivalentes pour ce qui est de la puissance dégagée dans chacune d'elles. Ceci peut

être expliqué qualitativement comme suit. Dans les branches du schéma de la fig. 21, *a* des courants peuvent circuler même lorsque $I = 0$, tandis que dans la branche *ab* de la fig. 21, *b* pour $I = 0$ il n'y a pas de courant, ni de consommation d'énergie.

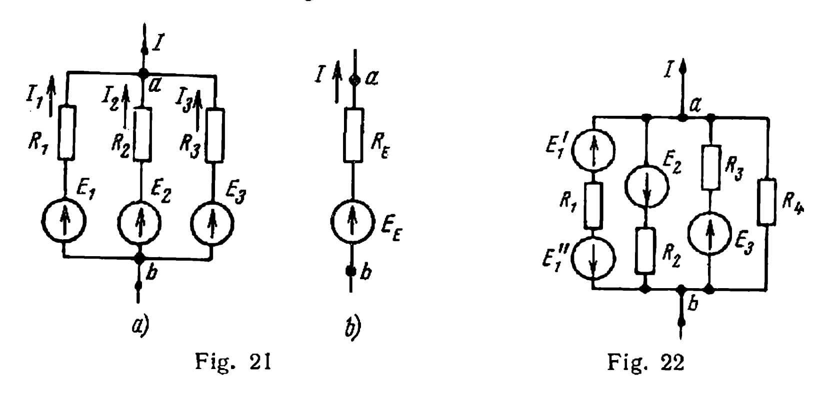


Fig. 21 Fig. 22

Exemple 11. Remplacer les branches, couplées en parallèle, de la fig. 22 par une seule branche équivalente. Soit :

$$E_1' = 10V, \quad E_1'' = 30V, \quad E_2 = 40V, \quad E_3 = 60V \text{ et } R_1 = 2\Omega,$$
$$R_2 = 4\Omega, \quad R_3 = 1\Omega \text{ et } R_4 = 5\Omega.$$

Solution. Trouvons

$$g_1 = 0{,}5S; \quad g_2 = 0{,}25S; \quad g_3 = 1S; \quad g_4 = 0{,}2S.$$

$$R_e = \frac{1}{\sum_{k=1}^{4} g_k} = \frac{1}{0{,}5+0{,}25+1+0{,}2} = 0{,}513\Omega.$$

$$E_e = \frac{\sum_{k=1}^{4} E_k g_k}{\sum g_k} = \frac{(10-30)\cdot 0{,}5-40\cdot 0{,}25+60\cdot 1}{1{,}95} = 20{,}5V.$$

Ainsi la branche équivalente de la fig. 21, *b* a les paramètres suivants :

$$R_e = 0{,}513\Omega \quad \text{et} \quad E_e = 20{,}5V.$$

§ 19. Méthode de deux nœuds. On rencontre souvent des circuits ne comprenant que deux nœuds. L'un de ces circuits est représenté à titre d'exemple sur la fig. 23. La méthode la plus rationnelle de calcul des courants dans de tels circuits est la méthode dite de deux nœuds.

On comprend sous *la méthode de deux nœuds* une méthode de calcul des circuits électriques dans laquelle on prend comme inconnue la tension entre deux nœuds du circuit.

Les équations utilisées pour les calculs dans cette méthode découlent directement des expressions (1.15) et (1.16) ; elles peuvent être également

obtenues très simplement en partant de la méthode plus générale — méthode des potentiels des nœuds, exposée au paragraphe suivant.

Contrairement à ce qui se passe dans le circuit de la fig. 21, *a*, le courant I n'arrive pas aux nœuds *a* et *b* du circuit de la fig. 23. Par conséquent, en prenant $I = 0$ dans (1.16) on peut utiliser cette dernière pour trouver la tension U_{ab} entre les deux nœuds

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k g_k}{\sum g_k}. \qquad (1.20)$$

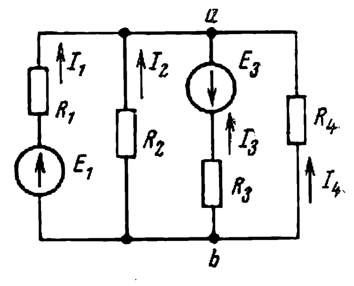


Fig. 23

Après avoir trouvé la tension U_{ab} on calcule le courant dans une branche quelconque (n) à l'aide de (1.15).

E x e m p l e 12. Trouver les courants dans le schéma de la fig. 23 et vérifier le bilan des puissances si $E_1 = 120\ V$, $E_3 = 50\ V$; $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 1\Omega$ et $R_4 = 10\Omega$.

S o l u t i o n.

$$U_{ab} = \frac{120 \cdot 0,5 - 50 \cdot 1}{0,5 + 0,25 + 1 + 0,1} = \frac{10}{1,85} = 5,4V;$$

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = \frac{120 - 5,4}{2} = 57,3A;$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{ab}}{R_2} = \frac{0 - 5,4}{4} = -1,35A;$$

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{ab}}{R_3} = \frac{-50 - 5,4}{1} = -55,4A;$$

$$I_4 = \frac{E_4 - U_{ab}}{R_4} = \frac{0 - 5,4}{10} = -0,54A.$$

La puissance consommée dans ce circuit est:

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = 57,3^2 \cdot 2 + 1,346^2 \cdot 4 + \\ + 55,4^2 \cdot 1 + 0,54^2 \cdot 10 = 9\,647W.$$

Les sources de F.E.M. fournissent la puissance $E_1 I_1 + E_3 I_3 = 120 \cdot \cdot 57,3 + 50 \cdot 55,4 = 9\,647\ W$.

§ 20. Méthode des potentiels des nœuds. Le courant dans une branche quelconque d'un circuit peut être calculé d'après la loi d'Ohm pour un tronçon de circuit comprenant une F.E.M. Par conséquent, pour appliquer la loi d'Ohm il faut connaître les potentiels des nœuds du circuit. La méthode de calcul des circuits électriques dans laquelle les inconnues sont justement les potentiels des nœuds du circuit est appelée *méthode des potentiels des nœuds* (*nodaux*).

Supposons qu'il existe n nœuds dans un circuit. Etant donné qu'un seul point quelconque du circuit peut être mis à la terre sans que la répartition des courants dans le circuit s'en trouve modifiée, nous avons droit de mettre mentalement à la terre l'un des nœuds du circuit, autre-

ment dit de considérer son potentiel comme nul. De ce fait le nombre d'inconnues passe de n à $(n-1)$.

Le nombre d'inconnues dans la méthode des potentiels des nœuds est égal au nombre d'équations qu'il faut établir pour le circuit, conformément à la première loi de Kirchhoff. La méthode des potentiels des nœuds, de même que celle des courants fictifs maillés, est l'un des modes de calcul les plus usités. Lorsque le nombre de nœuds, moins un, est inférieur au nombre des mailles indépendantes du circuit, cette méthode est plus avantageuse que la méthode des courants fictifs maillés.

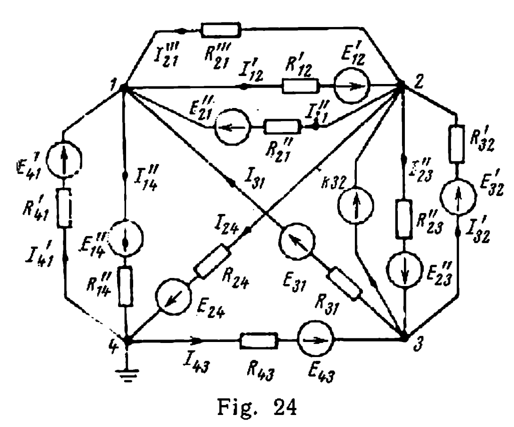


Fig. 24

Examinons le schéma de la fig. 24. Ce schéma comporte un assez grand nombre de branches (11 branches) et un nombre relativement réduit de nœuds (4 nœuds). Si nous mettons à la terre mentalement l'un des nœuds du schéma, le nœud *4* par exemple, autrement dit, si nous posons $\varphi_4 = 0$, il nous reste à calculer les potentiels des trois nœuds seulement, à savoir de φ_1, φ_2 et φ_3. Pour utiliser toujours les mêmes désignations, attribuons deux indices aux courants. Le premier indice de courant correspond au numéro du nœud d'où ce courant part et le second indice à celui du nœud, auquel le courant arrive. Les conductances des branches seront également pourvues de deux indices.

En partant des désignations des courants sur la fig. 24 écrivons l'équation conformément à la première loi de Kirchhoff pour le premier nœud

$$I'_{41} - I'_{14} + I'''_{21} - I'_{12} + I''_{21} + I_{31} = 0,$$

ou

$$[E'_{41} - (\varphi_1 - \varphi_4)]\, g'_{41} - [E''_{14} - (\varphi_4 - \varphi_1)]\, g''_{41} + \\ + [0 - (\varphi_1 - \varphi_2)]\, g'''_{12} - [E'_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)]\, g'_{12} + \\ + [E''_{21} - (\varphi_1 - \varphi_2)]\, g''_{12} + [E_{31} - (\varphi_1 - \varphi_3)]\, g_{13} = 0.$$

Récrivons la dernière équation sous la forme suivante:

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11}. \quad (1.21)$$

Où

$$G_{11} = g'_{41} + g_{13} + g''_{12} + g''_{41} + g'_{12} + g'''_{12};$$

$$G_{12} = -(g'_{12} + g'''_{12} + g''_{12}); \quad G_{13} = -g_{13};$$

$$I_{11} = E'_{41} g'_{14} + E_{31} g_{31} + E''_{21} g''_{21} - E''_{14} g''_{41} - E'_{12} g'_{21}.$$

Examinons la structure de l'équation (1.21). Le facteur de φ_1 dans cette équation est le facteur G_{11}, égal à la somme des conductances de toutes les branches aboutissant au premier nœud. G_{12} est égal à la somme des conductances de toutes les branches réunissant le nœud *1* au nœud *2*, prise avec le signe —.

De même G_{13} est la somme des conductances de toutes les branches réunissant le nœud *1* au nœud *3*, prise avec le signe —. Le courant I_{11} est appelé courant de nœud ou nodal — du premier nœud. C'est une valeur théorique égale à la somme algébrique des courants, obtenus par division de la F.E.M. des branches aboutissant au nœud *1* par la résistance de ces branches. Les courants des branches, dont les F.E.M. sont dirigées vers le nœud *1* figurent dans cette somme avec le signe +. Il y a lieu de remarquer que les conductances écrites ci-dessus avec deux indices n'ont rien de commun avec les conductances d'entrée et mutuelles examinées au § 14.

Des équations identiques peuvent être écrites pour tous les autres nœuds du circuit. Si le circuit comporte n nœuds, il lui correspond un système de $(n-1)$ équations

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \ldots + \varphi_{n-1} G_{1,\, n-1} = I_{11}; \\
\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \ldots + \varphi_{n-1} G_{2,\, n-1} = I_{22}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_1 G_{n-1,\, 1} + \varphi_2 G_{n-1,\, 2} + \ldots + \varphi_{n-1} G_{n-1,\, n-1} = I_{n-1,\, n-1}
\end{array}\right\} \qquad (1.22)$$

Ici G_{kk} est la somme des conductances des branches aboutissant au nœud k; G_{km}, la somme des conductances des branches réunissant les nœuds k et m, prise avec le signe —. I_{kk} est le courant fictif maillé du nœud k. Si un courant, provenant d'une source, arrive au nœud k, ce courant doit faire partie du courant I_{kk} avec le signe + et si ce courant part du nœud k, on doit l'introduire avec le signe —.

Si deux nœuds quelconques du circuit ne sont pas réunis directement par une branche, la conductance correspondante doit être considérée comme nulle. Après avoir résolu le système (1.22) par rapport aux potentiels, on calcule les courants dans les branches à l'aide de la loi d'Ohm pour le tronçon du circuit comprenant une F.E.M.

Exemple 13. Calculer les courants dans les branches du schéma de la fig. 24 et vérifier les résultats obtenus à l'aide de la deuxième loi de Kirchhoff.

Soit:

$$E'_{41} = 10V, \quad E''_{14} = 6V, \quad E'_{12} = 20V, \quad E''_{21} = 30V, \quad E_{31} = 14V, \quad E_{24} = 10V,$$
$$E_{43} = 8V, \quad E''_{23} = 12V, \quad E'_{32} = 7V; \quad R'_{41} = 1\Omega, \quad R''_{14} = 2\Omega, \quad R'_{12} = 10\Omega,$$
$$R''_{12} = 10\Omega, \quad R'''_{12} = 5\Omega, \quad R_{31} = 2\Omega, \quad R_{24} = 4\Omega, \quad R_{34} = 2\Omega, \quad R''_{23} = 4\Omega,$$
$$R'_{23} = 2\Omega.$$

La source du courant, intercalée entre les nœuds *3* et *2* produit un courant $I_{k32} = 1{,}5\ A$.

S o l u t i o n: Ecrivons le système d'équations suivant:

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11};$$
$$\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = I_{22};$$
$$\varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = I_{33}.$$

Calculons les conductances

$$G_{11} = \frac{1}{R'_{41}} + \frac{1}{R''_{41}} + \frac{1}{R'_{12}} + \frac{1}{R''_{12}} + \frac{1}{R'''_{12}} + \frac{1}{R_{13}} = \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 2,4S;$$

$$G_{22} = \frac{1}{R'_{12}} + \frac{1}{R''_{12}} + \frac{1}{R'''_{12}} + \frac{1}{R_{24}} + \frac{1}{R'_{23}} + \frac{1}{R''_{23}} = \\ = 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,25 + 0,25 + 0,5 = 1,4S;$$

$$G_{33} = \frac{1}{R'_{23}} + \frac{1}{R''_{23}} + \frac{1}{R_{31}} + \frac{1}{R_{34}} = 0,5 + 0,5 + 0,25 + 0,5 = 1,75S;$$

$$G_{12} = G_{21} = -(0,2 + 0,1 + 0,1) = -0,4S;$$
$$G_{31} = G_{13} = -0,5S;$$
$$G_{23} = G_{32} = -(0,25 + 0,5) = -0,75S.$$

Lors du calcul de G_{22}, G_{33} et G_{23} nous avons considéré que les conductances des branches, comportant une source de courant, sont nulles (la résistance de la source de courant étant égale à l'infini).

Courants fictifs des nœuds

$$I_{11} = \frac{E'_{41}}{R'_{41}} - \frac{E''_{14}}{R''_{14}} + \frac{E_{31}}{R_{31}} - \frac{E'_{12}}{R'_{12}} + \frac{E''_{21}}{R''_{12}} = \frac{10}{1} - \frac{6}{2} + \frac{14}{2} - \frac{20}{10} + \frac{30}{10} = 15A;$$

$$I_{22} = \frac{E'_{32}}{R'_{32}} - \frac{E''_{23}}{R''_{23}} + \frac{E'_{12}}{R'_{12}} - \frac{E''_{21}}{R''_{21}} - \frac{E_{24}}{R_{24}} + I_{k32} = -1,5A;$$

$$I_{33} = -3,5 + 3 - 7 + 4 - 1,5 = -5A.$$

Nous avons ainsi un système d'équations:

$$2,4\varphi_1 - 0,4\varphi_2 - 0,5\varphi_3 = 15;$$
$$-0,4\varphi_1 + 1,4\varphi_2 - 0,75\varphi_3 = -1,5;$$
$$-0,5\varphi_1 - 0,75\varphi_2 + 1,75\varphi_3 = -5.$$

Le déterminant de ce système:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2,4 & -0,4 & -0,5 \\ -0,4 & 1,4 & -0,75 \\ -0,5 & -0,75 & 1,75 \end{vmatrix} = 3,62.$$

$$\varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -0,4 & -0,5 \\ -1,5 & 1,4 & -0,75 \\ -5 & -0,75 & 1,75 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{21,69}{3,62} = 6V.$$

$$\varphi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2,4 & 15 & -0,5 \\ -0,4 & -1,5 & -0,75 \\ -0,5 & -5 & 1,75 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{0,217}{2,62} = 0,06V.$$

$$\varphi_3 = \frac{-4}{3,62} = -1,107V.$$

L'étape finale de l'opération est le calcul du courant conformément à la loi d'Ohm. Avant de calculer les courants dans les branches du circuit, il faut évidemment attribuer des désignations à ces courants et choisir pour eux les sens positifs.

Rappelons que conformément aux désignations adoptées dans ce paragraphe, le premier indice attribué au courant correspond au numéro du nœud à partir duquel s'écoule ce courant, et le deuxième indice au numéro du nœud vers lequel ce courant est dirigé

$$I'_{41} = \frac{E'_{14} - (\varphi_1 - \varphi_4)}{R'_{41}} = \frac{10 - (6 - 0)}{1} = 4A;$$

$$I'''_{21} = \frac{0 - (\varphi_1 - \varphi_2)}{R'''_{12}} = -\frac{(6 - 0,06)}{5} = -\frac{5,94}{5} = -1,185A;$$

$$I'_{32} = \frac{E'_{32} - (\varphi_2 - \varphi_3)}{R'_{32}} = \frac{7 - (0,06 + 1,1)}{2} = \frac{5,84}{2} = -2,92\,A;$$

$$I_{43} = \frac{E_{43} - (\varphi_3 - \varphi_4)}{R_{43}} = \frac{8 - (-1,107 - 0)}{2} \approx 4,55\,A, \text{ etc.}$$

Vérifions le résultat obtenu à l'aide de la deuxième loi de Kirchhoff pour la maille périphérique.

La somme algébrique des chutes des tensions est

$$4 \cdot 1 - (-1,185) \cdot 5 - 2,92 \cdot 2 - 4,55 \cdot 2 \approx -5\,V.$$

La somme algébrique des F. E. M. est

$$10 - 7 - 8 = -5\,V.$$

Démontrons que l'équation (1.20) de la méthode de deux nœuds peut être obtenue comme un cas particulier de (1.22). En effet, si l'un des nœuds du schéma de la fig. 23, le nœud b par exemple, est mis à la terre, il ne reste qu'à trouver un seul potentiel $\varphi_a = U_{ab}$. Pour obtenir l'expression (1.20), il faut poser dans (1.22)

$$\varphi_1 = \varphi_a = U_{ab}; \quad \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \ldots = 0;$$
$$I_{22} = -I_{11}; \quad G_{21} = -G_{11}; \quad I_{33} = I_{44} = \ldots = 0.$$

§ 21. Transformation d'une étoile en triangle et d'un triangle en étoile. Le couplage de trois résistances, en forme d'une étoile à trois rayons (fig. 25), est appelé couplage en « étoile » et le couplage de trois résistances, réalisé de manière qu'elles forment les trois côtés d'un triangle (fig. 26), est appelé couplage en « triangle ». Le triangle comme l'étoile sont raccordés aux points *1*, *2*, *3* (dont les potentiels sont respec-

tivement φ_1, φ_2 et φ_3) à la partie restante du circuit, non représentée sur les schémas.

Désignons les courants arrivant aux nœuds *1*, *2*, *3* par I_1, I_2, I_3.

Il est souvent avantageux lors du calcul des circuits électriques de transformer un triangle en étoile ou d'effectuer la transformation d'une étoile en triangle. On a affaire plus souvent dans la pratique à la transformation d'un triangle en étoile, qu'à la transformation inverse. Si on transforme de manière, que pour les mêmes valeurs des potentiels des points homologues du triangle et de l'étoile, les courants arrivant à ces

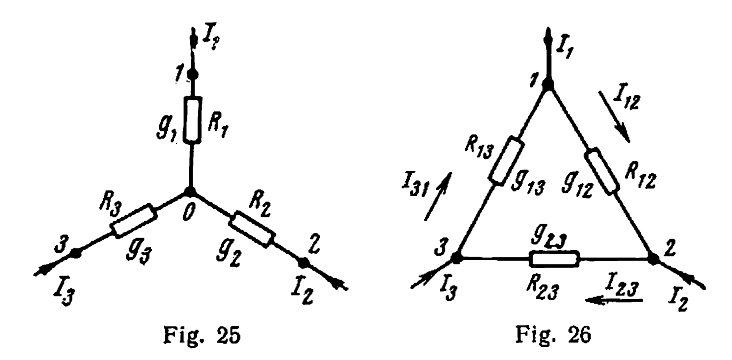


Fig. 25 Fig. 26

points soient égaux, le circuit extérieur ne peut pour ainsi dire « remarquer » la transformation effectuée. Etablissons maintenant les expressions de transformation. Pour cela exprimons les courants I_1, I_2 et I_3 pour l'étoile, comme pour le triangle, à l'aide des différences de potentiel des points, ainsi que des conductances appropriées.

Nous avons pour l'étoile

$$I_1+I_2+I_3=0, \tag{1.23}$$

mais

$$I_1=(\varphi_1-\varphi_0)\,g_1; \quad I_2=(\varphi_2-\varphi_0)\,g_2; \quad I_3=(\varphi_3-\varphi_0)\,g_3. \tag{1.24}$$

Substituons (1.24) dans (1.23) et cherchons φ_0

$$\varphi_1 g_1+\varphi_2 g_2+\varphi_3 g_3-\varphi_0\,(g_1+g_2+g_3)=0.$$

D'où

$$\varphi_0=\frac{\varphi_1 g_1+\varphi_2 g_2+\varphi_3 g_3}{g_1+g_2+g_3}. \tag{1.25}$$

Ensuite introduisons φ_0 dans l'équation du courant I_1

$$I_1=(\varphi_1-\varphi_0)\,g_1=\frac{[\varphi_1\,(g_2+g_3)-\varphi_2 g_2-\varphi_3 g_3]\,g_1}{g_1+g_2+g_2}. \tag{1.26}$$

Considérons maintenant le couplage en triangle. Conformément aux désignations de la fig. 26

$$I_1=I_{12}-I_{31}=(\varphi_1-\varphi_2)\,g_{12}-(\varphi_3-\varphi_1)\,g_{13}=\varphi_1\,(g_{12}+g_{13})-\varphi_3 g_{13}-\varphi_2 g_{12}. \tag{1.27}$$

Du fait que le courant I_1 du schéma de la fig. 25 doit être égal au courant I_1 du schéma de la fig. 26, quelles que soient les valeurs des potentiels φ_1, φ_2, φ_3, le facteur de φ_2 dans le troisième membre de (1.27) doit être égal au facteur de φ_2 dans le troisième membre de (1.26), tandis que le facteur de φ_3 dans le troisième membre de (1.27) doit être égal au facteur de φ_3 dans le troisième membre (1.26).

Par conséquent,

$$g_{12}=\frac{g_1g_2}{g_1+g_2+g_3}\,; \tag{1.28}$$

$$g_{13}=\frac{g_1g_3}{g_1+g_2+g_3}\,. \tag{1.29}$$

De même

$$g_{23}=\frac{g_2g_3}{g_1+g_2+g_3}\,. \tag{1.30}$$

Les équations de (1.28) à (1.30) permettent de calculer les conductances des côtés du triangle en partant des conductances des rayons de l'étoile. Ces équations ont une structure facile à retenir : les indices des conductances figurant dans le nominateur du second membre sont les mêmes que les indices de la conductance dans le premier membre, tandis que la somme des conductances des rayons de l'étoile figure au dénominateur.

En partant des équations (1.28) à (1.30) exprimons les résistances des rayons de l'étoile

$$R_1=\frac{1}{g_1}\,;\quad R_2=\frac{1}{g_2}\ \text{et}\ R_3=\frac{1}{g_3}$$

en fonction des résistances des côtés du triangle

$$R_{12}=\frac{1}{g_{12}}\,;\quad R_{23}=\frac{1}{g_{23}}\,;\quad R_{13}=\frac{1}{g_{13}}\,.$$

Pour cela écrivons les fractions inverses à (1.28)—(1.30)

$$R_{12}=\frac{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}}=\frac{\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1R_2R_3}}{\frac{1}{R_1R_2}}=\frac{m}{R_3}\,. \tag{1.31}$$

Où

$$m=R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1\,; \tag{1.32}$$

$$R_{23}=\frac{m}{R_1}\,; \tag{1.33}$$

$$R_{13}=\frac{m}{R_2}\,. \tag{1.34}$$

En substituant (1.31), (1.33) et (1.34) dans (1.32) obtenons

$$m=m^2\left(\frac{1}{R_{23}R_{13}}+\frac{1}{R_{13}R_{12}}+\frac{1}{R_{12}R_{23}}\right)=m^2\,\frac{R_{12}+R_{23}+R_{31}}{R_{12}R_{23}R_{31}}\,.$$

Par conséquent,

$$m=\frac{R_{12}R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}\,.$$

Substituons m dans (1.33)

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} . \quad (1.35)$$

De même

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} ; \quad (1.36)$$

$$R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}} . \quad (1.37)$$

La structure des équations de (1.35) à (1.37) est identique à celle des équations de (1.28) à (1.30). L'utilité de la transformation d'un

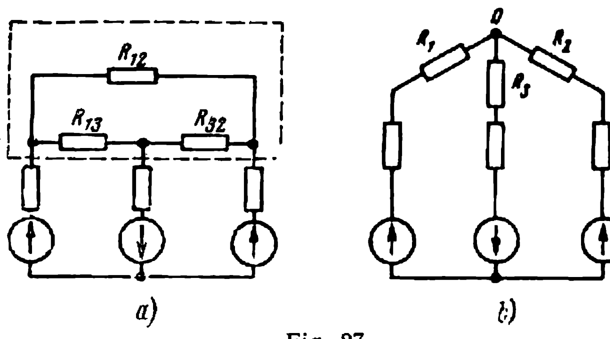


Fig. 27

triangle en étoile peut être illustrée sur l'exemple du schéma de la fig. 27. Ce schéma est représenté sur la fig. 27, *a* avant sa transformation, le triangle à transformer y étant entouré de pointillé. Le même schéma après sa transformation est représenté sur la fig. 27, *b*. Le calcul des

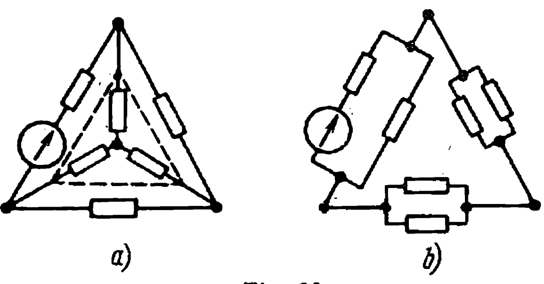


Fig. 28

courants est nettement plus simple dans ce circuit (par la méthode des deux nœuds par exemple), que le calcul des courants dans le schéma de la fig. 27, *a*. L'utilité de la transformation d'une étoile en triangle peut être démontrée sur l'exemple du schéma de la fig. 28. Le schéma, avant sa transformation, est représenté sur la fig. 28, *a*. L'étoile à transformer en triangle y est entourée de pointillé. La fig. 28, *b* représente le schéma après sa transformation. Le circuit, ainsi transformé, se réduit à des résistances couplées en série et en parallèle.

Exemple 14. Trouver les valeurs des résistances R_1, R_2, R_3 dans le circuit de la fig. 27, *b*, si les résistances R_{12}, R_{13}, R_{32} du schéma de la fig. 27, *a* sont respectivement égales à 2, 3 et 5Ω.

Solution. D'après l'équation (1.35)

$$R_1=\frac{2\cdot 3}{2+3+5}=0,6\Omega$$

et conformément à (1.36)

$$R_2=\frac{5\cdot 2}{10} - 1\Omega$$

enfin suivant (1.37)

$$R_3=\frac{3\cdot 5}{10}=1,5\Omega.$$

§ 22. **Dipôles actif et passif.** Présentons maintenant la notion de dipôle, largement utilisée dans la théorie des circuits électriques.

Dans n'importe quel circuit électrique on peut toujours isoler mentalement une branche quelconque et représenter symboliquement toute la

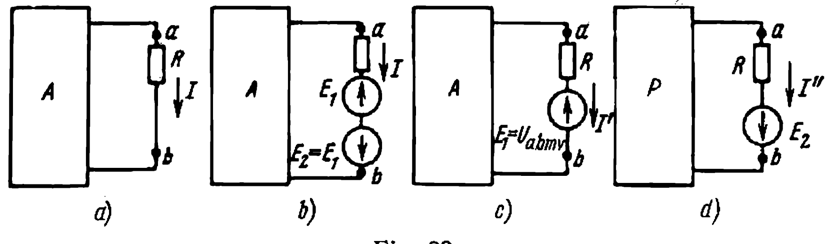


Fig. 29

partie restante du circuit, indépendamment de sa structure et de sa complexité, par un certain rectangle (fig. 29, *a*). Nous avons déjà recouru auparavant à cette méthode (§ 16), mais sans en donner des explications spéciales. Par rapport à la branche isolée, l'ensemble du circuit représenté par un rectangle, peut être considéré comme un dipôle.

Ainsi, *un dipôle* est la dénomination généralisée d'un circuit raccordé par ses deux bornes (pôles) de sortie à la branche isolée.

Si un dipôle comporte une F.E.M. ou/et une source de courant on l'appelle dipôle actif. On fait figurer alors dans le rectangle en question la lettre A (première lettre du mot actif, voir fig. 29, *a*, *b* et *c*).

Si par contre, le dipôle ne comporte pas de F.E.M., ni de source de courant on l'appelle passif. Dans ce cas, ou bien on ne marque rien dans ce rectangle, ou bien on y fait figurer la lettre P (première lettre du mot passif, voir fig. 29, *d*).

§ 23. **Remplacement d'un dipôle actif par un générateur équivalent. Méthode de marche à vide et de court-circuit.** Par rapport à la branche isolée et pour les besoins du calcul, un dipôle peut être remplacé par un générateur équivalent, dont la F.E.M. est égale à la tension à vide aux bornes de la branche isolée et dont la résistance interne est égale à la résistance d'entrée du dipôle.

Cette considération est utilisée dans la méthode de calcul des circuits électriques, appelée soit méthode de marche à vide et de court-circuit, soit méthode de générateur équivalent, soit méthode de dipôle actif.

Soit un circuit quelconque, si compliqué soit-il, on demande de calculer le courant dans l'une de ses branches. Plaçons mentalement la totalité du circuit, comprenant des F.E.M. et des résistances, dans un rectangle, en laissant dehors uniquement la branche *ab*, dont on a besoin de déterminer le courant I (fig. 29, *a*). La lettre A, figurant dans le rectangle, indique que ce dernier comporte une F.E.M. (un dipôle actif).

Naturellement, le courant I reste sans changement, si on intercale dans la branche *ab* deux F.E.M., E_1 et E_2 (fig. 29, *b*), égales et de sens opposés. Alors, conformément au principe de superposition, le courant peut être représenté sous forme de somme de deux courants I' et I''

$$I = I' + I''.$$

Nous désignons par le courant I' le courant dû à la F.E.M. E_1 et à toutes les F.E.M. du dipôle actif, contenues dans le rectangle, tandis que le courant I'' n'est dû uniquement qu'à la F.E.M. E_2. Ceci étant, pour trouver les courants I' et I'', utilisons les circuits des fig. 29, *c* et *d*. La lettre P, figurant dans le rectangle du circuit de la fig. 29, *d* indique que le dipôle correspondant à ce circuit est passif, c'est-à-dire qu'il n'y existe pas de F.E.M., mais que les résistances internes des sources y ont été laissées.

La F.E.M. E_1 est dirigée en opposition à la tension U_{ab}. Suivant la loi d'Ohm pour un tronçon de circuit comprenant une F.E.M.

$$I' = \frac{U_{ab} - E_1}{R}.$$

Choisissons E_1 de manière que le courant I' soit nul. L'absence de courant dans la branche *ab* équivaut à l'ouverture de cette dernière (à la marche à vide). Désignons la tension aux bornes *ab* en marche à vide (*mv*) par U_{abmv}.

Par conséquent, si on prend E_1 égal à U_{abmv}, I' est nul. Du fait que $I = I' + I''$ et $I' = 0$, on a $I = I''$. Mais le courant I'' conformément au schéma de la fig. 29, *d* est calculé comme suit:

$$I'' = \frac{E_2}{R + R_{ent}} = \frac{U_{abmv}}{R + R_{ent}}. \qquad \text{(a)}$$

Ici R_{ent} — résistance d'entrée du dipôle par rapport aux bornes *ab*; R — résistance de la branche *ab*.

L'équation (a) correspond au schéma équvalent de la fig. 30. Dans ce schéma on a remplacé le dipôle par la source de F.E.M. $U_{abmv} = E_2$ et la résistance R_{ent}.

L'ensemble de la F.E.M. $E_2 = U_{abmv}$ et de la résistance R_{ent} peut être considéré comme *un générateur équivalent* (dont la résistance interne est R_{ent} et dont U_{abmv} est la F.E.M.).

Ainsi par rapport à la branche isolée (la branche *ab* de la fig. 29, *a*) toute la partie restante du schéma peut être remplacée par un générateur équivalent, dont les paramètres ont les valeurs indiquées ci-dessus.

La méthode de calcul du courant dans une branche isolée, basée sur la substitution au dipôle actif d'un générateur équivalent est appelée *méthode de générateur équivalent, méthode de dipôle actif ou méthode de marche à vide et de court-circuit.*

Par la suite nous utiliserons habituellement cette dernière dénomination.

Il est recommandé d'effectuer le calcul du courant par cette méthode dans l'ordre suivant:

a) trouver la tension aux bornes de la branche ouverte ab;

b) calculer la résistance d'entrée R_{ent} de l'ensemble du circuit par rapport aux bornes ab, les sources de F.E.M. étant court-circuitées *;

c) calculer le courant à l'aide de l'équation

$$I = \frac{U_{abmv}}{R + R_{ent}} . \qquad (1.38)$$

Si on suppose que la résistance de la branche ab soit nulle ($R = 0$), cette branche se trouve en régime de court-circuit et le courant qui y circule est le courant de court-circuit (I_{cc}). Il découle de (1.38) pour $R = 0$ que

$$I_{cc} = \frac{U_{abmv}}{R_{ent}} \qquad (1.39)$$

ou

$$R_{ent} = \frac{U_{abmv}}{I_{cc}} . \qquad (1.40)$$

Fig. 30

Il découle de l'équation (1.40) une méthode simple de détermination expérimentale de la résistance d'entrée. Pour cela il faut mesurer la tension en marche à vide aux bornes de la branche ouverte (U_{abmv}), le courant de court-circuit (I_{cc}) en court-circuitant cette branche et calculer ensuite R_{ent} comme quotient de la division de U_{abmv} par I_{cc}.

L'appellation de cette méthode — méthode de marche à vide et de court-circuit — provient de l'utilisation dans cette méthode pour le calcul de U_{abmv} du courant de marche à vide dans la branche ab et pour celui de la résistance d'entrée du dipôle de la mise en court-ciruit de la même branche ab.

Exemple 15. Calculer le courant dans la diagonale ab du pont de la fig. 31, *a* en supposant que $R_1 = R_4 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_5 = 2\Omega$, $E_1 = 10$ V.

Solution. Ouvrons la branche ab (voir fig. 31, *b*) et calculons la tension de marche à vide

$$\varphi_a = \varphi_b + I_2R_2 - I_1R_1 = \varphi_b + \frac{E_1R_2}{R_2+R_4} - \frac{E_1R_1}{R_1+R_3} = \varphi_b + E_1\left(\frac{R_2}{R_2+R_4} - \frac{R_1}{R_1+R_3}\right)$$

* Si parmi les sources d'alimentation du circuit il existe également des sources de courant, il faut en calculant la résistance d'entrée de l'ensemble du circuit par rapport aux bornes ab, considérer les branches à sources de courant comme ouvertes. Pour le comprendre, il suffit de se rappeler que la résistance interne des sources de courant est égale à l'infini (§ 2).

ou

$$U_{abmv}=\varphi_a-\varphi_b=E_1\left(\frac{R_2}{R_2+R_4}-\frac{R_1}{R_1+R_3}\right)=10\left(\frac{4}{4+1}-\frac{1}{1+2}\right)=4,67\ V.$$

Calculons ensuite la résistance d'entrée de l'ensemble du circuit par rapport aux bornes ab, la source de F.E.M. étant court-circuitée (fig. 31, c).

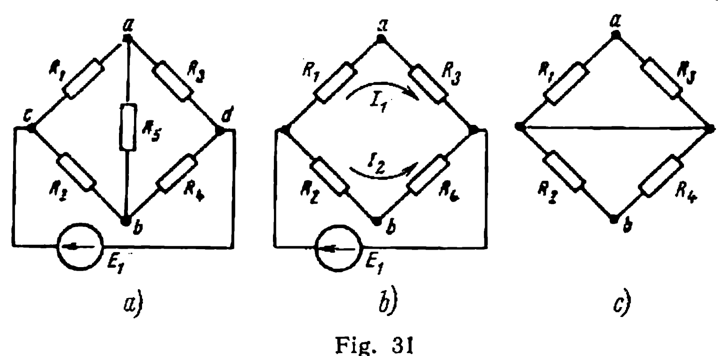


Fig. 31

Les points c et d du schéma étant court-circuités, on a :

$$R_{ent}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}=\frac{1\cdot 2}{1+2}+\frac{4\cdot 1}{4+1}=1,47\Omega.$$

Calculons le courant dans cette branche à l'aide de l'expression (1.38)

$$I=\frac{U_{abmv}}{R_5+R_{ent}}=\frac{4,67}{2+1,47}=1,346\ A.$$

§ 24. Transport d'énergie d'un dipôle actif à la charge. Si la charge R est branchée à un dipôle actif (fig. 29, a) elle se trouve parcourue par le courant $I=\frac{U_{abmv}}{R+R_{ent}}$ et la puissance suivante y est dégagée:

$$P=I^2R=\frac{U_{abmv}^2}{(R+R_{ent})^2}R. \qquad (1.41)$$

Cherchons quelle doit être la relation entre la résistance de la charge R et la résistance d'entrée du dipôle R_{ent}, pour que la puissance dégagée dans la charge soit maximale ; calculons la valeur de cette puissance et le rendement du transport dans ces conditions. Pour cela trouvons la dérivée première de P par rapport à R et écrivons qu'elle est nulle

$$\frac{dP}{dR}=\frac{(R+R_{ent})^2-2R\,(R+R_{ent})}{(R+R_{ent})^4}=0$$

d'où

$$R=R_{ent}. \qquad (1.42)$$

Il n'est pas difficile non plus de trouver la dérivée seconde et de s'assurer qu'elle est négative $\left(\frac{d^2P}{dR^2}<0\right)$, et que par conséquent l'expression (1.42) correspond au maximum de la fonction $P=f\,(R)$.

Substituons dans (1.41) à R sa valeur (1.42) et calculons la puissance maximale pouvant être dégagée dans la charge R

$$P_{max} = \frac{U_{abmv}^2}{4R_{ent}}. \tag{1.43}$$

La puissance utile dissipée dans la charge est calculée à l'aide de l'équation (1.41). La puissance totale fournie par un générateur équivalent est

$$P_{tot} = U_{abmv}\, I = \frac{U_{abmv}^2}{R_{ent}+R}.$$

Le rendement

$$\eta = \frac{P}{P_{tot}} = \frac{R}{R+R_{ent}}. \tag{1.44}$$

Si $R = R_{ent}$, $\eta = 0{,}5$

Si la puissance P est grande, il est absolument inadmissible de travailler avec un rendement aussi médiocre, que 0,5. Mais si la puissance P est faible, de l'ordre de quelques milliwatts seulement (c'est une puissance de cet ordre qui est fournie par divers capteurs des dispositifs automatiques), on peut passer outre un rendement aussi bas, puisque c'est en ce régime que le capteur fournit à la charge la puissance maximale possible. En conférant à la résistance de la charge R, une valeur égale à la résistance d'entrée R_{ent} d'un dipôle actif on *adapte la charge* à ce dipôle.

E x e m p l e 16. Trouver la valeur de résistance R_5 du schéma de la fig. 31, *a*, pour que la puissance qui y est dégagée ait une valeur maximale et calculer la valeur de cette puissance.

S o l u t i o n. En vertu de la condition (1.42)

$$R_5 = R_{ent} = 1{,}47\Omega$$

et

$$P_{max} = \frac{U_{abmv}^2}{4R_{ent}} = \frac{4{,}67^2}{4\cdot 1{,}47} = 3{,}71\ W.$$

§ 25. Transport de l'énergie par une ligne de transport. Le schéma d'une ligne de transport d'énergie électrique est représenté sur la fig. 32. Sur ce schéma U_1 — tension aux bornes du générateur placé au commencement de la ligne; U_2 — tension aux bornes de la charge R_2; R — résistance des conducteurs de la ligne; R_2 — résistance de la charge se trouvant à l'extrémité de la ligne.

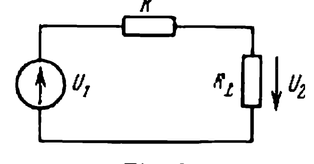


Fig. 32

En cas de transport de grandes puissances (de plusieurs dizaines de mégawatts, par exemple) dans les lignes de transport réelles le rendement est pratiquement égal à 0,94—0,97 et U_2 n'est que de quelques pour-cent inférieur à U_1.

Si on utilise une ligne de transport à résistance R pour transmettre à la charge une puissance P_2, le rendement de la ligne de transport est

d'autant plus grand, que la tension U_1 à l'origine de la ligne est élevée. On peut s'en assurer en vertu des considérations suivantes: une diminution de U_1 entraîne celle de U_2; à son tour, une diminution de U_2, P_2 restant constante, donne lieu à une diminution de R_2 puisque $R_2 = \left(\frac{U_2^2}{P_2}\right)$; la diminution de R_2 pour R = const entraîne une baisse de rendement, puisque $\eta = \frac{R_2}{R+R_2}$.

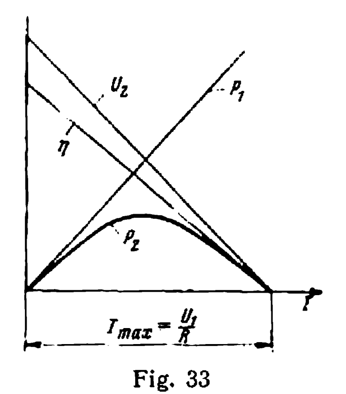


Fig. 33

Le caractère de la variation en fonction du courant dans la ligne, de la puissance P_1 au commencement de la ligne, de la puissance P_2 dissipée dans la charge, du rendement η et de la tension U_2 aux bornes de la charge pour une tension constante U_1 à l'origine de la ligne et une résistance invariable R des conducteurs de cette ligne est illustré par les courbes de la fig. 33. On porte en abscisses de cette figure le courant I et les valeurs de P_1, P_2, U_2, η sont portées en ordonnées.

La valeur maximale du courant $I_{max} = \frac{U_1}{R}$ a lieu pour un court-circuit dans la charge. Les courbes sont construites à l'aide des équations

$$P_1 = U_1 I ;$$
$$P_2 = U_1 I - I^2 R ;$$
$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{RI}{U_1} ;$$
$$U_2 = U_1 - RI.$$

CHAPITRE II

CIRCUITS ÉLECTRIQUES NON LINÉAIRES À COURANT CONTINU

§ 26. Définitions fondamentales. Comme nous l'avons déjà indiqué au § 1, on entend par circuits électriques non linéaires les circuits électriques comprenant des éléments non linéaires. Les éléments non linéaires peuvent être constitués par des résistances, inductances et capacités non linéaires.

Les résistances non linéaires (RN) contrairement aux résistances linéaires ont des caractéristiques courant-tension non linéaires. Rappelons que la caractéristique courant-tension est la valeur du courant, circulant dans une résistance non linéaire en fonction de la tension aux bornes de cette résistance. Les résistances non linéaires peuvent être réparties en deux groupes importants: groupe de RN contrôlables et groupe de RN non contrôlables. Il existe en général dans les RN contrôlables, contrairement à ce qui se passe dans les résistances non contrôlables, en plus du circuit principal au moins un circuit auxiliaire ou de commande; en agissant sur le courant ou la tension dans ce dernier on peut déformer la caractéristique courant-tension du circuit principal. Dans les RN non contrôlables, cette caractéristique est représentée par une seule courbe et dans les RN contrôlables par une famille de courbes.

Le groupe de RN non contrôlables comprend: lampes à incandescence, arc électrique, baretter, valves à atmosphère gazeuse (gazotrons), tube stabilovolt, résistance à thyrite et à vilite, redresseurs à semi-conducteurs (diodes) et certaines autres encore.

Font partie du groupe de RN contrôlables les tubes à trois électrodes (et plus) et les redresseurs à semi-conducteurs à trois électrodes (et plus) (triodes).

§ 27. Caractéristiques courant-tension des résistances non linéaires. Sur la fig. 34 nous avons représenté onze types de caractéristiques courant-tension des RN non contrôlables, qu'on rencontre le plus souvent.

La caractéristique courant-tension type *a* de la fig. 34 est celle, par exemple, des lampes à incandescence à filament métallique. Lorsque le courant circulant dans ce filament croît ce dernier chauffe davantage et sa résistance augmente.

Si on appelle x la valeur portée en abscisses et $f(x)$ celle portée en ordonnées, la caractéristique du type « *a* » satisfait à l'équation:

$$f(x) = -f(-x).$$

Les résistances non linéaires, pour lesquelles cette condition est satisfaite, sont appelées résistances non linéaires à caractéristique courant-tension symétrique.

La caractéristique type *b* de la fig. 34 est celle des résistances à thyrite et à vilite, de certains types de thermistors (thermistances) et des lampes à filament de carbone.

La thyrite et la vilite sont fabriquées à base de graphite finement pulvérisé et de carborundum. Après un traitement approprié, la masse obtenue est moulée en forme de galettes et frittée ensuite. Les RN en vilite et en thyrite sont utilisées dans les circuits ponts non linéaires des dispositifs automatiques, employés par exemple comme indicateurs d'écarts de la tension aux bornes des générateurs, par rapport à sa valeur nominale. Elles sont largement employées dans les dispositifs de pro-

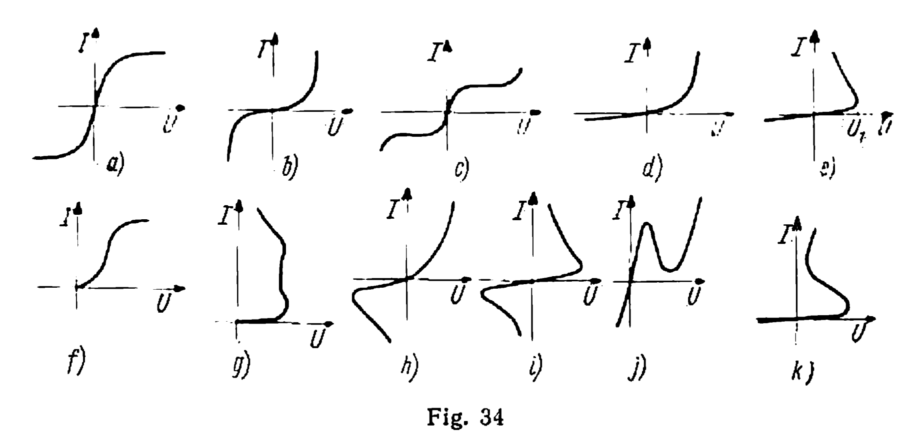


Fig. 34

tection des transports d'énergie à haute tension. Dans les résistances de ce groupe la valeur de la résistance diminue lorsque le courant qui y circule augmente. Leur caractéristique est symétrique.

La caractéristique courant-tension du type *c*, de la fig. 34, est celle, par exemple, d'un dispositif appelé barretter. Le barretter est exécuté habituellement sous forme d'une spirale en fil d'acier, placée dans une ampoule en verre remplie d'hydrogène sous une pression de l'ordre de 80 *mm* de *Hg*. Dans une certaine plage de variations du courant, la caractéristique courant-tension d'un barretter est pratiquement horizontale. Le barretter est utilisé pour stabiliser le courant de chauffage des tubes électroniques lorsque leur tension d'alimentation varie. La caractéristique courant-tension de ce type est également symétrique.

La caractéristique courant-tension, représentée sur la fig. 34, *d* diffère des précédentes par le fait qu'elle est asymétrique. C'est la caractéristique des redresseurs à semi-conducteurs (à oxyde de cuivre, au sélénium, au silicium, au germanium), très largement utilisés pour convertir le courant alternatif en courant continu. Pratiquement ils ne laissent passer le courant que dans un seul sens, appelé sens conducteur. Ces redresseurs sont également très employés dans différents capteurs et traducteurs des dispositifs de l'automatique. La caractéristique courant-tension du type de la fig. 34, *e* est celle d'un arc électrique à électrodes de nature différente, d'un gazotron et de certains types de thermistances. Lorsque la tension augmente à partir de zéro, le courant commence par croître, mais reste très faible ; quand on a atteint une certaine tension

U_1 (tension d'amorçage) on constate une augmentation brusque du courant dans le circuit et une baisse de tension aux bornes de l'arc ou du gazotron. Dans la partie supérieure de la caractéristique l'accroissement du courant entraîne une baisse de tension aux bornes de la résistance non linéaire.

Le tronçon de la caractéristique courant-tension similaire à la partie supérieure de la courbe de la fig. 34, *e* est appelée *tronçon tombant de la caractéristique courant-tension* *.

L'arc électrique est largement utilisé pour le soudage des métaux, en électrothermie (dans les fours à arc) ainsi que comme source puissante d'éclairage électrique, dans les phares par exemple.

Le gazotron est une lampe à deux électrodes, rempli de gaz noble ou de vapeurs de mercure.

La caractéristique courant-tension du type de la fig. 34, *f* est celle d'un tube redresseur à deux électrodes, appelé kénotron. On fait circuler un courant dans le filament de chauffage de ce tube. Ce courant chauffe la cathode (l'une des deux électrodes du tube) et la porte à une température élevée, à la suite de quoi une émission thermionique s'amorce à partir de la surface de la cathode. Sous l'effet du champ électrique, le flux d'électrons est dirigé vers la deuxième électrode, froide celle-ci, appelée anode. Dans la partie initiale de la caractéristique courant-tension de la fig. 34, *f* le courant varie en fonction de la tension suivant la loi « trois demies »: $i = au^{3/2}$. La caractéristique du kénotron est asymétrique ; ceci s'explique par le fait que le flux d'électrons est dirigé de la cathode vers l'anode seulement si cette dernière est portée à un potentiel positif par rapport à la cathode.

La caractéristique courant-tension du type de la fig. 34, *g* est celle des lampes à charge luminescente. Parmi celles-ci on peut mentionner les stabilisateurs de tension (stabilovolts) et les lampes au néon. Au cours d'une telle décharge, le gaz noble, dont ces lampes sont remplies (néon, argon, etc.), devient luminescent. La caractéristique de ce type a également ceci de particulier que, dans une certaine plage des valeurs des courants, la tension aux bornes de la lampe reste pratiquement constante.

Certains types des redresseurs au germanium et au silicium à contact ont une caractéristique courant-tension du type de la fig. 34, *h*.

L'arc électrique, amorcée entre deux électrodes en matière identique et se trouvant dans les mêmes conditions, a une caractéristique courant-tension du type de la fig. 34, *i*.

La caractéristique courant-tension d'une diode au germanium (au silicium) à trijonction, appelée trinistor est représentée sur la fig. 34, *j*.

La caractéristique courant-tension d'une diode à tunnel est représentée sur la fig. 34, *k*.

---

* Le tronçon tombant d'une caractéristique courant-tension est le tronçon de cette caractéristique pour lequel un accroissement du courant, circulant dans la résistance non linéaire, donne lieu à une diminution de la tension aux bornes de cette résistance.

On emploi largement comme résistances non linéaires contrôlables des triodes à cristaux et des tubes électroniques à trois électrodes.

Les triodes à cristaux, leurs caractéristiques et leur utilisation sont décrites dans le chapitre 9 de ce cours.

Les caractéristiques courant-tension d'un tube électronique à trois électrodes sont examinées au § 41.

§ 28. Généralités sur les méthodes de calcul des circuits électriques non linéaires à courant continu. Nous examinons dans la première partie de ce cours les méthodes de calcul des circuits électriques non linéaires les plus simples, constitués par des résistances non linéaires et des sources de F.E.M. couplées en série, en parallèle et en série-parallèle. En outre y sont examinées également les méthodes de calcul des circuits, même les plus compliqués, mais qui ne comprennent qu'une seule RN (ou des circuits pouvant être réduits à des circuits de ce type).

Les calculs des circuits encore plus compliqués ne seront pas discutés dans ce cours.

Il y a lieu de signaler ici qu'on peut effectuer avec la partie linéaire d'un circuit compliqué ramifié, quel qu'il soit, à résistances non linéaires, toutes les transformations décrites au premier chapitre. Evidemment, on ne doit avoir recours à ces transformations que si elles sont de nature à faciliter le calcul du circuit compliqué dans son ensemble.

L'utilisation d'une de ces transformations, à savoir du passage du triangle à l'étoile, employée pour trouver la résistance d'entrée de la partie linéaire du circuit est donnée au § 34.

Parmi les méthodes de calcul examinées dans le premier chapitre, nous utilisons dans le chapitre présent les méthodes suivantes, applicables aux circuits non linéaires:

méthode de deux nœuds;

remplacement de plusieurs branches couplées en parallèle par une seule branche équivalente;

méthode de marche à vide et de court-circuit.

Avant d'aborder le calcul des circuits non linéaires on doit établir les caractéristiques courant-tension de toutes les résistances non linéaires faisant partie de ce circuit. Le calcul des circuits non linéaires à courant continu est effectué habituellement par le procédé graphique.

§ 29. Circuits électriques à couplage en série des résistances non linéaires. La fig. 35, *a* représente un circuit comprenant une résistance non linéaire à caractéristique courant-tension connue couplée en série avec une résistance linéaire R. Le circuit comprend en outre une source de F.E.M. E. On demande de calculer le courant dans ce circuit. La caractéristique de la résistance non linéaire est désignée sur les figures par $i = f(U_{RN})$ et la caractéristique de la résistance linéaire est une droite. La caractéristique courant-tension de l'ensemble du circuit, c'est-à-dire le courant dans ce circuit en fonction de chutes de tension aux bornes des résistances RN et R est désigné par $i = f(U_{RN} + U_R)$. Le calcul est basé sur les lois de Kirchhoff. Examinons deux méthodes de calcul différentes. La première d'entre elles est illustrée par la fig. 35, *b* et la seconde par la fig. 35, *c*.

Dans la première de ces méthodes on commence par construire la caractéristique résultante de l'ensemble de la partie passive du circuit, en partant du fait que les résistances RN et R couplées en série sont parcourues par le même courant. Pour la construire, prenons un courant quelconque, traçons une ligne horizontale pour l'intensité choisie et faisons la somme de la tension aux bornes de la résistance non linéaire (tronçon *mn* sur la fig. 35, *b*) et de celle aux bornes de R (tronçon *mp*) :

$$\overline{mn}+\overline{mp}=\overline{mq}\,*.$$

Le point q est situé sur la caractéristique résultante courant-tension de l'ensemble du circuit. Les autres points de cette caractéristique sont

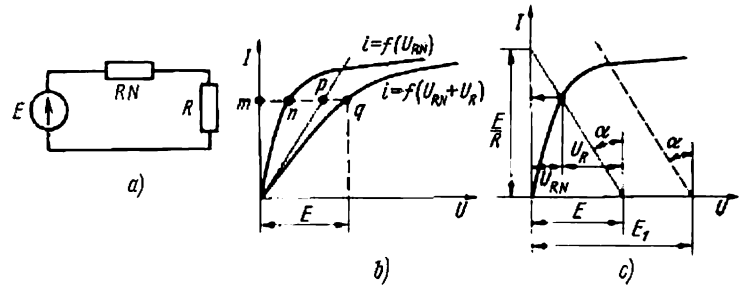


Fig. 35

construits d'une manière identique. Le courant dans le circuit pour une F.E.M. E de valeur donnée est calculé par le procédé graphique à l'aide de la caractéristique courant-tension résultante (fig. 35, *b*). A cette fin il faut porter la valeur de la F.E.M. E donnée, en abscisses et à partir du point ainsi obtenu, élever une verticale jusqu'à ce qu'elle coupe la caractéristique résultante au point q. L'ordonnée du point q est égale au courant cherché.

Lorsqu'on calcule un circuit à l'aide de la deuxième méthode, on peut se dispenser de construire la caractéristique résultante de l'ensemble de sa partie passive. Dans cette méthode, en partant du point $i = 0$, $U = E$, il faut tracer vers le point

$$I=\frac{E}{R}, \quad U=0$$

la drolte

$$I=\frac{U_R}{R}=f(U_R)$$

comme ceci est indiqué sur la fig. 35, *c*. La tangente de l'angle α de la pente de cette droite par rapport à la verticale est égale à R, compte tenu des graduations des deux axes. Le point d'intersection de la droite ainsi construite avec la caractéristique de RN donne le courant cherché. En effet, pour ce point le courant circulant dans RN et dans R est le

* La barre au-dessus d'un tronçon indique qu'il s'agit de la longueur de ce tronçon.

même, et la somme des chutes de tension $U_{RN} + U_R = E$. Lorsque la valeur de la F.E.M. varie de E à E_1, il faut déplacer la droite $I = f(U_R)$ parallèlement à elle-même de manière qu'elle parte du point $I = 0$, $U = E_1$ (droite en pointillé sur la fig. 35, *c*).

Les circuits comprenant deux résistances non linéaires et plus, couplées en série, sont calculés d'une manière identique. Dans ce cas, il faut commencer par trouver la caractéristique courant-tension pour deux RN, ensuite pour trois, etc.

Examinons l'application de la deuxième méthode au calcul du circuit de la fig. 36, *a* comprenant deux RN différentes. Les caractéristiques

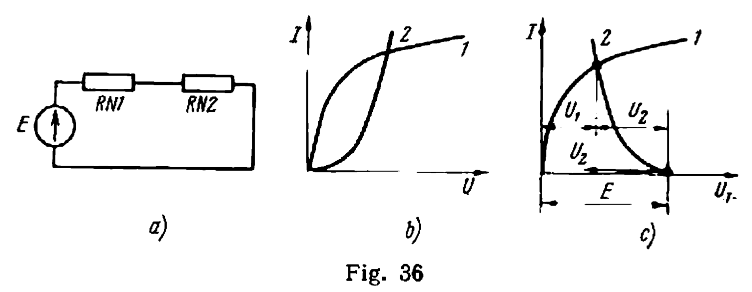


Fig. 36

de RN1 et RN2 sont représentées sur la fig. 36, *b*. La caractéristique de RN2 étant non linéaire, il faut construire la fonction non linéaire $I = f(U_{RN2})$ à la place de la droite $I = f(U_R)$, comme ceci a été fait sur la fig. 35, *c*. L'origine de cette caractéristique (fig. 36, *c*) est située au point $I = 0$, $U_1 = E$. Les valeurs positives de U_{RN2} * se portent à gauche à partir de ce point. Du fait que les valeurs positives de U_{RN2} sur la fig. 36, *b* ont été portées à droite de l'origine des coordonées et qu'elles étaient portées à gauche sur la fig. 36, *c*, la courbe $I = f(U_{RN2})$ de la fig. 36, *c* est la représentation symétrique de la courbe *2* de la fig. 36, *b* par rapport à un axe vertical tracé à partir du point $U_1 = E$.

§ 30. Caractéristique courant-tension d'un couplage en parallèle des résistances non linéaires. Le schéma de couplage en parallèle de deux RN est représenté sur la fig. 37, *a* et les caractéristiques de ces résistances sont données sur la fig. 37, *b*. Construisons la caractéristique courant-tension résultante, en utilisant l'égalité des tensions aux bornes des résistances RN1 et RN2, couplées en parallèle et le fait que le courant I dans la partie commune du schéma est égal à la somme des courants I_1 et I_2:

$$I = I_1 + I_2.$$

La courbe *3* de la fig. 37, *b* représente la caractéristique courant-tension des deux résistances couplées en parallèle. Pour la construire procédons de la manière suivante. Partons d'une tension arbitraire U, égale par exemple au tronçon *Om*. Traçons une verticale en partant au point *m*. Ajoutons au tronçon *mn* égal au courant dans RN2, le tronçon *mp*, égal

* Sur la fig. 36, *c* U_{RN2} est désigné par U_2.

au courant dans RN1, et écrivons

$$\overline{mq} = \overline{mn} + \overline{mp}.$$

Le tronçon $\overline{mq}$ est égal au courant dans la partie non ramifiée du circuit pour une tension $0m$. Tous les autres points de la caractéristique courant-tension résultante d'un couplage en parallèle sont déterminés d'une manière analogue.

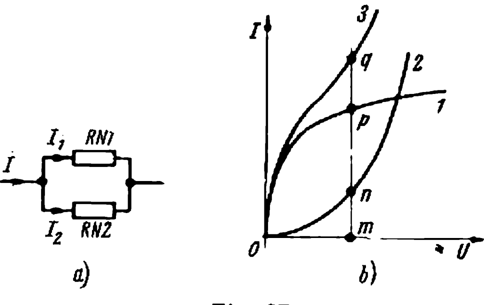


Fig. 37

§ 31. Couplage en série-parallèle des résistances non linéaires. Le schéma de couplage en série d'une résistance non linéaire RN3 et de deux résistances RN1 et RN2, couplées en parallèle, est représenté sur la fig. 38. On demande de trouver les courants dans toutes les branches de ce schéma. Les caractéristiques courant-tension de ces résistances

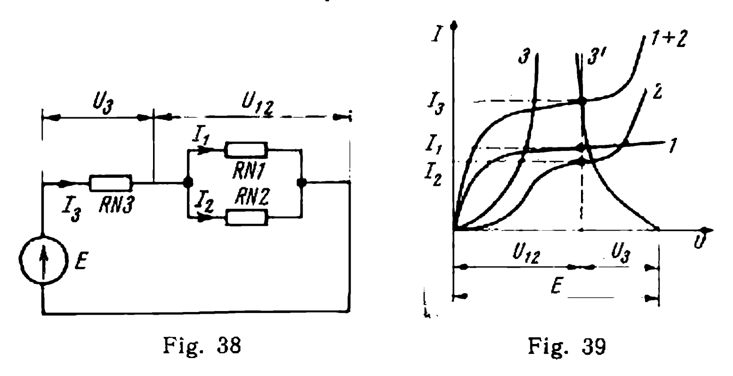


Fig. 38 Fig. 39

non linéaires (courbes *1*, *2*, *3* de la fig. 39) et la F.E.M. E sont données. Commençons par construire la caractéristique courant-tension des deux résistances couplées en parallèle, conformément aux indications du paragraphe précédent. Elle est représentée par la courbe $(1+2)$ sur la fig. 39. De ce fait le circuit se trouve réduit au couplage en série de RN3 et d'une résistance RN, dont la caractéristique courant-tension est $(1+2)$.

Employons la deuxième méthode de construction décrite au § 29. La courbe *3'* de la fig. 39 est la caractéristique courant-tension de RN3,

tracée symétriquement par rapport à la verticale partant du point $U=E$. La deuxième loi de Kirchhoff $U_3 + U_{12} = E$ se trouve satisfaite au point d'intersection de la courbe *3'* et de la courbe (*1* + *2*). La somme des courants I_1 et I_2 est égale au courant I_3.

§ 32. Application de la méthode de deux nœuds au calcul de circuits à résistances non linéaires. Pour les circuits ne comprenant que deux nœuds, ou pouvant être réduits à ces derniers, on utilise largement la méthode de deux nœuds. Examinons cette méthode sur l'exemple du

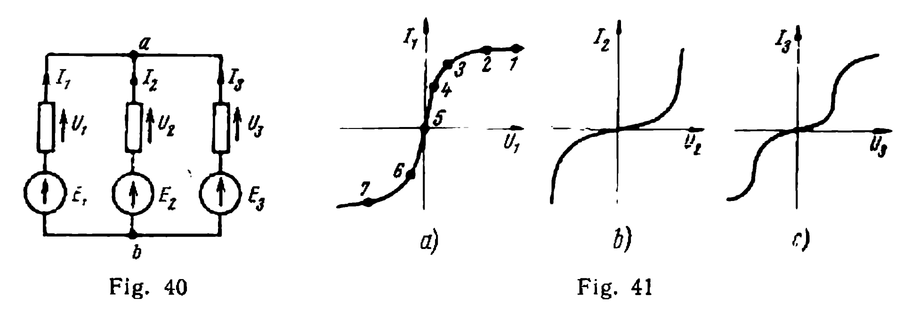


Fig. 40

Fig. 41

schéma de la fig. 40. Ce schéma comprend trois RN et trois F.E.M. Supposons que les caractéristiques de ces RN soient représentées par les courbes *a*, *b* et *c* de la fig. 41. Pour fixer les idées, supposons que $E_1 > E_2 > E_3$. Attribuons un sens positif aux courants. Admettons, par exemple, que tous les courants soient dirigés vers le nœud *a*. Alors, d'après la première loi de Kirchhoff:

$$I_1+I_2+I_3=0. \tag{2.1}$$

Chacun de ces courants est une fonction non linéaire de la chute de tension aux bornes de sa « propre » résistance non linéaire. Ainsi I_1 — fonction de U_1, I_2 — fonction de U_2 et I_3 — fonction de U_3.

Cherchons à représenter tous les courants en fonction non point de trois variables différentes (U_1, U_2, U_3) mais d'une seule variable, à savoir de la tension U_{ab} entre les deux nœuds. Ceci est possible, puisque

$$U_1=E_1-U_{ab}; \tag{2.2}$$

$$U_2=E_2-U_{ab}; \tag{2.3}$$

$$U_3=E_3-U_{ab}. \tag{2.4}$$

Nous devons maintenant transformer la courbe $I_1 = f(U_1)$ en courbe $I_1 = f(U_{ab})$, la courbe $I_2 = f(U_2)$ en courbe $I_2 = f(U_{ab})$, etc. Commençons par reconstruire la courbe $I_1 = f(U_1)$ (fig. 41, *a*) pour obtenir la courbe $I_1 = f(U_{ab})$ (fig. 42). Désignons les points correspondants par les mêmes chiffres.

Pour le point *5*, $I_1 = 0$ et $U_1 = 0$; en outre, $U_{ab} = E_1$ (voir l'expression 2.2). En d'autres termes, l'origine de la courbe $I_1 = f(U_{ab})$ s'est déplacée au point $U_{ab} = E_1$.

Une augmentation de U_1 (pour $U_1 > 0$) correspond à une diminution de U_{ab}. Pour le point *2*, pour $U_1 = E_1$, $U_{ab} = 0$. Une augmentation de U_1 (pour $U_1 < 0$) correspond à une augmentation de U_{ab}, et en outre $U_{ab} > E_1$.

En partant des considérations ci-dessus et des constructions de la fig. 42 il est recommandé d'effectuer cette transformation de la manière suivante:

1. Déplacer la courbe $I_1 = f(U_1)$ parallèlement à elle-même de manière que son origine se trouve au point $U_{ab} = E_1$. La courbe obtenue par cette translation est représentée en pointillé sur la fig. 42.

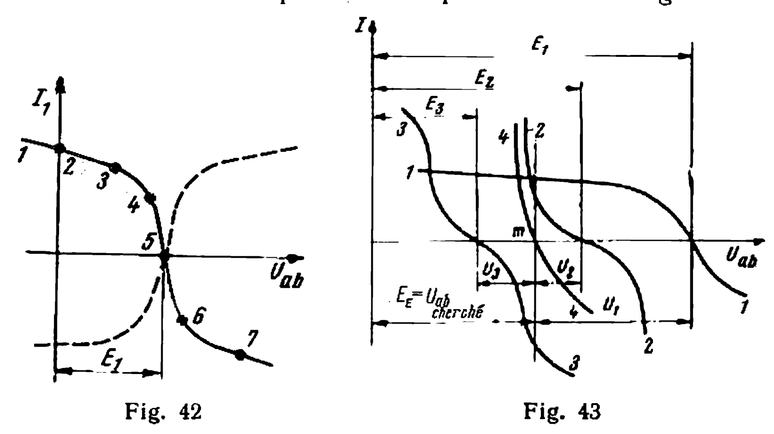


Fig. 42 Fig. 43

2. Dresser une verticale à partir du point $U_{ab} = E_1$, et par rapport à cette verticale, tracer une courbe symétrique à la courbe en pointillé.

La reconstruction des courbes pour les autres branches du circuit se fait d'une manière analogue. Traçons les courbes $I_1 = f(U_{ab})$, $I_2 = f(U_{ab})$ et $I_3 = f(U_{ab})$ sur le même schéma (sur la fig. 43 ces courbes sont désignées par les chiffres *1*, *2* et *3*) et construisons la courbe $I_1 + I_2 + I_3 = f(U_{ab})$ (désignée par le chiffre *4* sur la fig. 43), en additionnant les ordonnées des courbes *1*, *2*, *3*. Le point *m* d'intersection de la courbe *4* avec l'axe des abscisses donne la valeur de U_{ab}, pour laquelle l'équation (2.1) est satisfaite. Dressons en ce point une perpendiculaire à l'axe des abscisses. Les ordonnées des points d'intersection de cette perpendiculaire avec les courbes *1*, *2*, *3* donnent respectivement les courants I_1, I_2 et I_3 en grandeur et en signe.

§ 33. Remplacement de plusieurs branches couplées en parallèle et contenant des RN et des F.E.M. par une seule branche équivalente. Examinons la position du problème. Admettons qu'il existe un ensemble de plusieurs branches, couplées en parallèle, comprenant des RN et de F.E.M. (fig. 44). Toutes ces branches couplées en parallèle font partie d'un circuit compliqué, non représenté sur la fig. 44. On demande quelle doit être la F.E.M. et la caractéristique courant-tension d'une RNE (résistance non linéaire équivalente) du tronçon du circuit, représenté sur la fig. 45, pour que ce tronçon soit équivalent aux branches, couplées

en parallèle, de la fig. 44. Pour que la branche de la fig. 45 soit équivalente à l'ensemble des branches de la fig. 44, il faut que le courant I, circulant dans la partie non ramifiée du circuit de la fig. 44 soit égal au courant I, circulant dans la branche équivalente de la fig. 45, quelles que soient les valeurs de la tension U_{ab}.

Utilisons les courbes tracées sur la fig. 43 du paragraphe précédent. La courbe *4* de la fig. 43 représente la fonction

$$I_1+I_2+I_3=f(U_{ab}).$$

En d'autres termes, la courbe *4* n'est que la caractéristique résultante courant-tension de trois branches couplées en parallèle. La branche équivalente, représentée sur la fig. 45, doit avoir une caractéristique

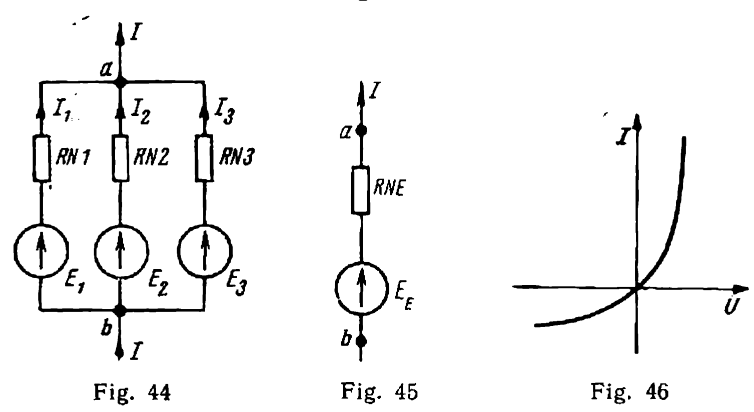


Fig. 44 Fig. 45 Fig. 46

identique. Si le courant I du circuit de la fig. 45 est nul, $U_{ab} = E_e$. Par conséquent, E_e de la fig. 43 dépend de la valeur de la tension U_{ab}, pour laquelle la courbe *4* coupe l'axe des abscisses. Pour calculer les caractéristiques de la résistance non linéaire RNE, il faut tracer la courbe *4* de la fig. 43 symétriquement par rapport à la verticale passant par le point m.

La caractéristique de RNE est représentée sur la fig. 46. Il y a lieu de souligner que par suite de l'insertion des F.E.M. dans les branches couplées en parallèle, la caractéristique courant-tension de RNE est devenue asymétrique, bien que toutes les caractéristiques des résistances non linéaires *1*, *2*, *3* du circuit de la fig. 40 fussent symétriques.

Ainsi, en faisant varier la F.E.M. dans les branches du groupe en parallèle on peut modifier la caractéristique résultante et créer pour ainsi dire artificiellement des RN ayant des caractéristiques courant-tension les plus bizarres.

§ 34. Application de la méthode de marche à vide et de court-circuit au calcul des circuits à résistances non linéaires. Si un circuit électrique compliqué comprend une seule branche à RN, le courant circulant dans cette branche peut être calculé d'après la méthode de marche à vide (*mv*) et de court-circuit (*cc*). Pour cela isolons la branche à résistance

non linéaire et représentons sous forme d'un dipôle actif la partie restante linéaire du circuit (fig. 47, *a*).

Comme il a été dit précédemment (§ 22), le schéma d'un dipôle linéaire actif peut être représenté par rapport aux bornes *a* et *b* de la branche isolée sous forme d'une source de F.E.M., couplée en série avec une F.E.M. égale à la tension (U_{abmv}) aux bornes *ab*, en cas de coupure de la branche et d'une résistance égale à la résistance d'entrée R_{ent}, d'un dipôle linéaire et de la résistance de la branche *ab* (fig. 47, *b*).

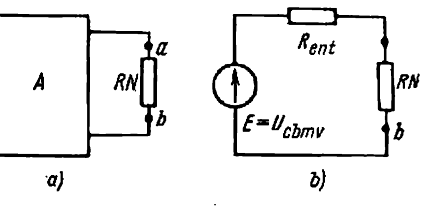


Fig. 47

Le calcul du courant dans le schéma de la fig. 47, *b* ne présente pas de difficulté et peut être effectué conformément au § 29.

Exemple 17. Calculer le courant dans la branche *ab* du schéma de la fig. 48, *a* par la méthode *mv* et *cc* pour $R_1 = R_0 = 2\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 6\Omega$. La caractéristique de RN est représentée sur la fig. 49, *a*; $E = 58,4$ *V*.

Solution. Coupons la branche *ab* et calculons la tension du mouvement à vide

$$U_{abmv} = 8,35\ V.$$

Pour calculer la résistance d'entrée R_{ent} de la partie linéaire du circuit par rapport aux bornes *ab*, il faut transformer le triangle formé par les

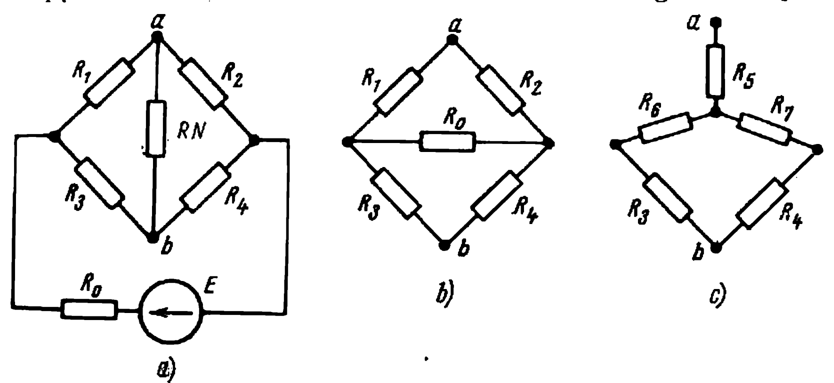


Fig. 48

résistances R_1, R_2, R_0 (ou R_4, R_0, R_3 de la fig. 48, *b*) en une étoile équivalente (48, *c*) en utilisant pour cela les expressions (1.35—1.37):

$$R_5 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_0} = \frac{2\cdot 8}{2+8+2} = 1,333\Omega;\quad R_6 = 0,33\Omega.$$

et

$$R_7 = 1,333\Omega;\quad R_{ent} = R_5 + \frac{(R_6+R_3)(R_7+R_4)}{R_6+R_3+R_7+R_4} = 4,05\Omega.$$

Pour calculer le courant dans la branche ab du schéma de la fig. 48, *a* traçons sur la fig. 49, *a* à partir du point m ($U_{mv} = 8{,}35\ V$) le rayon mn, dont la tangente de l'angle γ de pente par rapport à la verticale est égale à R_{ent} (compte tenu des échelles en abscisses et en ordonnées). Le point n d'intersection du rayon mn avec la caractéristique de la résistance non linéaire détermine le régime de fonctionnement du circuit

$$I = 0{,}22\ A.$$

§ 35. **Résistances statique et différentielle.** Les propriétés d'une résistance non linéaire peuvent être caractérisées soit par sa caractéristi-

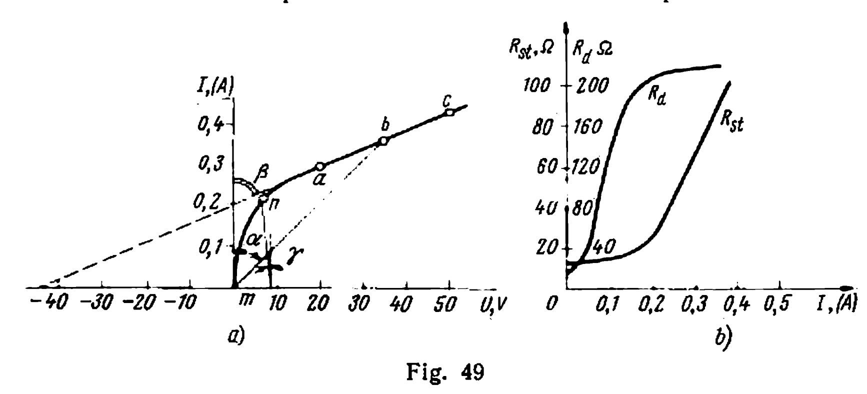


Fig. 49

que courant-tension, soit par les valeurs de ses résistances statique et différentielle en fonction du courant (ou de la tension).

La résistance statique R_{st} est égale au rapport de la tension aux bornes de RN, au courant qui y circule

$$R_{st} = \frac{U}{I}. \tag{2 5}$$

La résistance statique est numériquement égale à la tangente de l'angle α de la fig. 49, *a*.

Lorsqu'on passe d'un point situé sur la caractéristique courant-tension au point voisin, la résistance statique varie. Cette résistance caractérise le comportement de la résistance RN en régime de courant invariable.

On entend par *résistance différentielle* R_d le rapport d'un accroissement petit (théoriquement infiniment petit) de la tension dU aux bornes de RN à l'accroissement correspondant du courant dI

$$R_d = \frac{dU}{dI}. \tag{2.6}$$

La résistance différentielle (appelée jadis résistance dynamique) est numériquement égale à la tangente trigonométrique de l'angle β (fig. 49, *a*) de la pente de la caractéristique au point de fonctionnement et caractérise le comportement de RN pour des écarts suffisamment petits de l'état précédent. En d'autres termes, *l'accroissement* de la ten-

sion aux bornes d'une résistance non linéaire est lié à *l'accroissement* du courant circulant dans cette résistance par l'expression $dU = R_d \, dI$.

Si la caractéristique courant-tension de RN a un tronçon tombant, c'est-à-dire un tronçon pour lequel, à un accroissement de la tension, égal à ΔU, correspond une diminution de courant, égale à ΔI, la tension différentielle dans ce tronçon a une valeur négative; ceci a lieu par exemple, pour un arc électrique (voir la caractéristique de ce dernier sur la fig. 34, *e*).

De deux résistances mentionnées (R_{st} et R_d) c'est là résistance R_d qui est utilisée le plus souvent. Elle est employée par exemple, lors du remplacement d'une RN par une résistance linéaire équivalente et une F.E.M., ainsi que dans l'étude de la stabilité du régime de fonctionnement des circuits non linéaires (voir la deuxième partie de ce cours).

Exemple 18. Construire les courbes R_{st} et R_d en fonction du courant I pour une résistance non linéaire, dont la caractéristique est représentée sur la fig. 49, *a*.

Ces courbes sont représentées sur la fig. 49, *b*.

§ 36. Remplacement d'une résistance non linéaire par une résistance linéaire équivalente et une F.E.M. Si on sait d'avance que la RN ne fonctionne que dans un tronçon déterminé de sa caractéristique et que ce tronçon peut être, avec une précision suffisante, remplacé par une ligne droite on peut alors remplacer la RN, pour les besoins du calcul, par une résistance équivalente linéaire et une source de F.E.M.

Admettons que le point de fonctionnement ne se déplace que dans la région *ab* de la fig. 49, *a* (voir également la fig. 50).

Pour cette région:

$$U = U_0 + I \operatorname{tg} \beta = U_0 + IR_d. \qquad (2.7)$$

L'équation (2.7) est satisfaite pour le tronçon du circuit représenté sur la fig. 51. Pour ce tronçon $E = U_0$ et la résistance non linéaire $R = R_d$.

Le remplacement d'une résistance non linéaire par une résistance linéaire et une F.E.M. a ceci d'attrayant qu'il rend linéaire l'ensemble du circuit et son fonctionnement peut être étudié par les méthodes élaborées pour les circuits linéaires. Toutefois, il faut veiller attentivement à ce que le point de fonctionnement reste sur le tronçon linéaire de la caractéristique.

Exemple 19. Exprimer sous forme analytique le tronçon se trouvant entre les points *a* et *c* de la caractéristique de la fig. 49, *a*.

En partant de la fig. 49, *a* nous trouvons $U_0 = -45$ V et $R_d = \operatorname{tg} \beta = 220\ \Omega$. Par conséquent, $U \approx -45 + 220\ I$.

* * *

Dans un certain nombre de cas les résistances non linéaires peuvent conférer et confèrent effectivement aux circuits électriques des propriétés ne pouvant être obtenues en principe dans les circuits linéaires. Parmi ces propriétés on peut mentionner: stabilisation de courant, stabilisa-

tion de tension, amplification du courant continu, transformation logarithmique et exponentielle des fonctions, etc. Certaines de ces propriétés sont examinées ci-après.

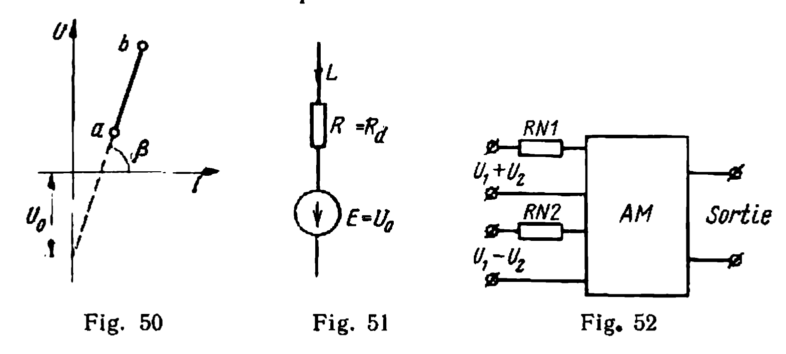


Fig. 50 Fig. 51 Fig. 52

§ 37. **Utilisation des résistances non linéaires pour obtenir le produit de deux fonctions.** Soit U_1 et U_2 deux tensions continues. Chacune d'elles exprime une grandeur physique quelconque. Obtenir une tension proportionnelle au produit de deux grandeurs physiques, exprimées par les tensions U_1 et U_2. Le transducteur le plus simple permettant d'effectuer cette opération (fig. 52) est basé sur l'utilisation des résistances non linéaires à caractéristique courant-tension quadratique de la forme $I = kU^2$ et d'un amplificateur magnétique. La caractéristique quadratique est, par exemple, celle des redresseurs à semi-conducteurs, à oxyde de cuivre. L'amplificateur magnétique est désigné par AM ; (sa théorie sera exposée dans la deuxième partie de ce cours) ; il possède deux enroulements de commande identiques w_{y1} et w_{y2} (non représentés sur le schéma). Leurs résistances sont très faibles par rapport aux résistances de RN1 et de RN2. Par conséquent, on peut avec une très bonne approximation estimer que la tension à l'entrée du premier circuit, égale à $U_1 + U_2$, soit appliquée à RN1, et que la tension à l'entrée du second circuit, $U_1 - U_2$, soit appliquée à RN2. Les caractéristiques de RN1 et RN2 sont identiques. La tension à la sortie de AM est proportionnelle à la F.M.M. résultante de commande. (F.M.M.— force magnétomotrice). Cette dernière est égale à la différence des forces des F.M.M. du premier et du second enroulement de commande:

$$\text{F. M. M}_{res} = I_1 w_{y1} - I_2 w_{y2} = (I_1 - I_2)\, w_y.$$

Mais

$$I_1 = k(U_1 + U_2)^2 = k\,(U_1^2 + 2U_1U_2 + U_2^2)$$

et

$$I_2 = k(U_1 - U_2)^2 = k\,(U_1^2 - 2U_1U_2 + U_2^2)$$

ou

$$\text{F. M. M}_{res} = 4kw_yU_1U_2.$$

Par conséquent, la tension à la sortie de l'amplificateur magnétique est effectivement proportionnelle au produit de U_1 par U_2.

§ 38. **Transducteurs logarithmiques à résistances non linéaires.** Si une résistance non linéaire à caractéristique courant-tension du type de celle représentée sur la fig. 34, *d* — un redresseur au sélénium, par exemple,— est shuntée par une résistance linéaire R (fig. 53) et si on amène à un tel circuit le courant I provenant d'une source extérieure, le courant I_R, dérivé dans la résistance R, est une fonction non linéaire du courant I. Pour de faibles courants la résistance statique RN est

nettement plus grande que la résistance R et, par conséquent, RN ne sera pas pratiquement parcourue par le courant.

Pour des grands courants, la résistance statique de RN devient faible, nettement plus petite que la résistance R, et la partie la plus grande du courant I circulera dans RN.

Le courant I_R est représenté sur la fig. 54 en fonction du courant I. En choisissant la nature convenable de la caractéristique courant-tension

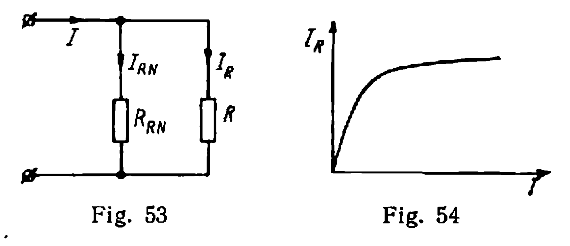


Fig. 53 Fig. 54

de RN et la valeur de la résistance R, utilisée comme shunt, on peut conférer à la fonction $I_R = f(I)$ un caractère quasi logarithmique, et elle aura alors la forme:

$$I_R = a \lg I.$$

Ainsi, la grandeur de sortie du transducteur I_R est proportionnelle au logarithme de la grandeur d'entrée I.

Les transducteurs de cette nature sont largement utilisés comme éléments constitutifs des calculatrices les plus diverses.

§ 39. Stabilisateur de courant. On appelle stabilisateur de courant un dispositif capable de maintenir dans le circuit de charge un courant

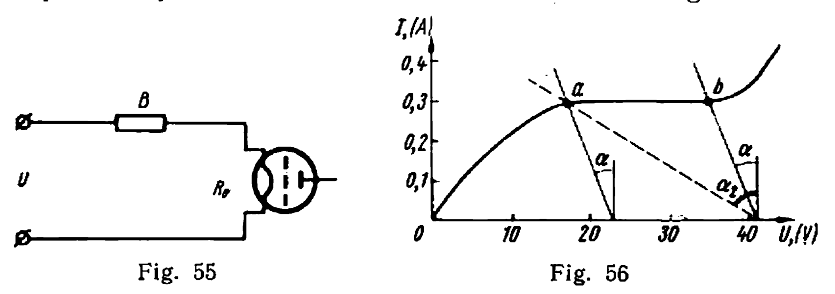


Fig. 55 Fig. 56

invariable, lorsque la résistance de cette charge varie et lorsque la tension à l'entrée de l'ensemble du circuit varie également.

Le courant continu peut être stabilisé à l'aide de différents circuits. Le schéma le plus répandu et en même temps le plus simple d'un stabilisateur de courant est représenté sur la fig. 55. Dans ce circuit la résistance non linéaire B, du type barretter, est intercalée en série avec la charge R_1. La caractéristique d'un barretter type 0,3Б 17-35 est représentée, à titre d'exemple, sur la fig. 56. Le premier chiffre de la désignation donne le courant (en ampères) pouvant être maintenu constant par le barretter et les chiffres 17-35 indiquent la plage de la variation

de tension en volts aux bornes d'un barretter pour le tronçon de la caractéristique, assurant la stabilisation du courant.

Exemple 20. Le barretter type 0,3Б 17-35 est utilisé pour la stabilisation du courant de chauffage d'un tube électronique. Le courant nominal de chauffage est de 0,3 *A* et la tension est de 6 *V*. Chercher les limites de variation de la tension *U* à l'entrée du circuit, entre lesquelles le courant dans le filament de chauffage du tube reste pratiquement invariable et égal à 0,3 *A*.

Solution. Calculons la résistance du filament de chauffage de tube

$$R_l = \frac{6}{0{,}3} = 20\Omega.$$

Traçons par les points *a* et *b* (fig. 56), limitant le tronçon de stabilisation, deux droites faisant un angle α (tg $\alpha = 20\Omega$) avec la verticale. Nous lisons alors sur la fig. 56, que la tension *U* peut varier entre 23 et 41 *V*.

Exemple 21. La résistance R_1 est intercalée en série dans le circuit du problème précédent. En supposant que la tension à l'entrée du circuit reste inchangée et égale à 41 *V*, chercher la valeur maximale de R_1 pour laquelle la stabilisation du courant dans le circuit continuera à être assurée.

Solution. Si $R_1 = 0$ et $U = 41$ *V*, le régime de fonctionnement est caractérisé par la position du point *b* (fig. 56). Lorsque la résistance R_1 augmente, le point de fonctionnement sur la caractéristique se déplace vers le point *a*. Pour le régime aux limites, au point *a*, $R_{1max} + R_l = $ tg $\alpha_2 = 81\Omega$. Par conséquent, $R_{1max} = 80—20 = 60\Omega$.

§ **40. Stabilisateur de tension.** On appelle stabilisateur de tension un dispositif dont la tension de sortie U_c est maintenue constante ou pratiquement constante, lorsque la résistance de charge R_c ou la valeur de la tension U_1 à l'entrée du dispositif varient.

Le stabilisateur de tension le plus simple est réalisé suivant le schéma de la fig. 57. Dans ce schéma on utilise

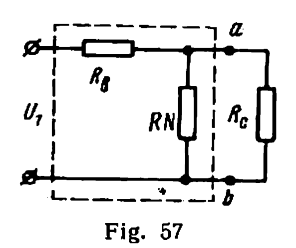


Fig. 57

Fig. 58

un stabilovolt comme résistance non linéaire; R_b est une résistance ballast. La fig. 58 représente la caractéristique courant-tension du stabilovolt 150C5-30.

L'analyse du fonctionnement d'un stabilisateur comprend le calcul des limites admissibles des variations de U_1 pour R_c = const, ainsi que l'étude du fonctionnement du stabilisateur en cas de variations simultanées de U_1 et R_c.

Pour caractériser les performances d'un stabilisateur, on fait appel parfois à la notion du facteur de stabilisation. On appelle facteur de stabilisation la relation de l'accroissement relatif de la tension à l'entrée du stabilisateur $\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)$ à l'accroissement relatif de la tension à la sortie de ce dernier $\left(\frac{\Delta U_c}{U_c}\right)$. Examinons deux exemples numériques.

E x e m p l e 22. Dans le schéma de la fig. 57 $R_c = 5\ k\Omega$; $R_b = 2\ k\Omega$. La caractéristique du stabilovolt est représentée sur la fig. 58. Chercher les limites admissibles de variations de U_1 pour que le stabilisateur donne à sa sortie une tension stabilisée de 150 V.

S o l u t i o n. Utilisons la méthode de court-circuit (*cc*) et de marche à vide (*mv*). Coupons la branche comportant le stabilovolt, et trouvons la tension *mv*:

$$U_{abmv} = U_1 \frac{R_c}{R_c + R_b} = 0{,}713 U_1.$$

Calculons la résistance d'entrée de la partie linéaire du circuit (fig. 57) par rapport aux bornes *ab*

$$R_{ent} = \frac{R_c R_b}{R_c + R_b} = 1427\Omega.$$

Traçons sur la fig. 58 deux droites (en traits pleins) passant par les points m et n de la caractéristique du stabilovolt, de manière que la tangente de l'angle, formé par ces droites avec la verticale, soit numériquement égale à $R_{ent} = 1427\Omega$.

Les tronçons limités par ces droites en abscisses sont égaux à U_{mv}. Nous pouvons lire sur le schéma que $0{,}713\ U_{1\ min} = 157\ V$. Par conséquent, $U_{1\ min} = 220\ V$. De même $0{,}713\ U_{1\ max} = 192\ V$, d'où $U_{1\ max} = 269\ V$. Ainsi la tension U_1 peut varier entre 220 et 269 V.

E x e m p l e 23. Calculer pour le schéma de la fig. 57 pour $R = 2\ k\Omega$, caractéristique du stabilovolt représentée sur la fig. 58 et $U_1 = 250\ V$, les limites entre lesquelles on peut faire varier la résistance de la charge R_c afin que le stabilisateur puisse remplir ses fonctions et stabiliser la tension de sortie.

S o l u t i o n. Utilisons la méthode de *mv* et *cc*.

Calculons

$$U_{mv} = U_1 \frac{R_c}{R_c + R_b} = 250 \cdot \frac{R_c}{R_c + 2000}.$$

Trouvons

$$R_{ent} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_c R_b}{R_c + R_b} = \frac{2000 R_c}{2000 + R_c}.$$

Le problème se réduit au calcul des valeurs de R_c pour lesquelles les droites caractérisant R_{ent} passent par les points m et n de la caractéristique du stabilovolt. Dans l'exemple considéré nous ne connaissons ni les tangentes des angles α, ni les points initiaux en abscisses à partir desquels on doit tracer les droites en question et, par conséquent, le problème doit être résolu par la méthode des constructions d'essai. A cette fin prenons diverses valeurs arbitraires de R_c et calculons les valeurs U_{mv} et R_{ent} qui en découlent

$R_c k\Omega$	3	4	5	6	7	8
U_{mv}, V	150	167	178	187	194	200
R_{ent}, Ω	1200	1330	1425	1500	1555	1600

En partant des données de ce tableau, traçons plusieurs rayons.

Nous pouvons voir sur le schéma que les droites tracées (voir les droites en pointillé de la fig. 58) passent par les points m et n respectivement pour $R_{c\ min} = 3{,}3\ k\Omega$ et $R_{c\ max} = 8\ k\Omega$.

Fig. 59

§ 41. Amplificateur de tension continue. On appelle amplificateur de tension continue un dispositif dans lequel la valeur de l'accroissement de tension à sa sortie est supérieure à la valeur de l'accroissement de la tension à son entrée. Les amplificateurs de tension continue sont habituellement exécutés à l'aide de résistances non linéaires contrôlables: de triodes ou de triodes à cristaux. La fig. 59 représente les caractéristiques de plaques, qui sont en fait des caractéristiques courant-tension d'une triode type 6C2C. Ces caractéristiques donnent le courant anodique I_a du tube en fonction de la tension anodique U_a, pour une tension grille U_g, prise comme paramètre.

Le schéma d'un amplificateur à courant continu est représenté sur la fig. 60. La tension d'entrée (à amplifier) est appliquée à la grille du tube. La charge R_c est branchée à la sortie de l'amplificateur (entre les bornes a et b).

La grille de la triode est située plus près de la cathode que l'anode. L'influence du champ de la grille sur le flux électronique, s'écoulant de la cathode vers l'anode, est nettement plus grande que l'influence du champ de l'anode. Par conséquent, les variations même très faibles de la tension appliquée à la grille entraînent une variation brusque du

courant anodique et de la tension à la sortie de l'amplificateur. Pour le circuit plaque $E = U_a + I_aR_c$. La tension de sortie ($I_aR_c = E - U_a$) est représentée sous forme d'une famille de courbes en fonction de la tension d'entrée U_g sur la fig. 59.

Exemple 24. Construire la fonction $U_{sor}=f\ (U_g)$ pour le schéma de la fig. 60, étant donné que $R_c = 12\ k\Omega$ et $E = 240\ V$. La triode utilisée est une 6C2C.

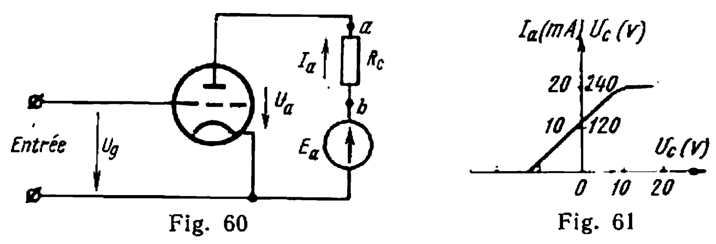


Fig. 60

Fig. 61

Solution. Traçons à partir du point $I_a = 0\ U_a = E$ une droite sous un angle α par rapport à la verticale ($\operatorname{tg} \alpha = 12\ k\Omega$). Les points d'intersection de cette droite avec les caractéristiques plaques donnent les valeurs de I_a et U_g, liées entre elles. La fonction $U_{sor} = f\ (U_g)$ diffère de la fonction $I_a = f\ (U_g)$ de la fig. 61 uniquement par son échelle ($U_c = I_aR_c$, $R_c = \text{const}$).

CHAPITRE III

CIRCUITS MAGNÉTIQUES

§ 42. Division de toutes les substances en deux groupes: substances ferromagnétiques et non ferromagnétiques. Il a été indiqué au cours de physique que toutes les substances sont réparties en trois groupes d'après leurs propriétés magnétiques: substances diamagnétiques, paramagnétiques et ferromagnétiques. Pour les substances diamagnétiques la perméabilité relative μ_r est légèrement inférieure à l'unité; pour le bismuth, par exemple, elle est égale à 0,99983. Pour les substances paramagnétiques la perméabilité relative μ_r est légèrement supérieure à l'unité, étant égale à 1,0036 pour le platine, par exemple. Pour les substances ferromagnétiques (fer, nickel, cobalt et leurs alliages, ferrites, etc.) μ_r est nettement plus grande que l'unité (elle atteint 10^4 par exemple, ou même 10^6, pour certains matériaux).

Les électriciens ont recours habituellement à une division bien plus grossière, en répartissant toutes les substances ferromagnétiques et non ferromagnétiques. Pour les substances ferromagnétiques μ_r est nettement supérieure à l'unité et pour les substances non ferromagnétiques elle est pratiquement égale à l'unité.

§ 43. Grandeurs essentielles caractérisant un champ magnétique. Rappelons que les grandeurs essentielles caractérisant un champ magnétique sont l'induction magnétique $\vec{B}$, et l'aimantation $\vec{J}$ *.

L'induction magnétique est une grandeur vectorielle, déterminée d'après l'effort exercé par un champ magnétique sur un courant. L'aimantation est le moment magnétique de l'unité de volume de la substance.

Le champ magnétique est encore caractérisé par une troisième grandeur, à savoir le champ magnétique $\vec{H}$. Les trois grandeurs $\vec{B}$, $\vec{J}$, $\vec{H}$ sont liées entre elles par l'expression suivante:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \qquad (3.1)$$

Dans le système SI, l'induction est mesurée en teslas (T):

$$1T = 1V \cdot s/m^2 = 1\ Wb/m^2.$$

L'induction peut être également mesurée en unités multiples de teslas, à savoir Wb/cm^2 ou en gauss dans le système CGS UEM ($1G = 10^{-8}\ Wb/cm^2$). L'aimantation J et le champ H sont mesurés dans le système SI en A/m et dans le système CGS UEM en œrsteds (Oe).

Dans la pratique on exprime souvent l'induction B en unités du système CGS UEM (G) et le champ magnétique H en A/cm.

---

* La flèche, placée au-dessus de la lettre, indique qu'il s'agit d'un vecteur dans l'espace.

L'aimantation $\vec{J}$ est un vecteur dont la direction coïncide avec celle de $\vec{H}$ au point considéré :

$$\vec{J} = \varkappa \vec{H}. \tag{3.2}$$

Le coefficient d'aimantation $\varkappa$ (susceptibilité) pour les substances ferromagnétiques est lui-même fonction de H. Substituons (3.2) dans (3.1) en désignant $1 + \varkappa = \mu_r$. Obtenons

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \tag{3.3}$$

où μ_0 — constante caractérisant les propriétés magnétiques du vide. Dans le système SI $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m $= 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ H/m. Dans le système CGS UEM $\mu_0 = 1$.

Le coefficient sans dimensions μ_r est appelé perméabilité relative. Pour les substances ferromagnétiques μ_r est fonction de H.

Le flux magnétique Φ est le flux du vecteur induction magnétique à travers la surface S

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S}, \tag{3.4}$$

où : dS — élément de surface. Dans le système SI le flux est mesuré en $V \cdot s$. ou en webers (Wb). Dans le système CGS UEM le flux est mesuré en maxwells (Mx) ou en kilomaxwells (kMx)

$$1 Mx = 10^{-8}\, Wb; \quad 1 kMx = 10^3\, Mx.$$

Les calculs des circuits magnétiques se font habituellement en partant de deux grandeurs : l'induction magnétique B et le champ magnétique H.

En ce qui concerne la troisième grandeur, l'aimantation J, elle n'est pas utilisée en général dans les calculs (au besoin la valeur de J, correspondant aux valeurs liées entre elles de B et H peut être trouvée à l'aide de l'expression (3.1).

§ 44. Eléments de la théorie du ferromagnétisme. Il a été exposé dans le cours de physique, que les corps ferromagnétiques sont constitués par des domaines d'aimantation spontanée. Chaque domaine est aimanté d'une certaine manière et son état magnétique est caractérisé par le vecteur d'aimantation. La direction du vecteur d'aimantation dépend des tensions élastiques internes et de la structure cristalline du corps ferromagnétique.

Les vecteurs d'aimantation de divers domaines sont orientés dans des directions différentes et, par conséquent, dans l'espace extérieur au milieu ferromagnétique, l'aimantation d'un corps, tant qu'il n'est pas placé dans un champ magnétique extérieur, ne se manifeste en rien. Si, par contre, un corps ferromagnétique est placé dans un champ magnétique extérieur, les vecteurs d'aimantation de ses divers domaines s'orienteront suivant le champ extérieur sous l'effet du champ magnétique. Il en découle que l'induction du champ magnétique résul-

tant est nettement plus forte (des centaines et même des centaines de milliers de fois) que l'induction magnétique du champ extérieur, agissant sur la substance ferromagnétique.

L'atome d'un élément quelconque peut être représenté schématiquement sous forme d'un noyau à charge positive et d'électrons gravitant autour de ce noyau. Les électrons ne gravitent pas seulement autour du noyau, mais tournent également autour de leur propre axe.

Le rôle décisif dans la création des propriétés magnétiques des matériaux ferromagnétiques est joué par le moment magnétique de l'électron lorsque ce dernier tourne autour de son propre axe; ce moment est appelé spin de l'électron.

Les atomes des matériaux ferromagnétiques comportent des couches électroniques incomplètes à spins non compensés. Ainsi, par exemple, dans l'atome du fer la troisième couche électronique, en comptant à partir du noyau (ainsi que ses deux sous-couches), ne possède que 14 électrons au lieu de 18. Il y a lieu de signaler en outre que sur l'une de ces sous-couches les spins de 5 électrons ont la même direction et qu'un électron a un spin de direction opposée.

Grâce à l'existence dans l'atome du fer de quatre spins non compensés, cet atome, dans son ensemble, possède un moment magnétique.

Nous avons déjà signalé que les matériaux ferromagnétiques comportent des domaines d'aimantation spontanée. Chacun de ces domaines est formé par l'ensemble des atomes dont les moments magnétiques sont parallèles (et non pas antiparallèles). Examinons les causes de formation de ces domaines.

Du fait de la présence de couches électroniques incomplètes à spins non compensés, une partie d'électrons d'un atome est située si près du noyau d'un autre atome qu'un échange d'électrons a pour ainsi dire lieu entre les atomes voisins.

De ce fait, les atomes voisins subissent l'action non seulement des forces magnétiques, dues à l'interaction spin-spin, mais également des forces dues à la présence des électrons d'échange. Ces forces sont appelées forces d'échange. Une énergie, appelée énergie d'échange ou intégrale d'échange, est liée aux forces d'échange. L'intégrale d'échange peut être positive ou négative. Pour que des propriétés ferromagnétiques se manifestent il faut que l'intégrale d'échange soit positive et ait une certaine valeur déterminée.

Les forces d'échange tendent à orienter les atomes voisins de manière que leurs moments magnétiques soient parallèles. A leur tour, les forces magnétiques d'interaction spin-spin tendent à orienter les atomes voisins de manière que leurs moments magnétiques soient antiparallèles.

Les forces d'échange diminuent plus rapidement en fonction de la distance que les forces magnétiques d'interaction spin-spin. Par conséquent, à partir d'une certaine distance les forces magnétiques d'interaction spin-spin deviennent supérieures aux forces d'échange. Ceci explique les faibles dimensions des domaines d'aimantation spontanée.

En outre, au point de vue énergétique, l'état le plus favorable est celui pour lequel un corps ferromagnétique est subdivisé en domaines de petites dimensions à aimantation antiparallèle. Cet état est le plus avantageux car pour lui l'énergie de l'ensemble du système est minimale.

Lorsque la température du fer s'élève et atteint 760 °C (point de Curie), les vitesses du mouvement d'agitation des électrons deviennent si grandes qu'elles provoquent la destruction des domaines spontanés.

§ 45. Caractéristiques essentielles des matériaux ferromagnétiques. Les propriétés des matériaux ferromagnétiques sont habituellement caractérisées par l'induction magnétique B, exprimée en fonction du champ magnétique H. On distingue deux types principaux de ces fonctions : courbes d'aimantation et boucles d'hystérésis.

On appelle courbes d'aimantation la dépendance univoque entre B et H. On distingue les courbes d'aimantation initiales, normales et

dénuées d'hystérésis. Nous expliquerons plus loin ce qu'il faut entendre par là.

Il a été indiqué au cours de physique que *le phénomène d'hystérésis* est propre aux matériaux ferromagnétiques. C'est le phénomène de retard des variations de l'induction magnétique B par rapport à celles du champ magnétique H. En simplifiant les choses, on peut dire que l'hystérésis est due au frottement interne des domaines d'aimantation spon-

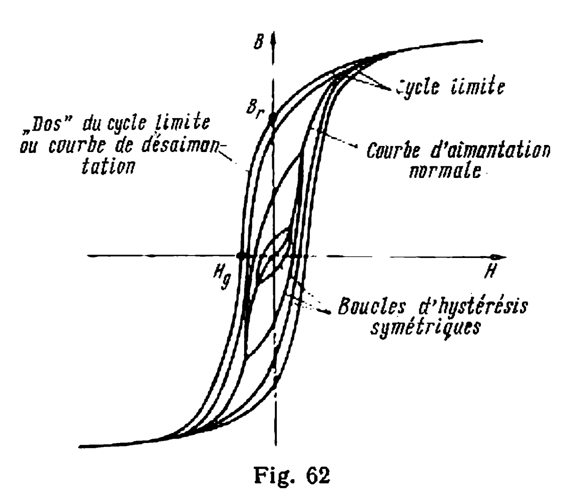


Fig. 62

tanée. Par suite de l'hystérésis, la valeur de B en fonction de H, en cas de variation périodique du champ magnétique est représentée par une boucle.

On distingue plusieurs types de boucles d'hystérésis, à savoir boucle d'hystérésis symétrique, boucle (cycle) d'hystérésis limite et boucle d'hystérésis non symétrique ou cycle particulier.

La fig. 62 représente une famille de boucles d'hystérésis symétriques. Pour chaque boucle hystérétique symétrique la valeur maximale positive de B est égale à sa valeur maximale négative et, par conséquent, $H_{max} = | -H_{max} |$.

Le lieu géométrique des sommets des boucles d'hystérésis symétriques est appelé *courbe d'aimantation normale*. Pour des valeurs très grandes de H, voisines de $\pm H_{max}$, les branches ascendante et descendante de la boucle d'hystérésis sont pratiquement confondues.

On appelle boucle d'hystérésis limite ou *cycle limite*, la boucle d'hystérésis symétrique relevée pour de très grandes valeurs de H_{max}. La valeur de l'induction pour $H = 0$, appelée *induction rémanente*, est désignée par B_r. La valeur du champ pour $B = 0$, appelée *force coercitive*, est désignée par H_c. La partie B_rH_c du cycle limite (fig. 62) est appelée *courbe de désaimantation ou « dos » de la boucle d'hystérésis.*

C'est ce tronçon qui est utilisée pour les calculs des circuits magnétiques à aimants permanents.

Si on fait varier H périodiquement mais de manière que la valeur $+H_{max}$ ne soit pas égale à la valeur de $|-H_{max}|$, la valeur de B en fonction de H sera bien représentée par une boucle, mais le centre de cette boucle ne coïncidera pas avec l'origine des coordonnées (fig. 63). Des boucles d'hystérésis de ce type sont appelées *boucles ou cycles d'hystérésis particuliers.*

Si on aimante un matériau ferromagnétique préalablement désaimanté ($B = 0$, $H = 0$), en augmentant H d'une manière monotone, la valeur de B en fonction de H relevée au cours de ce processus est représentée par *la courbe d'aimantation initiale.*

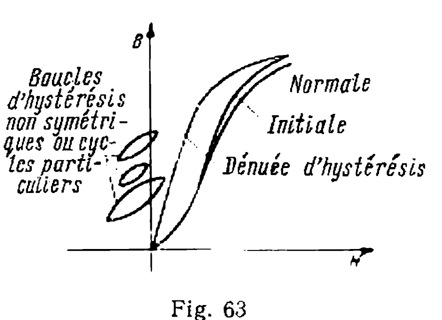


Fig. 63

Les courbes d'aimantation initiale et normale sont tellement voisines l'une de l'autre qu'on peut les considérer coïncidantes dans bien des cas pratiques (fig. 63).

On appelle *courbe d'aimantation dénuée d'hystérésis*, celle qui donne B en fonction de H, lorsque durant l'aimantation du matériau ferromagnétique on frappe dessus périodiquement ou on le soumet à l'effet d'un champ sinusoïdal à amplitude décroissante. Dans ces cas l'hystérésis, c'est-à-dire le phénomène de retard des variations de B en fonction de H, dû au frottement interne des domaines à aimantation spontanée, est pour ainsi dire supprimé.

La courbe d'aimantation dénuée d'hystérésis diffère nettement de la courbe d'aimantation normale (fig. 63).

C'est la courbe d'aimantation normale qui est utilisée dans les divers manuels, comme valeur univoque de B en fonction de H.

§ 46. Matériaux magnétiques doux et durs. Tous les matériaux ferromagnétiques peuvent être répartis en deux groupes importants: matériaux magnétiques doux et matériaux magnétiques durs.

Les matériaux magnétiques doux ont une courbe d'aimantation normale à pente raide et des boucles d'hystérésis à surfaces relativement petites.

Ces matériaux sont utilisés dans tous les dispositifs qui fonctionnent ou peuvent fonctionner à flux magnétique à variation périodique (transformateurs, moteurs et générateurs électriques, bobines d'induction, etc.).

Parmi les matériaux magnétiques doux on peut nommer les aciers magnétiques employés dans la construction électrique, les alliages fer-nickel du type de permalloy, etc.

Les matériaux magnétiques durs ont une courbe d'aimantation normale à pente douce et une boucle d'hystérésis à grande surface.

Parmi les matériaux magnétiques durs on peut nommer les aciers au carbone, les alliages de tungstène, les alliages au cobalt (magnico),

ceux au platine-cobalt, etc. Les matériaux magnétiques durs sont utilisés, entre autres, pour la fabrication des aimants permanents.

Les boucles d'hystérésis d'un matériau magnétique doux du type du permalloy (courbe *1*) et d'un matériau magnétique dur (courbe *2*) sont représentées sur la fig. 64 pour permettre de comparer leur aspects.

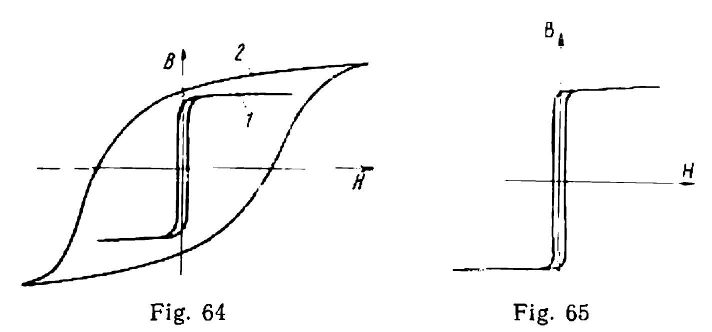


Fig. 64 Fig. 65

§ 47. Matériaux à boucle d'hystérésis rectangulaire. Certains matériaux magnétiques doux comme, par exemple le perminvar, les alliages du type Н60П, Н63П et d'autres ont une boucle d'hystérésis à forme pratiquement rectangulaire (fig. 65). Ces matériaux sont largement utilisés dans les calculatrices et les dispositifs automatiques.

§ 48. Magnétodiélectriques et ferrites. En radiotechnique où on a affaire à des oscillations à haute fréquence, les noyaux des bobines d'inductance sont fabriqués en magnétodiélectriques ou en ferrites.

Les magnétodiélectriques sont des matériaux obtenus par mélange d'une poudre finement pulvérisée de magnétite, fer ou permalloy, avec un diélectrique. Ce mélange est ensuite moulé et fritté. Chaque particule ferromagnétique se trouve ainsi enveloppée d'une pellicule de diélectrique. Grâce à la présence de ces pellicules, les noyaux en magnétodiélectrique ne sont pas saturés: leur μ_r peut être égal à plusieurs unités comme à plusieurs dizaines d'unités.

Les ferrites sont fabriqués à partir d'oxydes de cuivre ou de zinc et d'oxydes de fer ou du nickel. Le mélange ainsi obtenu est moulé et fritté. On obtient ainsi une solution solide, par exemple $Zn \cdot Fe_2O_3$. Par ses propriétés électriques, les ferrites sont des semi-conducteurs. Leur résistance volumique est de l'ordre de 1 à 10^7 $\Omega \cdot m$, tandis que pour le fer $\rho \approx 10^{-6} \Omega \cdot m$.

Les propriétés magnétiques des ferrites peuvent être très différentes. Contrairement aux magnétodiélectriques les ferrites peuvent être saturées. La force coercitive des ferrites est égale à 10 *A/m* environ. Les ferrites sont désignées par deux lettres et un chiffre. Ainsi, par exemple, le ferrite type НЦ-1000 (NiZn-1000) est une ferrite nickel-zinc pour laquelle μ_r dans le tronçon initial de la courbe d'aimantation est égal à 1000.

§ 49. Loi du courant total. Le champ magnétique est créé par des courants électriques. Le lien quantitatif entre l'intégrale du vecteur

du champ magnétique $\vec{H}$ le long d'une maille arbitraire et la somme algébrique des courants ΣI, circulant dans cette maille est définie par la loi du courant total

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = \Sigma I.$$

La loi du courant total est une loi expérimentale. Elle peut être vérifiée par voie expérimentale en mesurant $\oint \vec{H}\, d\vec{l}$ à l'aide d'un dispositif spécial décrit dans le manuel de physique et appelé ceinture magnétique.

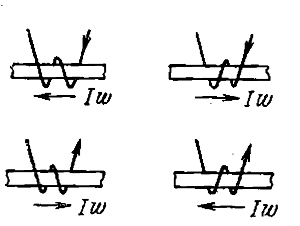


Fig. 66

§ 50. Force magnétomotrice. On appelle force magnétomotrice (F.M.M.) d'une bobine (ou d'un enroulement) parcouru par un courant, le produit du nombre de spires de la bobine w par le courant I qui y circule.

La F.M.M. Iw produit un flux magnétique dans un circuit magnétique, de même qu'une F.E.M. produit un courant électrique dans un circuit électrique. De même que la F.E.M., la F.M.M. est une grandeur dirigée. Son sens positif est indiqué sur un schéma par une flèche.

Le sens positif de la F.M.M. coïncide avec le déplacement de la pointe d'une vis à filetage droit, lorsqu'on tourne cette dernière dans le sens du courant circulant dans l'enroulement.

Pour trouver le sens positif d'une F.M.M. on a recours souvent à *la règle mnémonique* suivante: si on place mentalement un noyau dans sa main droite, de manière que *les doigts soient orientés dans le sens du courant circulant dans l'enroulement* et si on redresse ensuite le pouce, ce dernier indique le sens positif de la F.M.M.

Nous donnons sur la fig. 66 plusieurs croquis représentant des bobines enroulées sur un noyau dans des sens différents et à sens différents de la F.M.M.

§ 51. Circuit magnétique. On appelle circuit magnétique l'ensemble des F.M.M., des corps ferromagnétiques ou d'autres corps ou milieux quelconques le long desquels se ferme le flux magnétique.

§ 52. Divers circuits magnétiques. Les circuits magnétiques peuvent être répartis en circuits ramifiés et non ramifiés. Un circuit non ramifié est représenté sur le schéma de la fig. 67. Quant aux circuits ramifiés, ils peuvent être répartis en circuits symétriques et asymétriques. Le circuit magnétique de la fig. 68 est symétrique. Dans ce circuit le flux Φ_1 est égal au flux Φ_2, si les deux parties de ce circuit situées à gauche et à droite de la ligne verticale en pointillé sont identiques au point de vue géométrique, sont exécutées en même matériau et si $I_1w_1 = I_2w_2$*

* Considérons la branche gauche comme première et affectons toutes les grandeurs qui s'y rapportent par l'indice 1 (courant I_1, nombre de spires w_1). Appelons deuxième la branche droite et affectons par l'indice 2 toutes les grandeurs qui s'y rapportent (I_2, w_2).

Il suffit de faire $I_1w_1 \neq I_2w_2$ ou d'inverser le sens du courant dans l'un des enroulements ou encore de pratiquer un entrefer dans l'un des noyaux extérieurs du circuit magnétique, pour que le circuit magnétique de la fig. 68 devienne asymétrique. Dans le circuit asymétrique de la fig. 68, le flux $\Phi_1 \neq \Phi_2$.

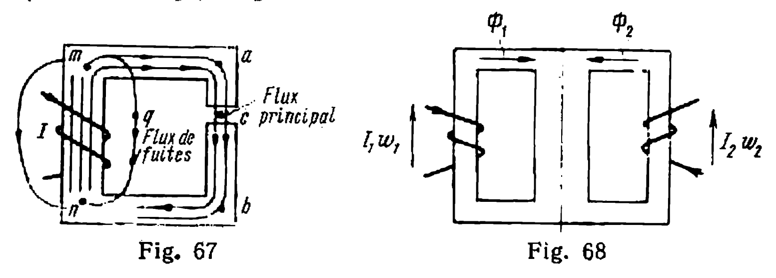


Fig. 67 Fig. 68

§ 53. **A quelle fin introduit-on des matériaux ferromagnétiques dans le circuit magnétique des machines électriques, des appareils électriques et d'autres dispositifs ?** Les machines, les transformateurs et les autres appareils électriques sont construits de manière que le flux qui y circule soit aussi grand que possible. Démontrons que si un matériau ferromagnétique fait partie d'un circuit magnétique, le flux dans ce circuit pour une même F.M.M. et toutes conditions égales par ailleurs est nettement plus grand qu'en l'absence de matériau ferromagnétique dans le même circuit. Examinons pour cela l'exemple numérique suivant.

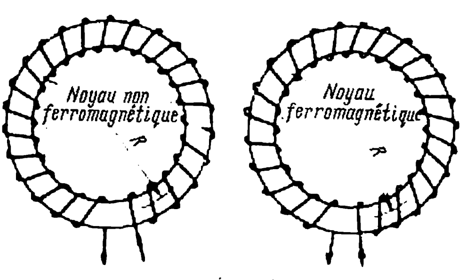


Fig. 69

Exemple 25. Prenons deux noyaux annulaires (tores) identiques au point de vue géométrique représentés sur la fig. 69. Soit le rayon de la ligne magnétique moyenne de ces noyaux $R = 10$ *cm* et leur section transversale $S = 2 cm^2$. L'un des noyaux est non ferromagnétique, en bois par exemple, et l'autre est ferromagnétique (sa courbe d'aimantation est représentée sur la fig. 70). Bobinons sur chaque noyau un enroulement à $w = 200$ spires et faisons circuler dans ces enroulements un courant identique I, égal à un ampère, par exemple. Calculons les flux dans ces deux tores.

Conformément à la loi du courant total, le champ $H = \frac{Iw}{2\pi R}$ est la même pour les deux tores et ne dépend pas du matériau du noyau

$$H = \frac{1 \cdot 200}{2\pi \cdot 0,1} = 318 \; A/m.$$

Flux dans le noyau non ferromagnétique

$$\Phi_{nfm} = BS = \mu_0\mu_r HS = 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 318 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-8} \; Wb.$$

Trouvons sur la courbe d'aimantation (fig. 70) pour $H = 318 A/m$ $B \approx 1,02\ T$. Le flux dans le tore ferromagnétique

$$\Phi_{fm} = BS = 1,02 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 20,4 \cdot 10^{-5}\ Wb.$$

Ainsi, le flux dans un tore ferromagnétique est $\frac{20,4 \cdot 10^{3}}{8} = 2550$ plus grand que le flux dans le tore non ferromagnétique.

L'introduction des matériaux ferromagnétiques dans un circuit magnétique peut non seulement intensifier le flux magnétique, mais également concentrer ce dernier dans une certaine région de l'espace et lui conférer une configuration déterminée.

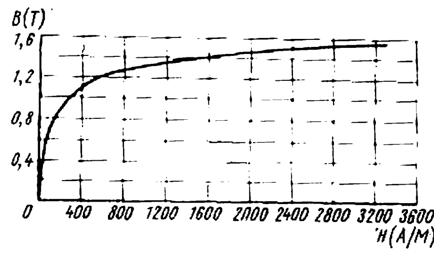


Fig. 70

§ 54. Différence de potentiel magnétique. On appelle différence de potentiel magnétique entre les points a et b d'un circuit magnétique l'intégrale de ligne du champ magnétique entre ces deux points

$$U_{Mab} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}. \qquad (3.6a)$$

Si le long de ce tronçon H est constant et coïncide en direction avec l'élément du parcours $d\vec{l}$, on a $\vec{H} d\vec{l} = Hdl \cos 0°$ et on peut sortir H de sous le signe d'intégration. Alors

$$U_{Mab} = H \int_a^b dl = Hl_{ab}, \qquad (3.6b)$$

où l_{ab} — longueur de parcours entre les points a et b. Le potentiel magnétique est mesuré en ampères.

Lorsque le tronçon du circuit magnétique entre les points a et b peut être subdivisé en n parties, de manière que pour chacune d'elles $H = H_k$ soit constant, on a

$$U_{Mab} = \sum_{k=1}^{n} H_k l_k. \qquad (3.7)$$

§ 55. Caractéristiques flux-potentiel magnétique. On appelle caractéristique flux-potentiel magnétique la variation du flux dans un tronçon quelconque d'un circuit magnétique en fonction de la différence de potentiel magnétique dans ce tronçon

$$\Phi = f(U_m).$$

Ces caractéristiques jouent un rôle aussi important dans les calculs et l'étude des circuits magnétiques que les caractéristiques courant-tension des résistances non linéaires dans les calculs et l'étude des circuits électriques (voir deuxième chapitre).

Les caractéristiques flux-potentiel ne sont pas données lors des calculs des circuits magnétiques. Avant d'aborder le calcul, il faut construire ces caractéristiques en partant des courbes d'aimantation des matériaux ferromagnétiques faisant partie du circuit magnétique en question.

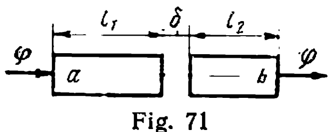


Fig. 71

§ 56. Construction des caractéristiques flux-potentiel magnétique. La fig. 71 représente un tronçon d'un circuit magnétique parcouru par le flux Φ. Soit l_1 et l_2 les tronçons de ce circuit, de section S, exécutés en matériau ferromagnétique dont la courbe $B = f(H)$ est représentée par exemple sur la fig. 70. Dans le tronçon de longueur δ le flux magnétique circule dans l'air.

Il faut construire la caractéristique flux-potentiel du tronçon du circuit situé entre les points a et b.

Admettons pour cette construction que: 1) le flux magnétique reste constant le long du tronçon situé entre a et b (absence de fuites) et 2) la section du flux magnétique dans l'entrefer soit la même que le long des tronçons l_1 et l_2 (absence de l'épanouissement latéral des lignes de force dans l'entrefer).

En réalité ces deux hypothèses ne sont justifiées que jusqu'à un certain point.

La caractéristique cherchée est construite de la manière suivante. Prenons un certain nombre de valeurs pour l'induction B, par exemple, 0; 0,5; 0,8; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; et 1,5 T pour les aciers magnétiques courants, et trouvons pour chaque valeur de B le champ dans les trois tronçons (l_1, l_2 et δ).

Pour les tronçons en matériau ferromagnétique (tronçons l_1 et l_2, fig. 71) les champs $H_1 = H_2$ (puisque $B_1 = B_2$) sont relevés sur la courbe d'aimantation.

Pour les tronçons non ferromagnétiques (tronçon δ)

$$H_{A/m} = \frac{B_T}{\mu_0 H/m} = \frac{B_T}{1{,}256 \cdot 10^{-6} H/m} = 0{,}8 \cdot 10^6 B_T = 80 B_G.^*$$

Ainsi, pour calculer H (en A/m) dans l'air, il faut multiplier l'induction (en T) par le facteur $0{,}8 \cdot 10^6$.

Calculons le flux $\Phi = BS$ pour chaque valeur de B et trouvons le potentiel magnétique

$$U_{Mab} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \cdot \delta.$$

En partant des résultats du calcul construisons la courbe $\Phi = f(U_м)$.

E x e m p l e 26. Construire la caractéristique flux-potentiel magnétique pour le tronçon représenté sur la fig. 71 pour trois valeurs de δ, à savoir 0, 0,005, et 0,05 cm; $l_1 = 10$ cm, $l_2 = 5$ cm, $S = 5$ cm^2.

---

* Rappelons que dans la majorité des ouvrages publiés jusqu'à 1960 environ et consacrés à différents dispositifs magnétiques, l'induction magnétique a été mesurée en Gauss (et non pas en Weber par m^2) et le champ était exprimée en A/cm.

S o l u t i o n. Calculons la différence de potentiel magnétique entre les points *a* et *b* du tronçon du schéma magnétique en question pour $\delta = 0{,}005\ cm$, et $B = 0{,}5\ T$.

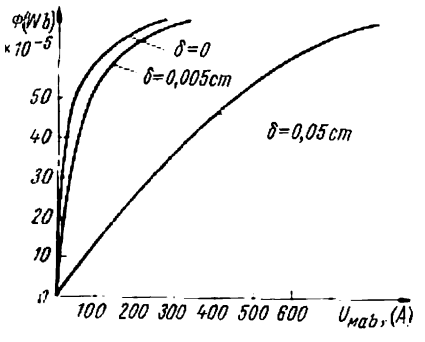


Fig. 72

On relève sur la courbe de la fig. 70 : pour l'induction $B=0{,}5\ T$, le champ $H = 40\ A/m$.

Ainsi pour $B = 0{,}5\ T$ $H_1 = H_2 = 40\ A/m$.

A l'aide de l'équation $U_{Mab} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H\delta$ calculons

$$U_{Mab} = 40 \cdot 0{,}1 + 40 \cdot 0{,}05 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 26\ A.$$

Les valeurs de U_{Mab} pour d'autres entrefers et inductions sont calculées d'une manière identique.

Récapitulons les résultats du calcul dans le tableau ci-dessous:

B, T	0,5	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
Φ, Wb	$25 \cdot 10^{-5}$	$40 \cdot 10^{-5}$	$50 \cdot 10^{-5}$	$55 \cdot 10^{-5}$	$60 \cdot 10^{-5}$	$65 \cdot 10^{-5}$	$70 \cdot 10^{-5}$
$H_1 = H_2$, A/m	40	130	300	440	700	1080	1800
H_δ, A/m	$4 \cdot 10^5$	$6{,}4 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	$8{,}8 \cdot 10^5$	$9{,}6 \cdot 10^5$	$10{,}4 \cdot 10^5$	$11{,}2 \cdot 10^5$
U_{Mab} pour $\delta = 0$, A	6	19,5	45	64	105	162	270
U_{Mab} pour $\delta = 0{,}005\ cm$, A	26	51,5	85	108	153	214	326
U_{Mab} pour $\delta = 0{,}05\ cm$, A	206	339,5	445	504	585	682	830

En partant des données de ce tableau on a construit les caractéristiques flux-potentiel magnétique sur la fig. 72, pour trois valeurs de δ. On voit sur les courbes ainsi obtenues que pour un tronçon ne comportant pas d'entrefer, la caractéristique monte très rapidement. En présence d'un entrefer la caractéristique s'aplanit et a une pente moindre.

§ 57. Lois de Kirchhoff, appliquées aux circuits magnétiques. Pour les calculs de circuits magnétiques, de même que pour les calculs des circuits électriques, on peut utiliser la première et la deuxième lois de Kirchhoff.

Première loi de Kirchhoff: la somme algébrique des flux magnétiques en un nœud quelconque d'un circuit magnétique est nulle. Cette loi s'écrit de la manière suivante:

$$\sum \Phi = 0. \tag{3.8}$$

Deuxième loi de Kirchhoff: la somme algébrique des différences de potentiel magnétique le long d'une maille quelconque est égale à la somme algébrique des F.M.M. le long de la même maille

$$\sum U_M = \sum Iw. \tag{3.9}$$

La deuxième loi de Kirchhoff pour les circuits magnétiques n'est en réalité qu'une autre forme d'écriture de la loi du courant total.

Avant d'écrire les équations découlant des lois de Kirchhoff pour un circuit magnétique, il faut choisir arbitrairement les sens positifs des flux dans les branches de ce circuit, ainsi que les sens positifs de parcours des mailles de ce dernier.

Si pour un certain tronçon du circuit le sens du flux magnétique coïncide avec celui de parcours de ce circuit, la différence de potentiel magnétique dans ce tronçon figure dans la somme $\sum U_M$ avec le signe $+$. Si par contre, les deux sens sont en opposition, cette différence doit figurer avec le signe $-$.

De même si la F.M.M. coïncide avec le sens du parcours elle figure dans $\sum Iw$ avec le signe $+$ et elle y figure avec le signe $-$ dans le cas contraire.

A titre d'exemple écrivons les équations suivant des lois de Kirchhoff pour le circuit magnétique ramifié représenté sur la fig. 75. Ce circuit magnétique comporte trois branches et deux F.M.M.

Considérons la branche gauche comme première et affectons de l'indice 1 toutes les grandeurs qui s'y rapportent (flux Φ_1, champ H_1, longueur de parcours dans l'acier l_1, longueur de parcours dans l'entrefer δ_1, F.M.M. I_1w_1).

Appelons deuxième la branche moyenne et affectons de l'indice 2 toutes les grandeurs qui s'y rapportent (flux magnétique Φ_2, champ magnétique H_2, longueur du parcours dans l'acier l_2, longueur de l'entrefer δ_2, F.M.M. I_2w_2).

Utilisons l'indice 3 pour toutes les grandeurs se rapportant à la branche droite (flux Φ_3, longueur du parcours dans le tronçon vertical l_3, longueur globale du parcours dans les deux tronçons horizontaux l_3').

Choisissons arbitrairement le sens du flux dans les diverses branches.

Supposons que tous les flux (Φ_1, Φ_2, Φ_3) soient dirigés de bas en haut (vers le nœud a). Le nombre d'équations qu'il faut écrire suivant les lois de Kirchhoff est égal au nombre des branches du circuit (dans le cas considéré il faut en écrire trois, puisque le circuit comprend trois branches).

D'après la première loi de Kirchhoff il faut écrire autant d'équations qu'il y a de nœuds dans le circuit, moins un (voir § 7).

Le circuit de la fig. 75 comporte deux nœuds et, par conséquent, suivant la première loi de Kirchhoff, il faut écrire une seule équation:

$$\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3=0. \qquad (a)$$

D'après la deuxième loi de Kirchhoff il faut écrire autant d'équations qu'il y a de branches dans le circuit, moins le nombre d'équations écrites suivant la première loi de Kirchhoff. Dans l'exemple considéré le nombre d'équations établies suivant la deuxième loi de Kirchhoff, est de 3—1 = 2.

Ecrivons la première de ces équations pour la maille formée par la première et la deuxième branche, et la seconde, pour la maille formée par la première et la troisième branche (autrement dit pour la maille périphérique).

Avant d'écrire les équations suivant la deuxième loi de Kirchhoff, il faut choisir le sens positif de parcours des mailles. Choisissons comme plus positif de parcours celui des aiguilles d'une montre.

Alors l'équation pour la maille formée par la première et la deuxième branche est:

$$H_1l_1+H_{\delta_1}\delta_1-H_2l_2-H_{\delta_2}\delta_2=I_1w_1-I_2w_2. \qquad (b)$$

Ici $H_{\delta 1}$ et $H_{\delta 2}$— champs dans les entrefers δ_1 et δ_2 respectivement.

Les termes H_1l_1 et $H_{\delta_1}\delta_2$ figurent dans l'équation avec le signe + puisque dans le premier tronçon le flux Φ_1 est dirigé dans le sens du parcours du circuit.

Les termes H_2l_2 et $H_{\delta_2}\delta_2$ figurent dans le premier membre de l'équation avec le signe—, car ici le flux Φ_2 est opposé au sens du parcours du circuit.

La F.M.M. I_1w_1 figure dans le second membre de l'équation avec le signe+, car elle est dirigée dans le sens du parcours du circuit. Par contre la F.M.M. I_2w_2 figure dans le second membre de l'équation avec le signe—, puisqu'elle est dirigée à l'encontre du parcours du circuit.

Ecrivons l'équation pour la maille périphérique, formée par la première et la troisième branche:

$$H_1l_1+H_{\delta_1}\delta_1-H_3'l_3'-H_3l_3=I_1w_1. \qquad (c)$$

Nous ne résoudrons pas le système de trois équations (a, b, c) à trois inconnues (Φ_1, Φ_2, Φ_3), car nous donnerons au § 61 une solution du problème en question par une méthode plus rationnelle que celle basée sur l'utilisation directe des lois de Kirchhoff, à savoir par la méthode de deux nœuds.

§ 58. Extension aux circuits magnétiques de toutes les méthodes valables pour le calcul des circuits électriques à résistances non linéaires. Nous avons examiné en détail au second chapitre les différents modes de calcul des circuits électriques à RN. Toutes ces méthodes sont également applicables au calcul des circuits magnétiques, puisque les circuits magnétiques et électriques sont régis par les mêmes lois — celles de Kirchhoff.

Le flux dans un circuit magnétique est l'analogue du courant dans un circuit électrique. L'analogue de la F.E.M. est la F.M.M. L'analogue de la caractéristique courant-tension d'une résistance non linéaire est la caractéristique flux-potentiel magnétique d'un tronçon de circuit magnétique.

§ 59. Calcul de la F.M.M. d'un circuit magnétique non ramifié à partir d'un flux donné. On considère comme donnés : la configuration et les dimensions du circuit magnétique, la courbe (ou les courbes) d'aimantation du matériau ferromagnétique et le flux magnétique ou l'induction dans une section quelconque du circuit.

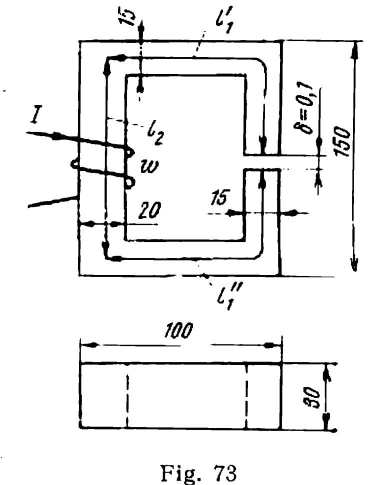


Fig. 73

On cherche la F.M.M., le courant ou le nombre de spires de l'enroulement d'aimantation.

Le calcul est à exécuter dans l'ordre suivant :

1. Divisons le circuit magnétique en un certain nombre de tronçons de section constante et déterminons les longueurs l_k (m) et les sections S_k (m^2) de ces tronçons. Les longueurs des tronçons sont calculées le long de la ligne de force moyenne.

2. En partant de la constance des flux le long de l'ensemble du circuit, de la valeur donnée de ce flux et des sections S_k, trouvons les inductions magnétiques dans chaque tronçon

$$B_k = \frac{\Phi}{S_k}.$$

3. Calculons d'après la courbe d'aimantation le champ H_k pour les tronçons ferromagnétiques du circuit magnétique considéré.

Trouvons le champ dans l'entrefer à l'aide de l'équation

$$H_{A/m} = 0{,}8 \cdot 10^6 B_T. \qquad (3.10$$

4. Calculons la somme des différences de potentiel magnétique le long de l'ensemble du circuit magnétique $\Sigma H_k l_k$ et conformément à la loi du courant total écrivons que cette somme est égale au courant total Iw :

$$\sum H_k l_k = Iw.$$

Pour ce calcul nous avons admis que le flux magnétique reste constant le long de l'ensemble du circuit magnétique. En réalité une faible portion du flux se ferme toujours en dehors du circuit principal. Ainsi, par exemple, pour le circuit magnétique de la fig. 67, le flux sortant du noyau gauche suit dans l'essentiel le parcours *macbn*, mais une faible partie du flux emprunte le parcours *mqn*, dans l'air. Le flux qui se ferme sans suivre le parcours principal est appelé *flux de fuites*.

Exemple 27. Les cotes du circuit magnétique sont données en millimètres sur la fig. 73. La courbe d'aimantation est représentée sur la fig. 70. Trouver le courant qui doit circuler dans l'enroulement comprenant $w = 500$ spires pour que l'induction magnétique dans l'entrefer soit égale à 1 T.

Solution. Divisons le circuit magnétique en trois tronçons:

$$l_1 = l_1' + l_1'' = 30\ cm\ ; \quad S_1 = 4{,}5\ cm^2\ ; \quad l_2 = 13{,}5\ cm\ ; \quad S_2 = 6\ cm^2.$$

L'entrefer :

$$\delta = 0{,}01\ cm\ ; \quad S_\delta = S_1 = 4{,}5\ cm^2.$$

L'induction :

$$B_1 = B_\delta = 1\ T.$$

Nous trouverons l'induction dans le tronçon l_2 en divisant le flux $\Phi = B_\delta S_\delta$ par la section S_2 du deuxième tronçon.

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2}\frac{B_\delta S_\delta}{S_2} = \frac{1\cdot 4{,}5}{6} = 0{,}75\ T.$$

Le champ dans les tronçons l_1 et l_2 est calculé à l'aide de la courbe d'aimantation (fig. 70) pour les valeurs connues de B_1 et B_2

$$H_1 = 300\ A/m, \quad H_2 = 115\ A/m.$$

Le champ dans l'entrefer

$$H_\delta = 0{,}8\cdot 10^6 B_\delta = 0{,}8\cdot 10^6\cdot 1 = 8\cdot 10^5\ A/m.$$

Calculons la différence de potentiel magnétique le long de l'ensemble du circuit magnétique

$$\sum H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta\cdot\delta = 300\cdot 0{,}3 + 115\cdot 0{,}135 + $$
$$+ 8\cdot 10^5\cdot 10^{-4} = 185{,}6\ A.$$

Le courant cherché dans l'enroulement

$$I = \frac{\sum H_k l_k}{w} = \frac{185{,}6}{500} = 0{,}371\ A.$$

§ 60. Calcul du flux dans un circuit magnétique non ramifié à partir d'une F.M.M. donnée. On connaît les cotes du circuit magnétique, la courbe d'aimantation et le courant total: Trouver le flux ou l'induction.

Pour résoudre ce problème il faut construire la courbe du flux en fonction de $\sum H_k l_k$ et trouver sur cette courbe le point de fonctionnement.

Exemple 28. Calculer l'induction magnétique dans l'entrefer du circuit magnétique du problème précédent si Iw est égal à 350 A.

Solution. Prenons pour les valeurs de B_δ dans l'entrefer 0,5 ; 1,1 ; 1,2 et 1,3 T et pour chacune d'elles calculons $\sum H_k l_k$, comme nous avons calculé $\sum H_k l_k$ pour $B_\delta = 1\ T$ dans le problème précédent. Résumons nos calculs dans le tableau suivant :

B_δ, T	0,5	1,1	1,2	1,3
B_1, T	0,5	1,1	1,2	1,3
B_2, T	0,375	0,825	0,9	0,975
H_1, A/m	50	460	700	1020
H_2, A/m	25	150	200	300
H_δ, A/m	$4\cdot10^5$	$8,8\cdot10^5$	$9,6\cdot10^5$	$10,4\cdot10^5$
$\Sigma H_k l_k$, A	58,3	246,3	333	450,5
Φ, Wb	$22,5\cdot10^{-5}$	$49,5\cdot10^{-5}$	$54\cdot10^{-5}$	$58,5\cdot10^{-5}$

En partant des données figurant dans ce tableau, construisons la courbe de $\Phi = f(\Sigma H_k l_k)$, représentée sur la fig. 74 et trouvons sur cette courbe pour $Iw = 350$ A que $\Phi = 55\cdot10^{-5}$ Wb. Par conséquent,

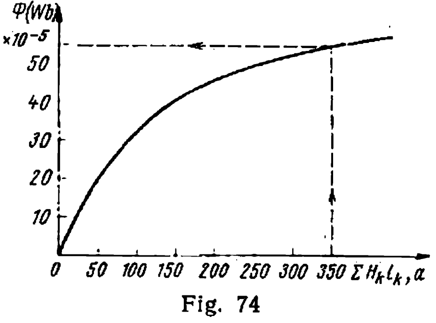


Fig. 74

$$B_\delta = \frac{\Phi}{S_\delta} = \frac{55\cdot10^{-5}}{4,5\cdot10^{-4}} = 1,21\ T.$$

§ 61. Calcul d'un circuit magnétique ramifié par la méthode de deux nœuds. Nous avons déjà signalé qu'on peut employer pour le calcul des circuits magnétiques ramifiés toutes les méthodes examinées au deuxième chapitre.

A titre d'exemple exposons le calcul du circuit magnétique ramifié représenté sur la fig. 75, par la méthode de deux nœuds.

Exemple 29. On part des données suivantes : cotes du circuit (mm) ; courbe d'aimantation, représentée sur la fig. 70 ; $I_1w_1 = 800$ A ; $I_2w_2 = 300$ A, entrefers $\delta_1 = 0,05$ mm et $\delta_2 = 0,2$ mm.

Calculer les flux magnétiques dans toutes les branches du circuit magnétique considéré.

Solution. Désignons, de même que pour le schéma de la fig. 40, les nœuds par les lettres a et b. Fixons comme sens positif des flux Φ_1, Φ_2, Φ_3 celui allant vers le nœud a. Construisons la courbe du flux Φ_1 en fonction de la différence de potentiel magnétique dans la première

branche (courbe *1*, fig. 76). Pour la construire, prenons un certain nombre de valeurs numériques arbitraires de Φ_1 et pour chacune de ces valeurs, calculons l'induction B_1 et ensuite, en utilisant la courbe d'aimantation, le champ magnétique H_1 pour le parcours dans l'acier le long de la première branche.

Fig. 75

Le potentiel magnétique dans le premier tronçon est $U_{M1} = H_1 l_1 + 0{,}8 \cdot 10^6 B_1 \delta_1$; ici $l_1 = 0{,}24$ *m* — la longueur du parcours dans l'acier le long de la première branche.

Calculons ainsi pour chaque valeur du flux Φ_1 les valeurs de U_{M1} et, en partant des points ainsi obtenus, construisons la courbe $\Phi_1 = f(U_{M1})$, courbe *1* de la fig. 76.

Construisons d'une manière identique les courbes $\Phi_2 = f(U_{M2})$ — courbe 2 ; $U_{M2} = H_2 l_2 + 0{,}8 \cdot 10^6 \, B_2 \delta_2$; $l_2 = 0{,}138$ *m* — longueur du parcours dans l'acier le long de la deuxième branche. La courbe 3 représente la fonction $\Phi_3 = f(U_{M3})$; $U_{M3} = H'_3 l'_3 + H''_3 l''_3$: ici $l'_3 \approx 0{,}1$ *m* et $l''_3 \approx 0{,}14$ *m*. Ces longueurs correspondent aux tronçons de la troisième branche, et leurs sections sont de 9 et 7,5 cm^2.

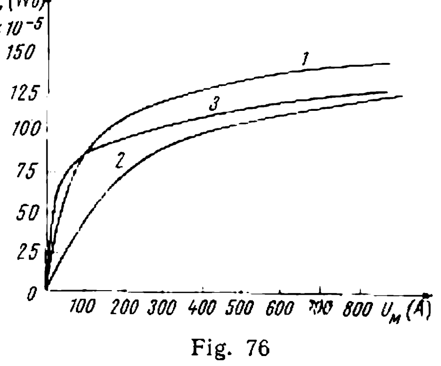


Fig. 76

Le schéma du circuit magnétique de la fig. 75 est analogue, au point de vue formel, au schéma du circuit électrique non linéaire de la fig. 40.

Les flux magnétiques Φ_1 et Φ_2 du circuit magnétique de la fig. 75 sont les analogues des courants I_1 et I_2 du circuit électrique de la fig. 40.

La F.M.M. $I_1 w_1$ est l'analogue de la F.E.M. E_1. La variation du flux magnétique Φ_1, dans la première branche du circuit magnétique, en fonction de la différence de potentiel magnétique U_{M1} le long de la première branche $[\Phi_1 = f(U_{M1})]$ est l'analogue de la variation du courant, dans la première branche, en fonction de la chute de tension dans la résistance de cette branche $[I_1 = f(U_1)]$, etc.

Utilisons cette analogie pour le calcul des flux Φ_1, Φ_2, Φ_3. A cette fin construisons les courbes nécessaires, entièrement analogues aux courbes de la fig. 43.

Rappelons que les courbes de la fig. 43 représentent les courants, circulant dans les diverses branches du circuit, en fonction non pas des chutes de tension (U_1, U_2, U_3) le long de ces branches, mais de la tension U_{ab} entre les deux nœuds (a et b) du circuit de la fig. 40.

En conséquence, introduisons dans le calcul la différence de potentiel magnétique entre les nœuds a et b:

$$U_{Mab} = \varphi_{Ma} - \varphi_{Mb}.$$

Exprimons le potentiel magnétique du point a (φ_{Ma}) en fonction du potentiel magnétique du point b (φ_{Mb}), en effectuant le parcours du point b vers le point a d'abord le long de la première branche, ensuite de la seconde et enfin de la troisième.

Pour la première branche

$$\varphi_{Ma} = \varphi_{Mb} - (H_1 l_1 + H_{\delta 1}\delta_1) + I_1 w_1.$$

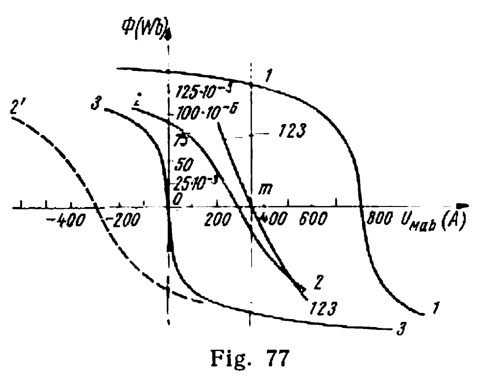


Fig. 77

Ici $H_1 l_1 + H_{\delta 1}\delta_1 = U_{M1}$ est la différence de potentiel magnétique dans la première branche. Nous avons placé le signe— devant la parenthèse car le potentiel magnétique baisse lorsqu'on se déplace dans le sens du flux, de même que le potentiel électrique lorsqu'on se déplace dans le sens du courant; si le parcours se faisait à l'encontre du flux, le potentiel magnétique augmenterait et il faudrait placer le signe+ devant la parenthèse. Nous avons placé le signe+ devant $I_1 w_1$, parce qu'en se déplaçant du point b vers le point a nous effectuons le parcours dans le sens de la F.E.M. $I_1 w_1$. Ainsi pour la première branche nous avons

$$U_{Mab} = \varphi_{Ma} - \varphi_{Mb} = -U_{M1} + I_1 w_1 \qquad \text{(a)}$$

ou

$$U_{M1} = -U_{Mab} + I_1 w_1.$$

De même pour la deuxième branche (en se déplaçant de b vers a dans le sens du flux Φ_2 et dans celui de la F.M.M. $I_2 w_2$) nous avons

$$U_{M2} = -U_{Mab} + I_2 w_2. \qquad \text{(b)}$$

Pour la troisième branche (qui ne comporte pas de F.M.M.)

$$U_{M3} = -U_{Mab}. \qquad \text{(c)}$$

La solution graphique du problème est représentée sur la fig. 77. Sur cette figure la courbe *1* représente $\Phi_1 = f(U_{M\,ab})$; la courbe *2* — — $\Phi_2 = f(U_{M\,ab})$; la courbe *3* — $\Phi_3 = f(U_{M\,ab})$. Ces courbes ont été construites de la même manière que les courbes correspondantes de la fig. 43. L'origine de la courbe *1* est déplacée au point $U_{M\cdot ab} = I_1 w_1 = 800\ A$. L'origine de la courbe *2* se trouve au point $U_{M\,ab} = I_2 w_2 = 300\ A$. La courbe *123* représente la courbe $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 =$

$= f(U_{M\ ab})$. Elle coupe l'axe des abscisses au point m. Traçons une verticale en partant du point m et trouvons ainsi les flux dans les trois branches :

$$\Phi_1 = 126{,}2 \cdot 10^{-5}\ Wb; \quad \Phi_2 = -25 \cdot 10^{-5}\ Wb; \quad \Phi_3 = -101{,}2 \cdot 10^{-5}\ Wb.$$

A la suite du calcul les flux Φ_1 et Φ_2 se sont avérés négatifs ; ceci signifie qu'en réalité ces flux sont dirigés en sens inverse des sens positifs choisis pour ces flux et indiqués par des flèches sur la fig. 75.

Examinons les modifications apportées aux courbes de la fig. 77 si le sens d'une des F.M.M. s'inversait par suite de l'inversion du sens du courant dans son enroulement (par exemple). Supposons, par exemple, que le sens de la F.M.M. I_2w_2 se soit inversé. Dans l'équation (b) la F.M.M. I_2w_2 figurera alors avec un signe —. Ceci se manifestera au cours de la construction par le déplacement de la courbe *2* de la fig. 77 à gauche, parallèlement à elle-même, de manière à couper l'axe des abscisses non pas au point $U_{Mab} = 300\ A$, mais au point $U_{Mac} = -300\ A$ (voir la courbe *2'* en pointillé de la fig. 77). Les courbes *1* et *3* restent inchangées, mais la courbe résultante $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{Mab})$ sera évidemment différente.

§ 62. Comment obtenir un aimant permanent ? Prenons un tore fermé (un noyau toroïdal) en matériau magnétique dur. Pratiquons-y deux saignées radiales très fines à une distance δ l'une de l'autre (fig. 78, *a*).

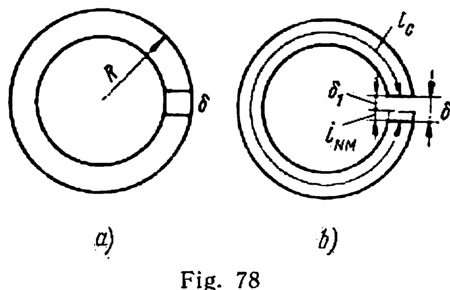


Fig. 78

Laissons en place pour l'instant le morceau du tore ainsi découpé. Ensuite, bobinons un enroulement sur ce tore et faisons circuler dans cet enroulement un courant suffisant pour aimanter le tore jusqu'à saturation. Après ceci coupons le courant et déroulons l'enroulement. Le tore se trouvera aimanté. L'aimantation du tore est le résultat du fait que les moments magnétiques des domaines d'aimantation spontanée ont conservé l'orientation, qui leur avait été communiquée par l'action du champ extérieur.

Le flux magnétique dans le corps du tore est déterminé par la somme des moments magnétiques de l'ensemble du tore.

Enlevons maintenant du tore le morceau précédemment découpé (fig. 78, *b*).

Le volume de la substance aimantée se trouvera ainsi diminué du volume de la partie enlevée, et le flux magnétique dans le corps du tore sera de ce fait également diminué.

Un flux magnétique continuera à circuler dans l'entrefer du tore, même en l'absence sur ce dernier d'un enroulement parcouru par un courant : le dispositif ainsi réalisé est un aimant permanent.

§ 63. Calcul du circuit magnétique d'un aimant permanent. La valeur de l'induction magnétique dans l'entrefer d'un aimant ($B\delta$) dépend du rapport entre la longueur δ de cet entrefer et la longueur de la partie ferromagnétique de l'aimant l_c (fig. 78, *b*). Désignons par : H_δ — champ

dans l'entrefer ; B_c — induction magnétique dans le corps de l'aimant ; H_c — champ magnétique dans le corps de l'aimant.

Calculons les deux inconnues B_c et H_c, en supposant connues la courbe de désaimantation du matériau ferromagnétique, l'épaisseur de l'entrefer δ et la longueur l_c. L'une des relations entre ces valeurs (relation non linéaire) est donnée par la courbe de désaimantation (fig. 79) *. L'autre relation (linéaire) découle de la loi du courant total.

En effet, en partant de la loi du courant total, on peut écrire :

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = H_c l_c + H_\delta \delta = 0. \qquad (3.11)$$

Le second membre de (3.11) est nul. Ceci s'explique par l'absence sur l'aimant permanent d'un enroulement parcouru par un courant. Mais

$$H_{\delta A/m} = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot B_\delta T.$$

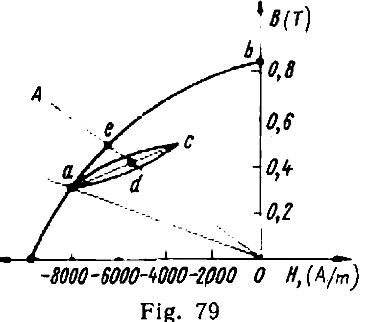


Fig. 79

Si l'entrefer est siffusamment petit, on peut en première approximation admettre qu'il n'existe pas de flux de fuites et que $B_c S_c = B_\delta S_\delta$. Ici S_c — section de l'aimant et S_δ — section de l'entrefer

$$B_\delta = B_c \frac{S_c}{S_\delta}$$

et

$$H_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot B_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \frac{S_c}{S_\delta} B_c.$$

En introduisant H dans (3.11), nous obtenons

$$H_{cA/m} = -N B_{cT}, \qquad (3.12)$$

où

$$N = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot \frac{\delta}{l_c} \frac{S_c}{S_\delta}. \qquad (3.13)$$

Le coefficient N, qui dépend des dimensions géométriques, est appelé facteur de désaimantation **.

Pour calculer H_c et B_c construisons sur la fig. 79 une droite d'équation (3.12). Au point d'intersection de cette droite avec la courbe de désaimantation, les deux relations entre B_c et H_c, auxquelles est subordonnée la solution du problème, se trouvent satisfaites.

Exemple 30. Calculer B_c, $B_\delta H_c$ et H_δ pour un aimant permanent de la fig. 78, *b* avec $R = 5$ *cm*, $\delta = 1$ *cm*. La courbe de désaimantation est représentée sur la fig. 79.

* $H = H_c$ est négatif en abscisses de la fig. 79, à gauche du point O.

** Cette désignation du facteur N rappelle qu'en l'utilisant on peut calculer la désaimantation (la diminution du flux magnétique dans le corps d'un aimant) due à l'introduction d'un entrefer dans le circuit magnétique d'un aimant permanent.

Solution. Si on néglige l'épanouissement latéral des lignes de force magnétiques dans l'entrefer, on a $S_\delta = S_c$. Dans ces conditions le facteur de désaimantation $N = 0{,}8 \cdot \frac{10^6}{2\pi \cdot 5 - 1} = 263 \cdot 10^2$. Construisons sur la fig. 79 la droite Oa, de l'équation $H_c = -263 \cdot 10^2 \cdot B_c$.

Au point a d'intersection de cette droite avec la courbe de désaimantation on a $B_c = 0{,}3\ T$. La même induction existe également dans l'entrefer. Le champ dans le corps de l'aimant $H_c = -8\,000\ A/m$. Le champ dans l'air $H_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}3 = 24 \cdot 10^4\ A/m$.

§ 64. Droite de recul et coefficient de recul. Remplissons partiellement l'entrefer δ sur une longueur l_{Mc} (fig. 78, b) en y introduisant un morceau de matériau magnétique doux. Sous l'effet du champ de l'aimant permanent le morceau introduit s'aimantera et le flux dans le corps de l'aimant augmentera.

Du fait de l'existence de l'hystérésis, l'état magnétique de l'aimant permanent varie non pas suivant le tronçon ab (fig. 79) de la courbe de désaimantation, mais suivant la branche inférieure ac du cycle partiel.

Pour simplifier les calculs on remplace habituellement ce cycle partiel par une ligne droite réunissant ses sommets. Cette ligne est appelée *droite de recul.*

La tangente de l'angle de pente de la droite de recul par rapport à l'axe des abscisses est appelée coefficient de recul. Les valeurs numériques de ce coefficient pour divers matériaux magnétiques durs sont données dans les manuels concernant les aimants permanents.

Désignons la longueur de l'entrefer restant par δ_1 (fig. 78, b)

$$\delta_1 = \delta - l_{Mc}$$

et, en vertu de la loi du courant total, écrivons

$$H_c l_c + H_{\delta 1}\delta_1 + l_{Mc} H_{Mc} = 0.$$

Le champ dans un matériau magnétique doux H_{Mc} étant nettement plus faible que le champ dans un matériau magnétique dur et dans l'entrefer pour la même valeur d'induction magnétique, nous pouvons négliger le terme $H_{Mc} l_{Mc}$ par rapport aux autres termes. Nous obtenons ainsi

$$H_{c\,A/m} = -0{,}8^6 \cdot 10^6 \frac{\delta_1}{l_c} \frac{S_c}{S_\delta} B_{cT}. \qquad (3.12')$$

L'état magnétique d'un aimant permanent est déterminé par l'intersection de la droite de recul avec la droite d'équation (3.12').

Exemple 31. L'entrefer de l'aimant de l'exemple 30 a été diminué de moitié. Trouver la valeur de l'induction dans cet entrefer.

Solution. Trouvons $N = 131{,}5 \cdot 10^2$. La droite OA de la fig. 79 coupe la droite de recul au point d. Par conséquent, $B_c = 0{,}4_T$. La même induction existe dans l'entrefer, puisque $S_\delta = S_c$.

Ainsi, une diminution de l'entrefer, passant de la valeur δ à la valeur δ_1, a entraîné une augmentation de l'induction magnétique dans cet entrefer de 0,3 à $0{,}4_T$.

Si on obtient l'entrefer δ_1 non pas en réduisant sa longueur de la valeur initiale δ à la valeur δ_1, comme ceci a été fait dans l'exemple précédent, mais en découpant dans le corps du tore aimanté un morceau de longueur δ_1, l'état magnétique de ce nouveau aimant est déterminé par l'intersection d du rayon OA avec la courbe de désaimantation baH_c. Dans ce cas $B_c = B_\delta = 0,48_T$, c'est-à-dire qu'elle a augmenté par rapport à l'induction magnétique de l'exemple 31 de $\frac{0,48-0,4}{0,4} \cdot 100 = $ $= 20\%$.

Cet exemple montre nettement que le flux magnétique dans un aimant permanent dépend non seulement de la valeur de l'entrefer, mais également de la manière dont cet dernier a été obtenu.

§ 65. Réluctance et perméance d'un tronçon de circuit magnétique. Loi d'Ohm pour un circuit magnétique. Par définition, la différence de potentiel magnétique $U_M = Hl$, mais

$$H = \frac{B}{\mu_0\mu_r} = \frac{\Phi}{\mu_0\mu_r S}.$$

Ici Φ — flux et S — section du tronçon. Par conséquent,

$$U_M = \frac{l}{\mu_0\mu_r S} = \Phi R_M. \tag{3.14}$$

L'équation (3.14) est appelée loi d'Ohm pour un circuit magnétique:

$$R_M = \frac{l}{\mu_0\mu_r S}. \tag{3.15}$$

Cette équation relie le potentiel magnétique U_M et le flux Φ; R_M est appelé *réluctance du tronçon de circuit magnétique*. L'inverse de la réluctance est appelée *perméance*:

$$G_M = \frac{1}{R_M} = \frac{\mu_0\mu_r S}{l} \tag{3.16}$$

On sait que la caractéristique flux-potentiel d'un tronçon de circuit magnétique n'est pas linéaire dans le cas général. Par conséquent, R_M et G_M sont des fonctions du flux magnétique. Il s'ensuit qu'on utilise les notions de R_M et G_M dans la pratique seulement lorsque le circuit magnétique dans son ensemble ou l'un de ses tronçons, pour lesquels on calcule R_M et G_M, ne sont pas saturés. Ceci arrive le plus souvent lorsqu'il existe dans le circuit magnétique un entrefer suffisamment grand, redressant la caractéristique flux-potentiel du circuit magnétique dans son ensemble ou dans l'un de ses tronçons.

Exemple 32. Trouver R_M de l'entrefer d'un aimant permanent et, en partant de là, le flux magnétique pour: $\delta = 0,5$ *cm*, et section de l'entrefer $S = 1,5$ *cm*^{2}. Le potentiel magnétique dans l'entrefer est de 1920 *A*.

Solution.

$$R_M = \frac{l}{\mu_0\mu_r S} = \frac{5\cdot 10^{-3} m}{1,256\cdot 10^{-6}\,\frac{H}{m}\cdot 1\cdot 1,5\cdot 10^{-4} m^2} = 0,256\cdot 10^8 H^{-1}.$$

$$\Phi = \frac{U_M}{R_M} = \frac{1920}{0,265\cdot 10^8} = 7230\cdot 10^{-8}\ Wb.$$

CHAPITRE IV

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET FORCES MÉCANIQUES AGISSANT DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE

§ 66. Phénomène d'induction électromagnétique. Le phénomène d'induction électromagnétique est l'un des phénomènes les plus importants observés dans un champ magnétique. Conformément à ce phénomène, toute variation d'un flux magnétique à travers un circuit quelconque, indépendamment de la cause de cette variation, induit une force électromotrice e dans ce circuit.

L'expérience montre que la F.E.M. e induite est directement proportionnelle à la vitesse de variation du flux magnétique ψ à travers le circuit

$$e = -\frac{d\psi}{dt}. \qquad (4.1)$$

Le flux total ψ à travers un circuit est égal à la somme algébrique des flux à travers toutes les spires constituant ce circuit *

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots + \Phi_n. \qquad (4.2)$$

Si toutes les spires de l'enroulement w sont traversées par le même flux Φ, on a

$$\psi = w\Phi. \qquad (4.3)$$

Du fait que le nombre des spires w est une grandeur sans dimensions, le flux total est exprimé en les mêmes unités que le flux lui-même. Il importe de faire ici deux observations concernant l'équation (4.1).

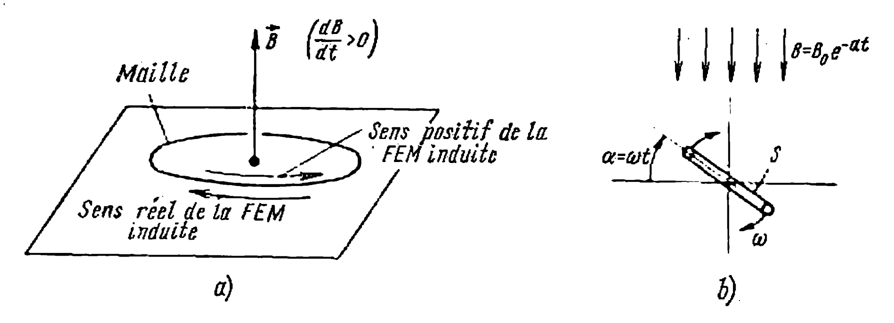


Fig. 80

Première observation : ψ est le flux total ou résultant à travers une maille du circuit ou l'ensemble d'un enroulement ; il est créé non seulement par un flux extérieur par rapport au circuit considéré, mais également par le flux propre, traversant ce circuit lorsqu'un courant électrique y circule.

* Certains auteurs appellent également le flux total « encerclement de flux », suivant le terme anglais « flux linkage ».

La deuxième observation concerne le signe —. Le signe — est utilisé dans (4.1) du fait qu'il est convenu de lier le sens positif pour la F.E.M. induite et le sens positif des lignes d'induction magnétique, traversant le circuit en cas d'augmentation du flux, par la règle du tire-bouchon.

Si on tourne un tire-bouchon de manière que sa pointe se déplace dans le sens des lignes de force magnétiques lorsque le flux augmente, le sens positif pour la F.E.M. induite coïncide avec le sens de rotation de ce tire-bouchon.

Le signe — figure dans le second membre de l'expression (4.1) pour faire correspondre le sens réel de la F.E. M. dans les conditions mentionnées ci-dessus avec le sens choisi comme positif pour cette F.E.M.

La fig. 80, *a* illustre ce qui vient d'être dit.

Exemple 33. Etablir l'équation pour le calcul de la F.E.M. dans un enroulement à w spires, bobiné sur un cadre rectangulaire de surface S. Ce cadre tourne à la vitesse angulaire ω dans un champ magnétique uniforme d'induction $B = B_0e^{-at}$ (80, *b*).

Calculer la valeur numérique de la F.E.M. e pour $\omega t = \frac{\pi}{2}$; $B_0 = 1T$; $a = 10\ s^{-1}$; $S = 4\ cm^2$; $\omega = 31,4\ s^{-1}$; $w = 100$.

S o l u t i o n. Flux total à travers l'ensemble de l'enroulement

$$\psi = w\Phi = wBS\cos\alpha = wB_0Se^{-at}\cos\omega t.$$

Ici l'angle $\alpha = \omega t$ est l'angle formé par le plan du cadre avec le plan horizontal

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -B_0Sw(-ae^{-at}\cos\omega t - \omega e^{-at}\sin\omega t) =$$
$$= B_0Swe^{-at}(a\cos\omega t + \omega\sin\omega t).$$

Calculons la valeur numérique de e pour $\omega t = \frac{\pi}{2}$:

$$t = \frac{\pi}{2\cdot 31,4};\ at = 0,5;\ e = 1\cdot 4\cdot 10^{-4}\cdot 100e^{-0,5}\cdot 31,4 = 0,761\ V.$$

Le calcul d'une F.E.M. induite dans un conducteur de longueur dl, coupant les lignes de force magnétiques d'un champ invariable dans le temps est habituellement effectuée à l'aide de l'expression

$$de = \vec{B}(\vec{dl}\times\vec{v}). \tag{4.4}$$

Ici de — F.E.M. dans le tronçon du conducteur de longueur $\vec{dl}$; $\vec{v}$ — vitesse de déplacement du conducteur par rapport au champ magnétique.

Dans l'expression (4.4) l'induction $\vec{B}$ est multipliée scalairement par le produit vectoriel de $\vec{dl}$ et $\vec{v}$.

S'il résulte du calcul à l'aide de l'expression (4.4) que la F.E.M. est positive, cela signifie que la F.E.M. de est dirigée dans le sens positif de l'élément $\vec{dl}$ du conducteur.

L'expression (4.4) est également valable pour le calcul d'une F.E.M. en cas de déplacement d'un conducteur dans des champs magnétiques uniforme et non uniforme, pourvu que le champ magnétique reste invariable dans le temps.

Lorsqu'un conducteur de longueur l se déplace dans un champ uniforme, il est plus commode de calculer la F.E.M. à l'aide de l'expression

$$e = Blv_n. \tag{4.5}$$

Ici B — induction du champ uniforme, l — longueur de la partie active du conducteur (celle qui coupe les lignes de force magnétiques) et v_n — composante normale (perpendiculaire) au champ magnétique de la vitesse du mouvement du conducteur.

Le sens de la F.E.M. induite, calculée à l'aide de (4.5), est déterminé d'après la règle de la main droite décrite dans le cours de physique: si on place la main droite de manière que l'induction magnétique pénètre dans la paume de la main et que le pouce redressé soit dirigé selon la composante normale de la vitesse du conducteur, la F.E.M. induite dans ce conducteur coïncide avec la direction des quatre autres doigts tendus de la main droite.

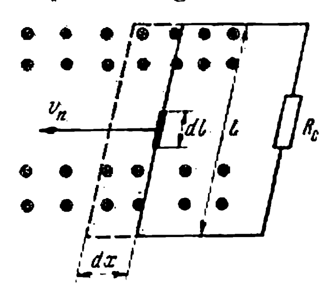


Fig. 81

* * *

On peut démontrer que l'expression (4.1) peut être déduite de (4.5). A cette fin rapportons-nous à la fig. 81 et effectuons certaines opérations.

La fig. 81 représente un champ magnétique non uniforme dirigé normalement à la surface du dessin. Un conducteur de longueur l, faisant partie d'un certain circuit, peut se déplacer dans ce champ. Composante de la vitesse du conducteur, normale au champ,

$$v_n = \frac{dx}{dt},$$

où x — coordonnée dans le sens de v_n. Une F.E.M. est induite dans le tronçon du conducteur de longueur dl; calculons cette F.E.M. à l'aide de (4.5); substituons dl à l: $de = Bv_n\,dl$. La F.E.M. dans un conducteur de longueur l

$$e = \int_0^l Bv_n\,dl = \int_0^l \frac{B\,dx\,dl}{dt}.$$

Le produit $dxdl$ est la surface élémentaire dS traversée par le flux magnétique et $\int_0^l BdS = d\Phi$ est l'accroissement du flux dans le circuit considéré.

Ainsi la valeur numérique de la F.E.M. est égale à $\frac{d\Phi}{dt}$. Du fait que le sens positif pour une F.E.M. induite et le sens positif des lignes d'induction en cas d'accroissement du flux sont liés par la règle du tire-bouchon, il ne faut pas oublier d'introduire le signe —. En définitive (pour $w = 1$)

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

* * *

Expliquons le phénomène d'induction d'une F.E.M. aux extrémités d'un conducteur se déplaçant dans un champ magnétique en faisant appel à la notion des forces de Lorentz.

Il était dit au cours de physique que les charges se déplaçant dans un champ magnétique subissent l'effet des forces mécaniques, proportionnelles à la valeur de ces charges et à la composante de la vitesse, perpendiculaire aux lignes de force du champ magnétique. Ces forces sont appelées *forces de Lorentz*. La force agissant sur la charge électrique q, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique à induction $\vec{B}$ est égale à $q(\vec{v} \times \vec{B})$.

Si un conducteur quelconque se déplace dans un champ magnétique de manière à avoir une composante de vitesse perpendiculaire aux lignes de force de ce champ, les charges positives et négatives, entrant dans la composition des atomes et des molécules de ce conducteur, subissent l'effet des forces de Lorentz.

Les forces appliquées aux porteurs des charges négatives agissent dans un certain sens et celles appliquées aux porteurs des charges positives agissent en sens contraire.

Si le conducteur se déplaçant dans un champ magnétique est en métal, il se forme à l'une de ses extrémités, grâce à la facilité de mouvement dans ce conducteur des porteurs de charges négatives (d'électrons libres), un excédant de charges négatives et à son autre extrémité un défaut de charges négatives (c'est-à-dire un excédent de charges positives).

En d'autres termes, une séparation des charges aura lieu dans un conducteur métallique, grâce aux forces de Lorentz agissant sur les porteurs des charges dans ce conducteur. Des charges positives excédentaires apparaîtront à l'une des extrémités du conducteur et des charges négatives s'accumuleront à l'autre.

Le phénomène de la séparation des charges dans un conducteur, se déplaçant dans un champ magnétique, n'est que le phénomène d'induction d'une F.E.M. dans ce conducteur.

§ 67. Phénomène d'auto-induction et F.E.M. d'auto-induction. Inductance. Le phénomène de production d'une F.E.M. dans un circuit quelconque du fait de la variation du courant circulant dans le même circuit est appelé *auto-induction*. La F.E.M. induite est appelée *F.E.M. d'auto-induction*. La F.E.M. d'auto-induction est désignée par e_L. Pour la calculer, il faut différentier le flux total ψ traversant le circuit produit par le courant i circulant dans ce circuit.

L'expérience a montré que pour des circuits (des bobines) à noyau non ferromagnétique ou pour les bobines à noyaux en magnétodiélectrique pour lesquelles μ_r est pratiquement constant et ne dépend pas du champ magnétique, le flux magnétique total ψ traversant ces circuits est proportionnel au courant i, c'est-à-dire

$$\psi = Li. \tag{4.6}$$

Le coefficient de proportionnalité L entre ψ et i est appelé inductance propre (coefficient d'induction propre) de la maille ou inductance tout court. L'inductance utilisée comme un élément du schéma de remplacement d'un circuit réel permet de tenir compte pour les besoins de calcul du phénomène d'auto-induction et du phénomène d'accumulation d'énergie dans le champ magnétique d'une bobine.

L'inductance L dépend des dimensions géométriques du circuit (de la bobine) et du nombre de spires w, mais ne dépend pas du courant circulant dans la bobine; L est mesuré en $V \cdot s/A = \Omega s =$ *henry* (H):

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = L\frac{di}{dt}$$

et

$$e_L = -L\frac{di}{dt}. \tag{4.7}$$

Ainsi la F.E.M. d'auto-induction dans une bobine est proportionnelle à la vitesse de variation du courant dans cette bobine; la F.E.M. d'auto-induction est nulle si le courant ne varie pas.

Le sens positif de la F.E.M. coïncide avec le sens positif du courant.

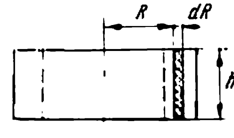
Le signe — figurant dans (4.7) indique que la valeur instantanée de la F.E.M. est négative, lorsque l'accroissement du courant est positif (lorsque $\frac{di}{dt} > 0$).

Pour les bobines à noyau ferromagnétique le flux total ψ (i) à travers ces bobines est une fonction non linéaire du courant, et la F.E.M. d'auto-induction, conformément aux règles de différentiation d'une fonction est:

$$e_L = -\frac{d\psi}{di}\frac{di}{dt} = -L_d\frac{di}{dt}. \tag{4.8}$$

La dérivée $\frac{d\psi}{di}$ est appelée inductance différentielle propre ou inductance différentielle tout court et est désignée par L_d.

L'inductance dynamique est fonction du courant. Pour calculer e_L en fonction du temps à l'aide de (4.8) il faut construire la courbe $L_d = \frac{d\psi}{di} = f(i)$ et déterminer les valeurs de $\frac{di}{dt}$ soit par voie analytique, soit par différentiation graphique de $i = f(t)$ en fonction du temps.



La valeur de e_L s'obtient en multipliant $\frac{di}{dt}$ par $\frac{d\psi}{dt}$, ces valeurs étant prises à l'instant considéré t.

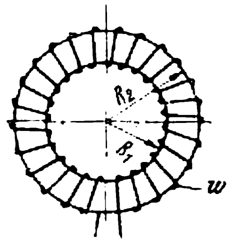


Fig. 82

Exemple 34. Calculer l'inductance d'une bobine enroulée uniformément sur un tore de section rectangulaire (fig. 82). Rayon intérieure du tore $R_1 = 4\,cm$, rayon extérieur $R_2 = 6\,cm$. Hauteur du tore $h = 2\ cm$. Nombre de spires $w = 1000$, $\mu_r = 80$ (le tore est en matériau magnétodiélectrique).

Solution. Le champ dans un tore, conformément à la loi du courant total vaut:

$$H = \frac{Iw}{2\pi R}.$$

Le flux à travers la tranche hdR, hachurée sur la fig. 82, est

$$d\Phi = Bh\,dR = \frac{\mu_0\mu_r Iwh}{2\pi R}\,dR.$$

Le flux total

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0\mu_r Iwh}{2\pi}\int_{R}^{R_2}\frac{dR}{R} = \frac{\mu_0\mu_r Iwh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Le flux magnétique totale à travers les spires de la bobine

$$\psi = w\Phi.$$

L'inductance

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{w^2\mu_0\mu_r h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \qquad (4.9)$$

Par conséquent,

$$L = \frac{1000^2 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2\pi} \ln \frac{6}{4} = 0{,}131 H.$$

E x e m p l e 35. Un courant $i = I_m \sin \omega t$ circule dans la bobine de l'exemple 34. Calculer la F.E.M. d'auto-induction dans cette bobine pour $I_m = 0{,}1\ A$ et $\omega = 10^3\ s^{-1}$.

S o l u t i o n.

$$e_L = -L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t;$$

$$e_L = -10^3 \cdot 0{,}131 \cdot 0{,}1 \cos \omega t = -13{,}1 \cos \omega t V.$$

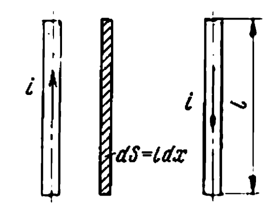


Fig. 83

E x e m p l e 36. Calculer l'inductance d'une ligne de transport d'énergie à deux conducteurs de longueur $l = 10\ km$, la distance d entre les conducteurs étant de 2 m. Diamètre des conducteurs : 12 mm.

S o l u t i o n. La ligne bifilaire (fig. 83) représente pour ainsi dire une spire unique très grande, parcourue par le courant $i = I$.

Le champ dans l'espace entre les conducteurs en un point quelconque, situé sur une droite raccordant les axes des conducteurs, est créé par les deux conducteurs et est égal à la somme des champs, chacun étant calculé suivant la loi du courant total :

$$H = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi (d-x)},$$

où : $d - r \geqslant x \geqslant r$. Le flux à travers la surface élémentaire $dS = l dx$ est

$$d\Phi = B\, dS = Bl\, dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) dx.$$

Le flux total *

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\left(\int_r^{d-r} \frac{dx}{x} + \int_{d-r}^{r} \frac{dx}{d-x}\right) = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-r}{r}.$$

Si $d \gg r$, on a

$$\Phi \approx \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d}{r}$$

* On néglige en résolvant ce problème le flux total circulant dans les conducteurs eux-mêmes.

et

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{r}. \tag{4.10}$$

Et en substituant aux symboles leurs valeurs numériques

$$L=\frac{1{,}256\cdot 10^{-6}\cdot 10^4}{\pi}\ln\frac{200}{0{,}6}=0{,}0232H.$$

§ 68. Phénomène d'induction mutuelle. F.E.M. d'induction mutuelle. Inductance mutuelle des circuits. Le phénomène d'induction d'une F.E.M. dans un circuit quelconque, du fait de la variation du courant dans un autre circuit est appelé *phénomène d'induction mutuelle.*

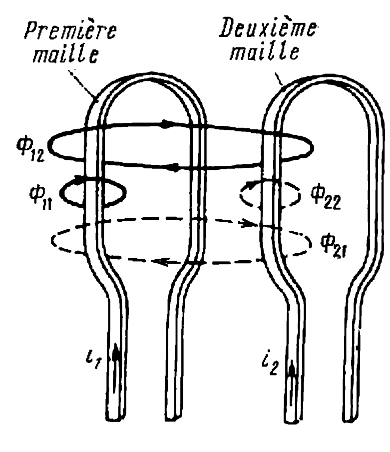


Fig. 84

La F.E.M. ainsi induite est appelée *F.E.M. d'induction mutuelle.* Elle est désignée par e_M. Soit, par exemple, deux circuits éloignés d'une certaine distance l'un de l'autre (fig. 84). Le premier circuit est parcouru par le courant i_1 et le second — par le courant i_2.

Le flux Φ_1, créé par le courant i_1, se ferme partiellement en dehors du deuxième circuit (Φ_{11}) et passe partiellement par ce deuxième circuit (Φ_{12}) *

$$\Phi_1=\Phi_{11}+\Phi_{12}. \tag{4.11}$$

A son tour le flux Φ_2 du deuxième circuit créé par le courant i_2 se ferme partiellement en dehors du premier circuit (Φ_{22}) et partiellement en traversant ce circuit (Φ_{21})

$$\Phi_2=\Phi_{22}+\Phi_{21}. \tag{4.12}$$

Le flux total à travers toutes les spires du premier circuit est

$$\psi_{1tot}=w_1(\Phi_1\pm\Phi_{21})=\psi_1\pm\psi_{21}, \tag{4.13}$$

où w_1 — nombre de spires du premier circuit.

Le flux total à travers les spires du deuxième circuit (w_2 étant le nombre de spires de ce circuit)

$$\psi_{2tot}=w_2(\Phi_2\pm\Phi_{12})=\psi_2\pm\psi_{12}. \tag{4.14}$$

Le signe + dans ces deux dernières équations doit figurer lorsque le flux d'induction mutuelle est dirigé dans le même sens que le flux d'auto-induction créé par le courant du circuit considéré. Lorsque ces deux flux sont en opposition, il faut utiliser le signe —.

---

* Pour rendre la fig. 84 plus facilement compréhensible on y a représenté une seule ligne de force seulement de chacun des flux.

L'expérience a montré que pour des noyaux des bobines en matériau non ferromagnétique ou ferromagnétique à perméabilité μ_r constante, ψ_{21} est proportionnel au courant i_2 et ψ_{12} est proportionnel au courant i_1.

Désignons les coefficients de proportionnalité par la lettre M, munie d'indices appropriés. Ainsi

$$\psi_{21}=M_{21}i_2\,; \tag{4.15}$$

$$\psi_{12}=M_{12}i_1. \tag{4.16}$$

Les coefficients M_{21} et M_{12} sont numériquement égaux (ce qui sera démontré au § 72):

$$M_{21}=M_{12}=M. \tag{4.17}$$

Le coefficient M est appelé *induction mutuelle des circuits* (ou des bobines). Il a les mêmes dimensions que l'auto-induction L.

La F.E.M. globale induite dans le premier circuit

$$e_{1tot}=-\frac{d\psi_{1tot}}{dt}=-\frac{d}{dt}(\psi_1\pm\psi_{21})=-L_1\frac{di_1}{dt}\mp M\frac{di_2}{dt}=e_{1L}+e_{1M}. \tag{4.18}$$

De même pour le deuxième circuit

$$e_{2tot}=-L_2\frac{di_2}{dt}\mp M\frac{di_1}{dt}=e_{2L}+e_{2M}. \tag{4.19}$$

La F.E.M. d'induction mutuelle

$$e_{1M}=\mp M\frac{di_2}{dt}\,. \tag{4.20}$$

$$e_{2M}=\mp M\frac{di_1}{dt}\,. \tag{4.21}$$

Dans les deux dernières équations il faut faire figurer le signe — lorsque les flux d'auto-induction et d'induction mutuelle ont le même sens et utiliser le signe + lorsqu'ils sont de sens contraires. Sous cette réserve, le coefficient M sera toujours une grandeur positive.

En utilisant M comme élément d'un schéma équivalent au circuit réel, on tient compte du phénomène d'induction mutuelle dans les calculs.

On se sert également parfois d'un autre mode d'écriture de la F.E.M. d'induction mutuelle. On écrit ainsi:

$$e_{1M}=-M\frac{di_2}{dt}\,; \tag{4.20'}$$

$$e_{2M}=-M\frac{di_1}{dt}\,; \tag{4.21'}$$

et on admet que le coefficient M peut être soit positif (pour le même sens des flux d'auto-induction et d'induction mutuelle), soit négatif (pour des flux de sens opposés).

L'induction mutuelle M est définie comme rapport $\frac{\varphi_{21}}{i_2}$ ou $\frac{\psi_{12}}{i_1}$. Elle ne dépend ni de ψ_{21} ni de i_2 (et respectivement ni de ψ_{12} ni de i_1) séparément, si les noyaux des bobines ne sont pas ferromagnétiques

ou si ces noyaux sont en matériau ferromagnétique à μ_r constant. L'induction mutuelle M dépend seulement de la position réciproque des bobines, du nombre de spires qu'elles comprennent, des dimensions géométriques des bobines et de la constante μ_r pour le noyau considéré.

Quelle que soit la forme et la disposition réciproque des bobines magnétiquement couplées entre elles, l'induction mutuelle M entre ces bobines peut être déterminée sans difficulté en courant alternatif par voie expérimentale (§ 115). Par contre la détermination analytique de M, du fait du caractère compliqué de la distribution du champ magnétique et des difficultés de nature mathématique, ne peut être faite que pour des bobines des formes géométrique les plus simples.

Si les bobines magnétiquement couplées entre elles ont des noyaux ferromagnétiques à μ_r variable et sont, par exemple, enroulées sur un noyau dont μ_r est une fonction du champ magnétique résultant, M est une grandeur variable.

Il n'est pas rationnel d'utiliser la notion d'induction mutuelle pour de telles bobines.

Exemple 37. Sur le tore de l'exemple 34 on place, en plus du premier enroulement à nombre de spires $w_1 = 1\,000$, un deuxième enroulement avec $w_2 = 500$. Calculer l'induction mutuelle entre ces enroulements.

Solution. Si on admet que la totalité du flux créé par le premier enroulement $\Phi = \dfrac{\mu_0\mu_r I_1 w_1 h \ln\dfrac{R_2}{R_1}}{2\pi}$ (voir exemple 34), traverse le deuxième enroulement également (en négligeant le flux de fuites), $\psi_{12} = w_2\Phi$ et

$$M = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0\mu_r w_1 w_2 h \ln\dfrac{R_2}{R_1}}{2\pi}. \qquad (4.22)$$

Substituons aux symboles leurs valeurs numériques

$$M = \frac{1{,}256\cdot10^{-6}\cdot80\cdot1000\cdot500\cdot2\cdot10^{-2}\cdot0{,}41}{2} = 0{,}0655H.$$

§ 69. Energie du champ magnétique d'une bobine isolée. Branchons à une source de F.E.M. E une bobine d'induction à résistance R et inductance L. Soit, à l'instant $t = 0$, le courant de cette bobine $i = 0$ et $\psi = 0$. Suivant la loi d'Ohm, le courant dans le circuit de la bobine est

$$i = \frac{E + e_L}{R} = \frac{E - \dfrac{d\psi}{dt}}{R},$$

ou

$$E = iR + \frac{d\psi}{dt}. \qquad (4.23)$$

Multiplions les deux membres de l'égalité par idt. Nous obtenons alors

$$Ei\,dt = i^2R\,dt + i\,d\psi. \qquad (4.24)$$

Le premier membre de (4.24) représente l'énergie cédée par la source de F.E.M. pendant le temps $dt \cdot i^2R\,dt$ — énergie dégagée sous forme

de chaleur dans la résistance R pendant le laps de temps $dt.i\,d\psi$ — énergie utilisée pour créer le champ magnétique d'une bobine isolée, fixe non déformable; désignons-la par dW_M

$$dW_M = i\,d\psi. \qquad (4.25)$$

L'énergie totale accumulée dans le champ magnétique de la bobine lorsque ψ varie de 0 à ψ_m,

$$W_M = \int_0^{\psi_m} i\,d\psi.$$

Pour les bobines à noyau non ferromagnétique $\psi = Li$ et $d\psi = Ldi$. Par conséquent,

$$W_M = L\int_0^{I} i\,di = \frac{LI^2}{2}. \qquad (4.26)$$

Ici I—courant établi dans ce circuit.

§ 70. Densité de l'énergie du champ magnétique. Admettons qu'un noyau en forme de tore, pour lequel le rapport du diamètre intérieur au diamètre extérieur est voisin de l'unité *, porte un enroulement à w spires; soit l — longueur de la ligne moyenne du noyau. En vertu de la loi du courant total $Hl = iw$ ou $i = \frac{Hl}{w}$. A son tour $d\psi = wS\,dB$ et

$$W_M = \int_0^{\psi} i\,d\psi = \frac{lwS}{w}\int_0^{B} H\,dB = V\int_0^{B} H\,dB.$$

Divisons les membres extrêmes de cette égalité par le volume V du tore

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \int_0^{B} H\,dB. \qquad (4.27)$$

Ainsi la densité de l'énergie du champ magnétique est

$$\int_0^{B} H\,dB.$$

Si μ_r du noyau du tore est constante, on a

$$B = \mu_0\mu_r H \quad \text{et} \quad dB = \mu_0\mu_r\,dH.$$

Par conséquent,

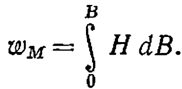
$$w_M = \mu_0\mu_r\int_0^{H} H\,dH = \frac{\mu_0\mu_r H^2}{2} = \frac{HB}{2}. \qquad (4.$$

L'énergie de champ magnétique par unité de volume est :

$$w_M = \frac{HB}{2}.$$

* Grâce à cette hypothèse on peut estimer qu'en première app champ H est le même pour tous les points du corps du tore.

Pour un noyau ferromagnétique $\mu_r \neq \text{const}$ et par conséquent, l'expression (4.28) ne peut être utilisée pour le calcul de l'énergie par l'unité du volume. Pour calculer l'énergie par l'unité de volume d'un noyau ferromagnétique il faut partir de (4.27)



$$w_M = \int_0^B H\,dB.$$

Fig. 85

Le produit $H\,dB$ est représenté sur la fig. 85 par la surface doublement hachurée. L'intégrale représente la surface limitée par la courbe $B = f(H)$, l'axe des ordonnées et la droite $B = \text{const}$.

§ 71. **Pertes hystérétiques par cycle d'aimantation.** Lors de l'aimantation périodique d'un matériau ferromagnétique il s'y déroule des processus non reversibles, qui demandent une certaine dépense d'énergie, à fournir par la source d'aimantation. Les pertes dans le noyau peuvent être réparties en pertes hystérétiques et en pertes par courants de Foucault. Nous examinerons dans le présent paragraphe les pertes par hystérésis. Les pertes par courants de Foucault seront examinées dans la deuxième partie de ce cours. Au point de vue physique les pertes hystérétiques sont dues essentiellement aux pertes par courants de Foucault microscopiques lors de la rotation brusque des vecteurs aimantation des divers domaines aimantés (effet Barkhausen décrit dans le cours de physique).

La surface de la boucle d'hystérésis représente l'énergie dégagée par l'unité de volume de la substance ferromagnétique pendant la durée du cycle d'aimantation.

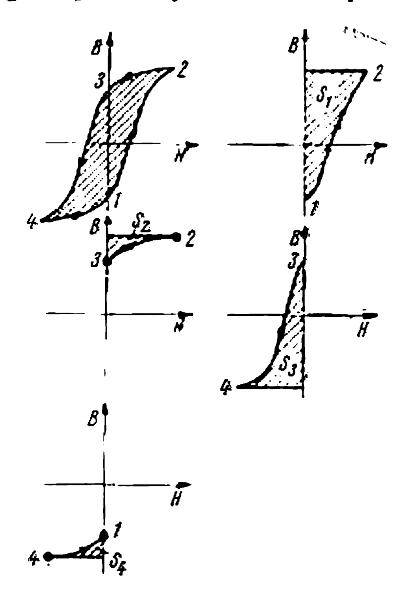


Fig. 86

En effet la surface d'une boucle d'hystérésis est égale à $\oint H\,d\,B$ *. Pour s'en assurer écrivons la surface de la boucle d'hystérésis de la fig. 86 sous forme d'une somme de quatre surfaces

$$\oint H\,dB = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

---

* Le cercle figurant sur le signe de l'intégrale indique que $\int H\,dB$ doit être calculé pour le cycle total de variation de B.

La surface S_1 correspond au déplacement entre le point *1* et le point *2*; puisque sur ce tronçon $H > 0$ et $dB > 0$, le produit

$$H\,dB > 0 \text{ et } S_1 > 0.$$

La surface S_2 correspond au déplacement entre le point *2* et le point *3*; puisque dans cet intervalle $H > 0$ et $dB < 0$ on a $S_2 < 0$.

La surface S_3 correspond au déplacement entre le point *3* et le point *4*; $S_3 > 0$, car $H < 0$ et $dB < 0$.

La surface S_4 correspond au déplacement entre le point *4* et le point *1*; $S_4 < 0$ puisque $H < 0$ et $dB > 0$.

Si un noyau ferromagnétique est soumis à une aimantation périodique (dans des circuits à courant alternatif, par exemple), il doit être exécuté en matériau magnétique doux; afin de réduire les pertes par hystérésis (§ 46).

§ 72. Energie magnétique de deux circuits à couplage magnétique. Soit deux circuits fixes couplés magnétiquement entre eux, de dimensions constantes et se trouvant dans un milieu non ferromagnétique. L'inductance du premier circuit est L_1, du deuxième L_2 et l'inductance mutuelle entre les circuits est M. Calculons l'énergie magnétique des deux circuits pour deux régimes ne différant entre eux que par l'ordre d'établissement des courants i_1 et i_2 dans ces circuits. Prenons l'ordre suivant d'établissement des courants pour le premier régime: on branche d'abord le premier circuit à la source de F.E.M., le deuxième circuit étant ouvert, et on branche ensuite le deuxième circuit à la source de F.E.M., en maintenant constant le courant dans le premier circuit.

L'ordre d'établissement des courants pour le deuxième régime est le suivant: branchons d'abord le deuxième circuit à la source de F.E.M., le premier circuit étant ouvert. Ensuite branchons le premier circuit en maintenant constant le courant dans le deuxième circuit.

Calculons l'énergie magnétique des circuits pour le premier régime.

Lorsque le courant i_1 croît dans le premier circuit de 0 à i_1, le deuxième circuit étant ouvert, l'énergie magnétique emmagasinée dans le premier circuit est

$$\int_0^{i_1} i_1\,d(L_1 i_1) = \frac{L_1 i_1^2}{2}.$$

Lorsque le courant i_2 croît de 0 à i_2, à $i_1 = \text{const}$, l'énergie est emmagasinée non seulement dans le deuxième, mais également dans le premier circuit. Energie emmagasinée dans le deuxième circuit $\int i_2 d\psi_2$. Mais $\psi_2 = L_2 i_2 + M_{12} i_1$ (nous avons supposé que les circuits branchés soient en concordance). Puisque

$$i_1 = \text{const},$$

on a

$$d\psi_2 = L_2\,di_2$$

et

$$\int_0^{i_2} i_2\, d\psi_2 = L_2 \int_0^{i_2} i_2\, di_2 = \frac{L_2 i_2^2}{2}.$$

L'accroissement du courant i_2 donne lieu à une variation du flux total à travers les spires du premier circuit. Ce flux devient $\psi_1 = L_1 i_1 + M_{21} i_2$. Par conséquent, l'énergie due au flux d'induction mutuelle est

$$\int_0^{i_2} i_1 M_{21}\, di_2 = M_{21} i_1 i_2.$$

Energie magnétique globale des deux circuits, couplés magnétiquement entre eux, lors de l'établissement des courants suivant le premier régime

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M_{21} i_1 i_2.$$

En raisonnant de même pour le deuxième régime d'établissement des courants, nous obtenons

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M_{12} i_1 i_2.$$

Les deux régimes ne différant l'un de l'autre que par l'ordre d'établissement des courants, il est naturel que l'énergie magnétique pour ces deux régimes soit la même. Il en découle, premièrement, que

$$M_{21} = M_{12} = M \tag{4.29}$$

et, deuxièmement, que

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm M i_1 i_2. \tag{4.30}$$

Le signe + figurant devant le terme $M i_1 i_2$ correspond au branchement des circuits dans le même sens et le signe — à leur branchement en opposition.

Exemple 38. Un courant de 0,5 A circule dans l'enroulement w_1 du tore de l'exemple 37, l'enroulement w_2 du même tore étant parcouru par un courant de 0,4 A. Calculer l'énergie magnétique, lorsque les flux dans les deux enroulements ont le même sens ou sens opposés.

Solution. Calculons à l'aide de (4.9) l'inductance du deuxième enroulement

$$L_2 = 0{,}0327 H.$$

Conformément à (4.30), et pour le même sens des flux

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2 = \frac{0{,}131 \cdot 0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}0327 \cdot 0{,}4^2}{2} + 0{,}0655 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}032 J.$$

Et pour un sens opposé des flux

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} - M i_1 i_2 = 0{,}00585 J.$$

§ 73. **Principe de réciprocité d'induction mutuelle.** Effectuons les deux essais suivants. Lors du premier essai faisons circuler un courant variable en fonction du temps $i_1(t)$ dans la première bobine (maille) et mesurons (calculons) la F.E.M. d'induction mutuelle induite dans la deuxième bobine (circuit), couplée magnétiquement avec la première. Cette F.E.M. est

$$e_{2M} = -M\frac{di_1}{dt}.$$

Au cours du deuxième essai faisons circuler le même courant (à amplitude identique et variant en fonction du temps suivant la même loi qu'au cours du premier essai), désigné cette fois-ci $i_2(t)$, à travers la deuxième bobine et mesurons (ou calculons) la F.E.M. d'induction mutuelle induite dans la première bobine. Cette F.E.M. est

$$e_{1M} = -M\frac{di_2}{dt}.$$

D'après les conditions d'exécution de l'essai $i_1(t) = i_2(t)$ et, par conséquent, $e_{1M} = e_{2M}$.

En d'autres termes les F.E.M. d'induction mutuelle sont égales dans les deux essais décrits ci-dessus. Cet état de chose est appelé *principe de réciprocité de l'induction mutuelle.*

Puisque $M_{12} = M_{21} = M$, il faut pour déterminer M par voie de calcul ou expérimentale choisir la méthode la plus simple et la plus commode des deux méthodes possibles.

Ainsi, par exemple, supposons qu'un conducteur placé d'une manière quelconque à l'intérieur d'un tore, traverse un enroulement w bobiné d'une manière uniforme sur ce tore (fig. 87). Ce conducteur est une portion d'un circuit à spire unique non représenté entièrement sur le schéma. On demande de trouver l'expression analytique pour M entre le tore et cette maille de ce circuit à spire unique. Ce problème peut être résolu par deux méthodes.

Première méthode; faisons passer mentalement dans le premier circuit (l'enroulement w_1 du tore), le courant i_1, trouvons ψ_{12}, qui est la partie du flux magnétique totale du premier circuit traversant le deuxième circuit (à spire unique) et écrivons:

$$M = \frac{\psi_{12}}{i_1}.$$

Fig. 87

Deuxième méthode; faisons passer mentalement dans le deuxième circuit (à spire unique), à nombre de spires $w_2 = 1$, un courant i_2, trouvons la partie du flux totale du deuxième circuit traversant le premier circuit (ψ_{21}) et écrivons:

$$M = \frac{\psi_{21}}{i_2}.$$

Au point de vue analytique les deux méthodes ne sont pas équivalentes. La première méthode est nettement plus simple que la deuxième. En effet le flux créé par le premier circuit se ferme en totalité à l'intérieur du tore et traverse entièrement le circuit à une seule spire et, par conséquent, le flux ψ_{12} peut être facilement trouvé; tandis qu'il est bien plus difficile de calculer le flux créé par

le circuit à une seule spire et traversant le deuxième circuit si le conducteur en question est placé arbitrairement à l'intérieur du tore.

Flux dans le tore

$$\Phi_1 = \frac{i_1\mu_0\mu_r w_1 h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \frac{i_1\mu_0\mu_r w_1 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Flux total à travers les spires du tore

$$\psi_{21} = w_2\Phi_1 = 1\cdot\Phi_1 = \Phi_1$$

et

$$M = \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0\mu_r w_1 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \qquad (4.31)$$

Exemple 39. Un conducteur unique passe à travers le tore de l'exemple 34. Trouver M entre ce conducteur et l'enroulement w.

Solution. A l'aide de 4.31 (la comparer à 4.22) pour $w_2 = 1$, on trouve

$$M = \frac{1{,}256\cdot 10^{-6}\cdot 80\cdot 1000\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}41}{2\pi} = 1{,}31 mH.$$

Exemple 40. Le courant $i_2 = 100\ (1 - e^{-2t})\ A$ circule dans le conducteur unique de l'exemple 39. Calculer la F.E.M. induite dans l'enroulement w_1.

Solution.

$$e_{M1} = -M\frac{di_2}{dt} = -1{,}31\cdot 10^{-3}\cdot 100\cdot 2e^{-2t} = -0{,}262e^{-2t}V.$$

§ 74. Coefficient de couplage. On appelle coefficient de couplage k des deux circuits magnétiquement couplés, à inductances L_1 et L_2 et à inductance mutuelle M, le rapport de M * à $\sqrt{L_1L_2}$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}. \qquad (4.32)$$

On peut démontrer que k ne peut être supérieur à l'unité. Pour s'en assurer écrivons l'équation pour k^2 et si on arrive à démontrer que $k^2 = \frac{M^2}{L_1L_2} \leqslant 1$, on a $k \leqslant 1$. Utilisons les notations du § 68 et écrivons:

$$k^2 = \frac{MM}{L_1L_2} = \frac{\frac{w\Phi_{12}}{i_1}\cdot\frac{w_1\Phi_{21}}{i_2}}{\frac{w_1(\Phi_{12}+\Phi_{11})}{i_1}\cdot\frac{w_2(\Phi_{21}+\Phi_{22})}{i_2}} = \frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{(\Phi_{12}+\Phi_{11})(\Phi_{21}+\Phi_{22})} < 1;$$

k^2 n'est égal à 1 que si la totalité du flux créé par le premier circuit passe entièrement à travers toutes les spires du second.

§ 75. Energie magnétique d'un système de circuits parcourus par des courants. Ecrivons l'expression générale pour l'énergie magnétique d'un système de circuits à couplage magnétique. Pour cela prenons

* Notons à cette occasion que M peut être plus grand que L_1 (ou L_2) mais ne peut pas être plus grand que L_1 et L_2 en même temps.

l'équation (4.30) et récrivons-la de la manière suivante

$$W_M = \frac{L_1 i_1^2}{2} \pm \frac{M i_1 i_2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm \frac{M i_1 i_2}{2} =$$

$$= \frac{(L_1 i_1 \pm M i_2)\, i_1}{2} + \frac{(L_2 i_2 \pm M i_1)\, i_2}{2} = \frac{i_1 \psi_1}{2} + \frac{i_2 \psi_2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} i_k \psi_k .$$

Une expression analogue peut être établie pour n circuits à couplage magnétique au bien de deux seulement

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} i_k \psi_k , \qquad (4.33)$$

ici ψ_k est le flux total à travers toutes les spires du circuit k.

§ 76. Forces mécaniques agissant dans un champ magnétique. Nous avons décrit dans le § 66 le phénomène d'induction électromagnétique comme l'une des propriétés essentielles d'un champ magnétique. Considérons-la comme première propriété.

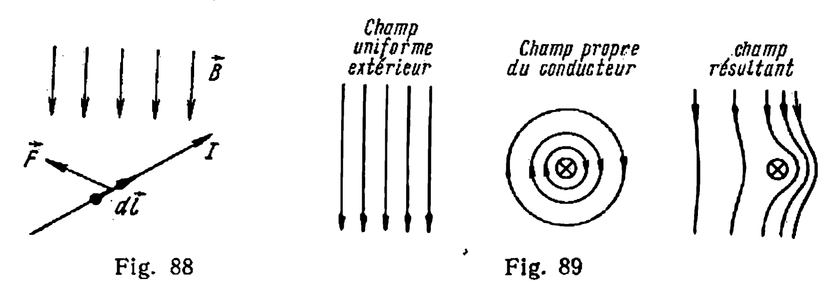


Fig. 88

Fig. 89

La deuxième propriété importante d'un champ magnétique est son interaction mécanique avec un courant électrique. Il existe une interaction entre un champ magnétique à induction $\vec{B}$ (fig. 88) et un élément de courant $I\,d\vec{l}$ et que la force ainsi développée

$$\vec{F} = I\,[d\vec{l} \times \vec{B}]. \qquad (4.34)$$

Cette force est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et à $\vec{B}$. Si l'angle entre $d\vec{l}$ et $\vec{B}$ est nul, le produit vectoriel $d\vec{l} \times \vec{B}$ est nul également et le champ magnétique n'exerce aucune action mécanique sur l'élément de courant $I\,d\vec{l}$. La force est maximale si $\vec{B}$ et $d\vec{l}$ sont perpendiculaires.

L'action mécanique exercée par le champ sur un courant s'explique au point de vue physique par la tendance des lignes de force déformées du fait de la présence du conducteur de se redresser.

On voit trois croquis sur la fig. 89 Le premier représente les lignes de force d'un champ magnétique uniforme avant l'introduction dans

ce dernier d'un conducteur parcouru par un courant. Le deuxième croquis représente les lignes de force d'un conducteur isolé, parcouru par un courant. On voit sur le troisième les lignes de force du champ résultant. A gauche du conducteur les lignes de force du champ propre de ce conducteur sont dirigées en sens contraire des lignes de force du champ extérieur uniforme et, à droite, elles sont orientées dans le même sens que les lignes de ce champ. Par conséquent, le champ résultant est atténué à gauche du conducteur et renforcé à sa droite. Les lignes de force, en tendant de se redresser, exercent sur le conducteur une pression de droite à gauche.

Lorsque le champ magnétique et le conducteur parcouru par le courant sont disposés perpendiculairement l'un à l'autre, on peut retenir le sens d'application de la force grâce à une règle mnémonique, appelée *règle de la main gauche*; elle s'énonce comme suit : si on place la main gauche de manière que les lignes de force pénètrent dans la paume, les doigts redressés étant dirigés dans le sens du courant, le pouce redressé indique le sens de la force exercée.

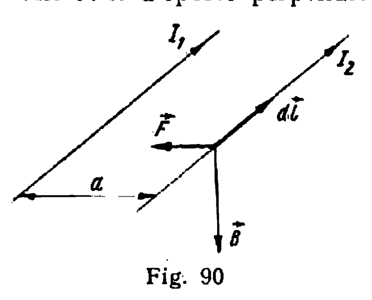


Fig. 90

L'interaction du champ avec le courant a lieu indépendamment des causes ayant engendré le champ magnétique, cette interaction existe, qui soit le résultat de la circulation de microcourants dans des circuits électriques ou celui de la circulation de microcourants dans des matériaux ferromagnétiques ou encore d'un flux d'électrons dans un tube électronique, etc. Elle est observée dans un champ constant, comme dans un champ variable en fonction du temps.

Les forces mécaniques engendrées dans un champ magnétique sont souvent appelées forces électrodynamiques, leur dénomination soulignant en quelque sorte qu'à la suite de l'action de ces forces il peut apparaître dans le système, et apparaît souvent en effet, un déplacement des corps, c'est-à-dire un processus dynamique.

Exemple 41. La fig. 90 représente deux conducteurs parallèles, placés à une distance $a = 10\ cm$ l'un de l'autre. Le premier de ces conducteurs est parcouru par le courant $I_1 = 1000\ A$ et le second $I_2 = 500\ A$. Les sens des courants sont indiqués par des flèches. Déterminer la force d'interaction entre les conducteurs sur une longueur de $1\ m$.

Solution. Utilisons l'équation (4.34). Notons que l'angle entre un élément de longueur du conducteur $\vec{dl}$ et l'induction $\vec{B}$ est égal à 90°.

Par conséquent, le module du produit vectoriel $\vec{dl} \times \vec{B}$ est égal à $dl\,B \sin 90° = dl\,B$.

L'induction magnétique B créée par le premier conducteur aux points où se trouve le deuxième conducteur est égale, conformément à la loi du courant total, à $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$.

La force

$$F = I_2\, dlB = \frac{I_1 I_2 \mu_0\, dl}{2\pi a};$$

$$F = \frac{1000 \cdot 500 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{2\pi \cdot 0{,}1} \approx 1N.$$

Sous l'effet de cette force les conducteurs tendent à se rapprocher.

Pour conclure, notons ce qui suit. On dit habituellement qu'un champ magnétique exerce un effet mécanique sur un conducteur parcouru par un courant, se trouvant dans ce champ. Cette affirmation demande quelques précisions.

En réalité, un champ magnétique exerce une action mécanique sur les charges en mouvement ordonné dans un conducteur (forces de Lorentz, voir § 66) et ces charges, à leur tour, en entrant en collision dans leur mouvement ordonné avec d'autres particules de la substance du conducteur transmettent l'effort au conducteur lui-même.

§ 77. Expression de la force mécanique sous forme de dérivée de l'énergie du champ magnétique par rapport à une coordonnée. Prenons un système de n circuits parcourus par des courants. Supposons que l'un des circuits se déplace sous l'effet de la force mécanique F exercée sur lui par les autres circuits du système, de manière que sa coordonnée x varie de dx. Il faut trouver la relation qui existe entre la force F et la variation de l'énergie du champ magnétique dW_M du système.

Ecrivons pour un circuit quelconque k du système l'équation suivante (à comparer avec l'équation 4.23)

$$e_k = i_k R_k + \frac{d\psi_k}{dt}, \tag{4.35}$$

où ψ_k est le flux total à travers toutes les spires du circuit k. Il dépend non seulement du courant i_k dans le circuit k, mais également des courants dans les autres circuits couplés magnétiquement avec le circuit k. Multiplions (4.35) par $i_k\, dt$:

$$e_k i_k\, dt = i_k^2 R_k\, dt + i_k\, d\psi.$$

Ecrivons des équations analogues pour les autres circuits et faisons leur somme:

$$\sum_{k=1}^{n} e_k i_k\, dt = \sum_{k=1}^{n} i_k^2 R_k\, dt + \sum_{k=1}^{n} i_k\, d\psi. \tag{4.36}$$

Le terme $\sum\limits_{k=1}^{n} i_k\, d\psi$ représente la partie de l'énergie, reçue par tous les circuits à partir des sources de F.E.M., après déduction des pertes par effet Joule.

Lorsqu'un circuit quelconque se déplace d'une distance dx, l'énergie magnétique W_M du système varie de dW_M et un travail mécanique $F\, dx$, où F est la composante de la force agissant dans la direction x, est accompli dans le système.

Conformément à la loi de la conservation de l'énergie, l'énergie fournie par les sources de F.E.M. pendant un temps dt doit être égale à l'énergie dissipée pendant le même laps de temps sous forme de chaleur dans les résistances du circuit, plus l'énergie dépensée à effectuer le travail mécanique $F\, dx$, plus l'accroissement de l'énergie du champ magnétique dW_M:

$$\sum_{k=1}^{n} e_k i_k\, dt = \sum_{k=1}^{n} i_k^2 R_k\, dt + F\, dx + dW_M. \tag{4.37}$$

En confrontant (4.36) et (4.37) on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} i_k\, d\psi_k = F\, dx + dW_M. \tag{4.38}$$

L'équation (4.38) indique que le travail mécanique et l'accroissement de l'énergie du champ magnétique sont accomplis aux dépens de la partie de l'énergie $\sum_{k=1}^{n} e_k i_k \, dt$ des sources, cédée par ces dernières au circuit après déduction des pertes par effet Joule. Il résulte de (4.38)

$$F = \frac{\sum_{k=1}^{n} i_k \, d\psi_k - dW_M}{dx}. \qquad (4.39)$$

L'équation (4.39) a un caractère assez général. On peut en déduire deux cas particuliers importants. Dans le premier d'entre eux le déplacement se fait de manière que le flux magnétique total à travers les spires des circuits reste inchangé. Dans ce cas

$$d\psi_k = 0; \; F \, dx = -dW_M$$

et

$$F = -\frac{dW_M}{dx}. \qquad (4.40)$$

Le signe — indique ici que le travail mécanique est accompli aux dépens de l'énergie du champ magnétique.

Pour le deuxième cas particulier, admettons que le déplacement se fasse de manière que les courants dans les circuits restent inchangés (i_k = const). Ceci peut avoir lieu, par exemple, lorsque le déplacement se fait si rapidement que les courants n'ont pas le temps de varier.

Il découle de ce qui précède (voir équation 4.33) que

$$W_M = \frac{1}{2} \sum i_k \psi_k.$$

Par conséquent,

$$dW_M = \frac{1}{2} \, d\Sigma i_k \psi_k = \frac{1}{2} \Sigma i_k \, d\psi_k. \qquad (4.41)$$

Substituons (4.41) dans (4.39):

$$F = \frac{\sum_{k=1}^{n} i_k \, d\psi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} i_k \, d\psi_k}{dx} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} i_k \, d\psi_k}{dx} = \frac{dW_M}{dx}. \qquad (4.42)$$

Dans le second cas particulier examiné, l'expression de la force mécanique ne diffère que par son signe de (4.40).

Pour i_k = const, l'énergie fournie au circuit par les sources de F.E.M. peut être répartie en deux parties égales, après déduction de perte par effet Joule. Une de ces parties est dépensée pour accroître l'énergie du champ magnétique dW_M et l'autre pour accomplir le travail mécanique Fdx. Les équations (4.40) et (4.42) sont souvent utilisées pour trouver la force mécanique. Pour calculer la force F il faut soit écrire l'équation analytique pour l'énergie magnétique du système et différencier ensuite cette équation par rapport à la coordonnée variable, soit relever par voie expérimentale la courbe de variation de l'énergie magnétique en fonction de la coordonnée variable et ensuite différencier cette courbe par la méthode graphique.

§ 78. **Force portante d'un électro-aimant.** Admettons que l'armature d'un électro-aimant soit éloignée d'une certaine distance x de sa culasse (fig. 91). L'armature comme la culasse sont en matériau magnétique doux et ne sont pas saturées. Désignons par S la surface totale des deux entrefers. Calculons l'énergie du champ magnétique emmagasinée dans l'entrefer en négligeant l'épanouissement des lignes de force.

L'énergie magnétique dans un entrefer est égale au produit de la densité d'énergie $\frac{BH}{2}$ par le volume de l'entrefer Sx, occupé par le champ magnétique:

$$W_{M.e.f.}=\frac{BH}{2}=Sx.$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'armature et la culasse sont en matériau magnétique doux et ne sont pas saturées. Par conséquent, le champ dans l'une comme dans l'autre est des centaines et même des milliers de fois plus faible que le champ dans l'entrefer, pour une même induction magnétique. Il en découle que l'énergie magnétique dans l'armature et la culasse, et à condition que l'entrefer ne soit pas très petit, n'est qu'une faible partie de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'entrefer

$$W_M=W_{e.f.}+W_{culas.\ et\ arm.}\approx W_{e.f.}$$

Pour calculer la force portante, utilisons l'équation (4.40), c'est-à-dire calculons cette force en supposant que le flux magnétique soit invariable

$$F=\left|\frac{dW_M}{dx}\right|^{*}=\frac{BH}{2}S=\frac{B^2}{2\mu_0}S.$$

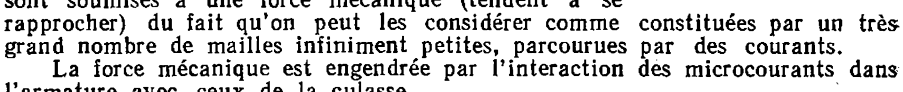
Substituons à μ_0 sa valeur $1{,}256\cdot10^{-6}$ H/m et exprimons B en T. Nous obtenons alors

$$F\,(N)=0{,}398\cdot10^6\cdot B^2ST\cdot m^2. \qquad (4.43)$$

Fig. 91

Au point de vue physique, l'armature et la culasse sont soumises à une force mécanique (tendent à se rapprocher) du fait qu'on peut les considérer comme constituées par un très grand nombre de mailles infiniment petites, parcourues par des courants.

La force mécanique est engendrée par l'interaction des microcourants dans l'armature avec ceux de la culasse.



E x e m p l e 42. La résistance R de l'enroulement de l'électro-aimant (w = 900) de la fig. 91 est égale à 13,8 Ω.

En négligeant le flux de fuites et l'épanouissement de lignes magnétiques dans l'entrefer, calculer la valeur de la F.E.M. E de la source d'alimentation pour que l'armature de l'électro-aimant soit attirée par la culasse avec une force F = 100 kg = 981 N; S = 2·20 = 40 cm^2; l_1 = 55 cm; x = 0,2 cm; l_2 15 cm. L'armature et la culasse sont en matériau magnétique doux, dont la courbe d'aimantation est représentée sur la fig. 70.

S o l u t i o n. Suivant (4.43) écrivons

$$B=\sqrt{\frac{F}{0{,}398\cdot10^6\cdot S}}=\sqrt{\frac{981}{0{,}398\cdot10^6\cdot40\cdot10^{-4}}}=0{,}785T.$$

Conformément à la loi du courant total $\Sigma U_M=Iw$:

$$\Sigma U_M=0{,}8\cdot10^6\cdot B\cdot2x+(l_1+l_2)\,H_c=0{,}8\cdot0{,}785\cdot10^6\cdot4\cdot10^{-3}+0{,}7\cdot120=2589A.$$

Le courant sera

$$I=\frac{\Sigma U_M}{w}=\frac{2589}{900}=2{,}873A.$$

Et la F.E.M.

$$E=IR=40V.$$

---

* La force portante est calculée en module. Le signe — figurant dans (4.40) indique que cette force est obtenue aux dépens de l'énergie du champ magnétique.

Si on calcule cette force à l'aide de (4.42) en partant de l'invariabilité du courant, on peut constater qu'elle est inversement proportionnelle au carré de la distance x.

§ **79. Loi d'inertie électromagnétique. Règle de Lenz.** La règle s'énonce de la manière suivante: en cas de variation quelconque d'un flux magnétique encerclé par un circuit conducteur quelconque, des forces de nature électrique et mécanique apparaissent dans ce circuit et tendent à maintenir constant le flux magnétique.

Ici la force de nature électrique doit être interprétée comme suit: pour chaque variation du flux magnétique encerclé par un circuit conducteur fermé il apparaît dans ce circuit une F.E.M. induite qui tend à engendrer dans le dit circuit un courant s'opposant à la variation du flux total à travers ce circuit.

Quant à la force mécanique agissant sur le circuit, elle tend à s'opposer à toute modification des dimensions linéaires du circuit ou à sa rotation.

Examinons ces forces à l'aide de l'exemple numérique suivant.

Exemple 43. Soit un conducteur droit de longueur $l = 0{,}5\ m$ placé perpendiculairement à un champ magnétique uniforme et invariable dans le temps (fig. 81), à induction $B = 1{,}5\ T$. Ce conducteur est raccordé par des fils flexibles à la charge R_c. L'impédance de circuit fermé R est égale à 20Ω. Si le conducteur reste fixe, aucune F.E.M. n'y est induite et aucune force mécanique ne lui est appliquée.

Mais lorsque le conducteur commence à se déplacer, à gauche, par exemple, à une vitesse $v_n = 10\ m/s$ de manière que la maille reste fermée, une F.E.M. y sera induite (voir (4.5))

$$e = Blv_n = 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 10 = 7{,}5V;$$

et le courant suivant circulera dans le conducteur

$$i = \frac{e}{R} = 0{,}375A.$$

Lorsque le conducteur se déplace à gauche, le flux du champ magnétique extérieur traversant le circuit augmente. Le courant induit (dirigé dans le sens des aiguilles d'une montre donne naissance à un champ magnétique, dirigé à l'encontre du champ extérieur et tend à s'opposer à l'accroissement du flux à travers le circuit.

Le conducteur est également soumis à une force mécanique. Cette force est dirigée en sens contraire de la vitesse v_n et tend également à maintenir invariable le flux magnétique.

CHAPITRE V

CIRCUITS ÉLECTRIQUES À COURANT SINUSOÏDAL MONOPHASÉ

§ 80. Courant sinusoïdal et grandeurs fondamentales qui le caractérisent. On appelle courant sinusoïdal un courant qui varie en fonction du temps suivant une loi sinusoïdale

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \psi\right) = I_m \sin(\omega t + \psi). \tag{5.1}$$

Sa courbe est représentée sur la fig. 92. La valeur maximale de cette fonction est appelée amplitude. L'amplitude du courant est désignée par I_m; T est la période des oscillations, c'est-à-dire le temps nécessaire pour qu'une oscillation totale soit accomplie.

La fréquence

$$f = \frac{1}{T} \tag{5.2}$$

est égale au nombre d'oscillations par seconde. La fréquence f est mesurée en $1/s$ ou en hertz (Hz).

La grandeur

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

appelée fréquence angulaire ou pulsation est mesurée en rad/s ou $1/s$.

L'argument du sinus, c'est-à-dire la grandeur $(\omega t + \psi)$ est appelé phase. La phase caractérise l'état de l'oscillation (c'est-à-dire sa valeur numérique) à l'instant t considéré.

La valeur de la phase pour $t = 0$, c'est-à-dire l'angle ψ, est appelée phase initiale.

N'importe quelle fonction sinusoïdale est entièrement déterminée par les trois grandeurs suivantes : son amplitude, sa fréquence angulaire et sa phase initiale.

En U.R.S.S. et en Europe occidentale la fréquence de 50 Hz est normalisée * et les installations à courant sinusoïdal ont habituellement cette fréquence. Aux U.S.A. la fréquence normalisée est égale à 60 Hz. D'une façon générale, la plage des fréquences des courants sinusoïdaux utilisés dans la pratique est très étendue. Elle commence à des fractions de hertz comme par exemple, dans la prospection géologique et va jusqu'à plusieurs milliards de hertz en radiotechnique.

Le courant et les F.E.M. sinusoïdaux à fréquences relativement basses (jusqu'à plusieurs kilohertz environ) sont produit habituellement par des machines tournantes, à savoir des alternateurs synchrones, étudiés dans le cours des machines électriques.

Les courants et les F.E.M. sinusoïdaux à hautes fréquences sont obtenus à l'aide de générateurs à lampes, étudiés en détail dans le cours de

* Pour la production d'énergie électrique.

radiotechnique et examinés sommairement dans la deuxième partie de ce cours. Le principe de la génération d'une F.E.M. sinusoïdale lorsqu'on tourne une spire avec vitesse angulaire constante dans un champ magnétique uniforme, a été décrit dans l'exemple 33 (pour $A = 0$).

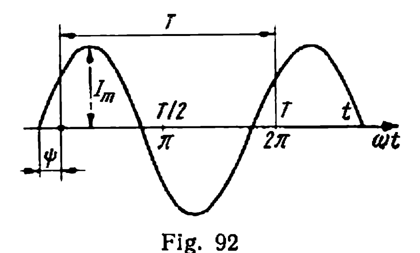


Fig. 92

Un générateur de F.E.M. sinusoïdale est désigné dans les schémas électriques par un cercle avec le signe de la sinusoïde ~ et une flèche tracée à côté. Cette flèche indique le sens pris comme positif pour la F.E.M.

§ 81. Valeurs moyenne et efficace d'une grandeur sinusoïdale. On entend par valeur moyenne d'une grandeur qui varie suivant une loi sinusoïdale sa valeur moyenne au cours d'une alternance (demi-période). Ainsi, la valeur moyenne du courant

$$I_{moy} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} I_m, \tag{5.4}$$

autrement dit la valeur moyenne d'un courant sinusoïdal est égale à $\frac{2}{\pi} = 0{,}638$ de sa valeur d'amplitude. De même

$$E_{moy} = \frac{2}{\pi} E_m; \quad U_{moy} = \frac{2}{\pi} U_m.$$

La notion de la valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale (on l'appelle également valeur moyenne quadratique) est très largement utilisée. La valeur efficace du courant

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_m. \tag{5.5}$$

Par conséquent, la valeur efficace d'un courant sinusoïdal est égale à 0,707 de sa valeur d'amplitude. De même

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

On peut comparer l'effet calorifique (l'effet Joule) d'un courant sinusoïdal et l'effet Joule d'un courant continu I_{cont}, circulant pendant le même laps de temps dans la même résistance.

La chaleur dégagée par le courant sinusoïdal pendant une période est

$$\int_0^T Ri^2 \, dt = RI_m^2 \frac{T}{2}.$$

La chaleur dégagée pendant le même laps de temps par le courant continu est égale à $RI^2_{cont} T$. En écrivant que ces deux expressions sont

égales, on obtient :

$$RI_m^2 \frac{T}{2} = RI_{cont}^2 T$$

ou

$$I_{cont} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Il en découle que la valeur efficace d'un courant sinusoïdal I est numériquement égale à la valeur d'un courant continu qui dégage pendant un temps égal à une période du courant sinusoïdal la même quantité de chaleur que ledit courant sinusoïdal.

La majorité des appareils de mesure indiquent la valeur efficace de la grandeur mesurée *.

§ 82. Coefficient d'amplitude et facteur de forme. Parlons maintenant des notions du coefficient d'amplitude (k_a) et du facteur de forme (k_f). Le coefficient d'amplitude est le rapport de l'amplitude d'une fonction périodique à la valeur efficace de cette dernière. Ainsi pour un courant sinusoïdal

$$k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}. \tag{5.6}$$

On entend par facteur de forme le rapport de la valeur efficace d'une fonction périodique à sa valeur moyenne pendant une alternance. Pour un courant sinusoïdal

$$k_f = \frac{I}{I_{moy}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11 \text{ **}. \tag{5.7}$$

§ 83. Représentation des grandeurs sinusoïdales par des vecteurs du plan complexe. Amplitude complexe. Grandeur efficace complexe. Examinons le problème de la représentation des fonctions sinusoïdales par des vecteurs du plan complexe. La fig. 93 représente le plan complexe. On peut y représenter des quantités complexes. Une quantité complexe comprend une partie réelle et une partie imaginaire. On porte la partie réelle de la quantité complexe en abscisses du plan complexe et sa partie imaginaire on porte en ordonnées de ce plan. Par convention on affecte l'indice $+1$ à l'axe des grandeurs réelles et l'indice $+j$ ($j = \sqrt{-1}$) à l'axe des grandeurs imaginaires.

L'expression d'Euler a été déjà mentionnée dans le manuel de mathématiques

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha. \tag{5.8}$$

---

* La valeur efficace est mesurée à l'aide d'appareils des systèmes électromagnétique, électrodynamique et thermique. Le principe et le fonctionnement des appareils de mesure de différents systèmes sont exposés dans le cours des mesures électriques.

** Pour les courants périodiques non sinusoïdaux $k_a \neq \sqrt{2}$ et $k_f \neq 1{,}11$. La différence entre k_a et $\sqrt{2}$ d'une part et entre k_f et 1,11 d'autre part permet d'évaluer la différence entre le courant non sinusoïdal considéré et un courant sinusoïdal.

La quantité complexe $e^{j\alpha}$ est représentée dans le plan complexe par un vecteur numériquement égal à l'unité et formant un angle α avec l'axe réel (axe $+1$). L'angle α est compté à partir de l'axe $+1$ dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Le module de la fonction $e^{j\alpha}$ est égal à l'unité. En effet

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1.$$

Fig. 93

La projection de la fonction $e^{j\alpha}$ sur l'axe $+1$ est égale à $\cos\alpha$ et sa projection sur l'axe $+j$ est égale à $\sin\alpha$. Prenons maintenant la fonction $I_m e^{j\alpha}$ à la place de la fonction $e^{j\alpha}$. Il est évident que:

$$I_m e^{j\alpha} = I_m \cos\alpha + jI_m \sin\alpha.$$

Dans le plan complexe cette fonction, de même que la fonction $e^{j\alpha}$, est représentée sous l'angle α par rapport à l'axe $+1$, mais le vecteur sera I_m fois plus grand.

L'angle α figurant dans l'expression (5.8) peut être quelconque. Supposons que $\alpha = \omega t + \psi$, c'est-à-dire que l'angle α, varie en raison directe du temps. On a alors

$$I_m e^{j(\omega t+\psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + jI_m \sin(\omega t + \psi). \qquad (5.9)$$

Le terme $I_m \cos(\omega t + \psi)$ représente la partie réelle (Re) de l'expression $I_m e^{j(\omega t+\psi)}$:

$$I_m \cos(\omega t + \psi) = \mathrm{Re}\, I_m e^{j(\omega t+\psi)},$$

tandis que la fonction $I_m \sin(\omega t + \psi)$ est le coefficient de la partie imaginaire (Im) de l'expression $I_m e^{j(\omega t+\psi)}$, c'est-à-dire,

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = \mathrm{Im}\, I_m e^{j(\omega t+\psi)}. \qquad (5.10)$$

Ainsi on peut affirmer que le courant sinusoïdal i (comparer 5.1 et 5.10) peut être représenté comme $\mathrm{Im}\, I_m e^{j(\omega t+\psi)}$ ou, ce qui est revient au même, comme la projection d'un vecteur tournant $I_m e^{j(\omega t+\psi)}$ sur l'axe $+j$ (fig. 94).

Pour des raisons d'uniformité on représente habituellement les vecteurs des grandeurs à variation sinusoïdale en fonction du temps sur le plan complexe à l'instant $\omega t = 0$. A cet instant le vecteur $I_m e^{j(\omega t+\psi)}$ est

$$I_m e^{j\psi} = \dot{I}_m, \qquad (5.11)$$

Fig. 94

où $\dot{I}_m$ est une quantité complexe, dont le module est égal à I_m, l'angle entre le vecteur $\dot{I}_m$ et l'axe $+1$ dans le plan complexe étant égal à la phase initiale ψ.

La grandeur $\dot{I}_m$ est appelée amplitude complexe du courant i. L'amplitude complexe représente le courant i dans le plan complexe à l'instant $\omega t = 0$. Examinons deux exemples numériques de passage de la

valeur instantanée du courant à son amplitude complexe et de l'amplitude complexe à sa valeur instantanée.

Exemple 44. Soit $i = 8 \sin(\omega t + 20°)$ A. Ecrire l'expression de l'amplitude complexe de ce courant.

Dans le cas considéré $I_m = 8$ A, $\psi = 20°$. Par conséquent, $\dot{I}_m = 8e^{j20°}$.

Exemple 45. L'amplitude complexe du courant $\dot{I}_m = 25e^{-j30°}$ A. Ecrire l'équation de la valeur instantanée de ce courant.

Solution. Pour passer de l'amplitude complexe à la valeur instantanée il faut multiplier $\dot{I}_m$ par $e^{j\omega t}$ et prendre le coefficient de la partie imaginaire du produit ainsi obtenu (voir 5.10)

$$i = \operatorname{Im} 25e^{-j30°}e^{j\omega t} = \operatorname{Im} 25e^{j(\omega t - 30°)} = 25 \sin(\omega t - 30°).$$

Introduisons la convention terminologique suivante: nous appellerons *complexe efficace* du courant $\dot{I}$ le quotient de l'amplitude complexe $\dot{I}_m$ par $\sqrt{2}$:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = Ie^{j\psi}. \qquad (5.12)$$

Exemple 46. Ecrire l'équation du complexe efficace du courant de l'exemple 44.

$$\dot{I} = \frac{8e^{j20°}}{\sqrt{2}} = 5{,}67e^{j20°}A.$$

§ 84. Addition et soustraction des fonctions sinusoïdales du temps à l'aide d'un plan complexe. Soit à additionner deux courants (i_1 et i_2) ayant la même fréquence. Leur somme donne un certain courant i de même fréquence

$$i = i_1 + i_2;$$

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Trouver l'amplitude I_m et la phase initiale ψ du courant i. A cette fin représentons le courant i_1 dans le plan complexe (fig. 95) par le vecteur $\dot{I}_{1m} = I_{1m}e^{j\psi_1}$ et le courant i_2 par le vecteur $\dot{I}_{2m} = I_{2m}e^{j\psi_2}$. La somme géométrique des vecteurs $\dot{I}_{1m}$ et $\dot{I}_{2m}$ donne l'amplitude complexe du courant total $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$. L'amplitude du courant I_m est déterminée par la longueur de la résultante géométrique et la phase initiale ψ est l'angle entre ce vecteur et l'axe $+1$.

Pour calculer la différence de deux courants (ou des F.E.M., des tensions) il faut effectuer dans le plan complexe non pas l'addition, mais la soustraction des vecteurs appropriés.

Il y a lieu de rappeler que si les vecteurs $\dot{I}_{1m}$, $\dot{I}_{2m}$ et $\dot{I}_m$, représentés sur la fig. 95, tournaient autour de l'origine des coordonnées avec une vitesse angulaire ω, la position réciproque de ces vecteurs les uns par rapport aux autres resterait inchangée.

§ 85. Diagramme vectoriel. Un diagramme vectoriel est constitué par l'ensemble des vecteurs du plan complexe et représentant des fonctions sinusoïdales de même fréquence, avec observations des déphasages algébriques.

La fig. 95 est un exemple de diagramme vectoriel.

§ 86. Puissance instantanée. La circulation des courants sinusoïdaux dans des tronçons d'un circuit électrique donne lieu à une consommation d'énergie, fournie par les sources de ces courants. La vitesse à laquelle cette énergie doit être fournie caractérise la puissance. On entend par valeur instantanée de la puissance ou, en bref, par puissance instantanée, le produit de la valeur instantanée de la tension u aux bornes d'un tronçon de circuit, par la valeur instantanée du courant i, circulant dans ce tronçon

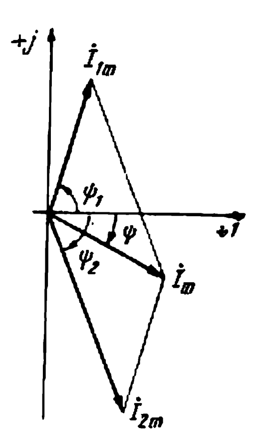


Fig. 95

$$p = ui, \tag{5.13}$$

où p est une fonction du temps.

Avant d'aborder l'étude du calcul des circuits compliqués à courant sinusoïdal, examinons les relations entre les courants et les tensions dans les circuits les plus simples, les diagrammes vectoriels de ces circuits et les courbes des valeurs instantanées des diverses grandeurs.

Les éléments constitutifs des circuits à courant sinusoïdal sont une résistance active R, une inductance L et une capacité C.

Contrairement à ce qui a lieu pour les circuits à courant continu la notion « résistance » n'est pas suffisamment complète, pour les circuits à courant sinusoïdal ; en effet la résistance au passage du courant alternatif est opposée non seulement par les éléments du circuit dans lesquels l'énergie est dégagée uniquement sous forme de chaleur (on les appelle par convention *résistances actives*), mais également par les éléments du circuit dans lesquels l'énergie n'est pas dégagée sous forme de chaleur mais est emmagasinée périodiquement dans les champs électrique ou magnétique. Ces éléments de circuit sont appelés réactifs et les résistances qu'ils opposent au courant alternatif sont appelées *résistances réactives* ou *réactances.* Les inductances et les capacités possèdent toutes les deux une réactance (voir en détail § 88 et 89).

§ 87. Courant sinusoïdal dans une résistance active. Trois croquis sont représentés sur la fig. 96. Une résistance active R dans laquelle circule le courant $i = I_m \sin \omega t$ figure sur le premier d'entre eux (fig. 96, *a*). D'après la loi d'Ohm, la tension

$$u = iR = RI_m \sin \omega t$$

ou

$$u = U_m \sin \omega t, \tag{5.14}$$

où $U_m = RI_m$.

Les complexes efficaces du courant $\dot{I}$ et de la tension $\dot{U}$, en phase avec le courant, sont représentés sur le diagramme vectoriel de la fig. 96, *b*.

Les courbes des valeurs instantanées du courant i, de la tension u et de la puissance instantanée p sont représentées sur la fig. 96, *c*

$$p = U_m I_m \sin \omega t \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

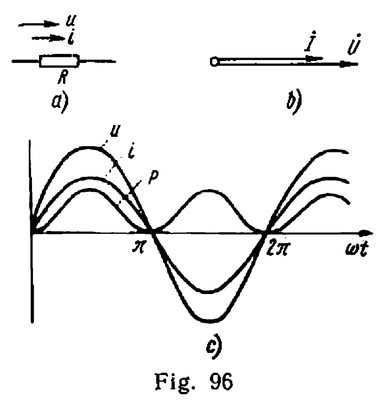


Fig. 96

La puissance instantanée a une composante constante $\frac{U_m I_m}{2}$ et une composante $\frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t$, variable à la fréquence 2ω. L'énergie fournie par la source de courant pendant le laps de temps dt est égale à $p\,dt$.

§ 88. Inductance dans un circuit à courant sinusoïdal. Pratiquement un enroulement (une bobine) quelconque possède toujours une certaine inductance L et une résistance active R. Une bobine peut être représentée sur un schéma sous forme d'une inductance L et d'une résistance active R, couplées en série.

Isolons du circuit l'inductance L seule (sans la résistance active) (fig. 97, *a*). Si un courant $i = I_m \sin \omega t$ circule à travers L, une F.E.M. d'auto-induction e_L sera induite dans cette bobine

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin (\omega t - 90°).$$

Fig. 97

Le sens positif de la F.E.M. e_L est désigné sur la fig. 97, *a* par une flèche, orientée suivant le sens positif du courant i.

Cherchons la différence de potentiel entre les points a et b.

Lorsqu'on se déplace du point b vers le point a on va à l'encontre de la F.E.M. e_L et, par conséquent,

$$\varphi_a = \varphi_b - e_L, \text{ donc}$$
$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = -e_L.$$

Le sens positif de la tension u_{ab} coïncide avec le sens positif du courant.

Par la suite, nous n'affecterons plus des indices a et b à la tension aux bornes de l'inductance (pour la chute de tension dans cette inductance)

$$u_{ab} = u = -e_L. \tag{5.15}$$

Par conséquent,

$$u = \omega L I_m \sin(\omega t + 90°) = U_m \sin(\omega t + 90°); \qquad (5.16)$$
$$U_m = \omega L I_m.$$

Le produit ωL désigné par X_L est appelé *réactance inductive*

$$X_L = \omega L. \qquad (5.17)$$

Dimensions de $[X_L] = [\omega]\,[L] = s^{-1}\cdot\Omega\cdot s = \Omega$.

Ainsi l'inductance oppose au courant alternatif une réactance inductive égale à $X_L = \omega L$. Cette réactance est directement proportionnelle à la fréquence. En outre, il y a lieu de souligner que la phase de la tension aux bornes d'une inductance est en avance de 90° sur la phase du courant (voir expression 5.16). Ce fait est exprimé sur le diagramme vectoriel de la fig. 97, *b* par le déphasage du vecteur tension $\dot{U}$ en avance de 90° sur le vecteur courant I. La F.E.M. de l'auto-induction $\dot{E}_L$ se trouve en opposition de phase avec la tension $\dot{U}$.

Les courbes des valeurs instantanées de i, u et p sont représentées sur la fig. 97, *c*. La puissance instantanée

$$p = ui = U_m \cos \omega t I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t.$$

Elle s'annule lorsque soit u, soit i passent par zéro. Pendant le premier quart de période, lorsque u et i sont positifs, p est également positive. La surface limitée pendant ce temps par la courbe p et l'axe des abscisses représente l'énergie fournie par la source d'alimentation et utilisée pour créer l'énergie du champ magnétique dans l'inductance.

Pendant le deuxième quart de période, lorsque le courant dans le circuit diminue et passe du maximum à zéro, l'énergie du champ magnétique est restituée à la source d'alimentation, la puissance instantanée étant négative. Pendant le troisième quart de période, l'énergie est de nouveau empruntée à la source, elle est restituée au cours du quatrième quart, etc. ; autrement dit, l'énergie est périodiquement soit fournie par la source à l'inductance, soit restituée à cette source.

§ 89. Condensateur branché à un circuit à courant sinusoïdal. Si une tension appliquée à une condensateur reste invariable en fonction du temps, la charge $q = Cu$ à l'une de ses armatures et la charge $-q = -Cu$ à l'autre armature (C étant la capacité du condensateur) * est invariable et aucun courant ne traverse le condensateur $\left(i = \frac{dq}{dt} = 0\right)$. Il en ira tout autrement si la tension aux bornes du condensateur varie en fonction du temps, suivant une loi sinusoïdale, par exemple (fig. 98, *a*)

$$u = U_m \sin \omega t. \qquad (5.18)$$

* La capacité, utilisée comme élément d'un schéma équivalent à un circuit réel, permet de tenir compte dans les calculs des phénomènes de la charge du condensateur et de l'accumulation de l'énergie dans ce dernier (pour les capacités, voir également le § 407 de la III[e] partie de ce cours).

Dans ce cas la charge q du condensateur varie également suivant une loi sinusoïdale $q = Cu = CU_m \sin \omega t$ et la charge du condensateur change de signe périodiquement. Il en résulte un courant de charge dans le condensateur :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CU_m \sin \omega t) = \omega CU_m \cos \omega t = \omega CU_m \sin(\omega t + 90°). \quad (5.18')$$

Le sens positif du courant dans le condensateur du circuit de la fig. 98, *a* coïncide avec le sens positif de la tension. En comparant (5.18) et (5.18′), on voit que le courant à travers le condensateur est en avance de 90° sur la tension aux bornes du même condensateur. Par conséquent, le vecteur courant $\dot{I}$ sur le diagramme vectoriel de la fig. 98, *b* est en avance de 90° sur le vecteur tension $\dot{U}_m$. L'amplitude du courant I_m est égale à l'amplitude de la tension U_m divisée par la *réactance capacitive* X_C

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (5.19)$$

En effet

$$I_m = \omega CU_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{X_C}.$$

La réactance capacitive est inversement proportionnelle à la fréquence (à la pulsation) et est mesurée en ohms. Les courbes des valeurs instantanées de u, i, p sont représentées sur la fig. 98, *c*. La puissance instantanée est

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t.$$

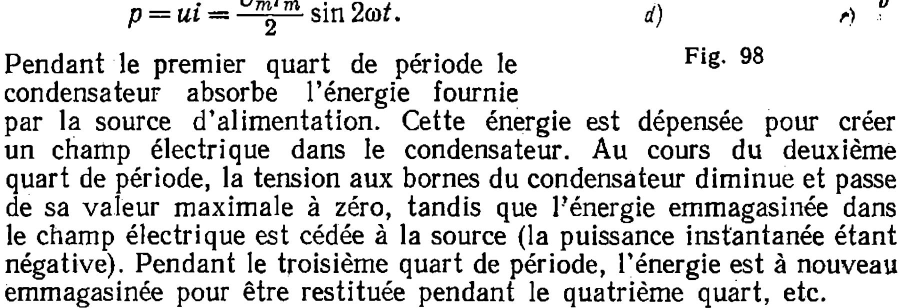


Fig. 98

Pendant le premier quart de période le condensateur absorbe l'énergie fournie par la source d'alimentation. Cette énergie est dépensée pour créer un champ électrique dans le condensateur. Au cours du deuxième quart de période, la tension aux bornes du condensateur diminue et passe de sa valeur maximale à zéro, tandis que l'énergie emmagasinée dans le champ électrique est cédée à la source (la puissance instantanée étant négative). Pendant le troisième quart de période, l'énergie est à nouveau emmagasinée pour être restituée pendant le quatrième quart, etc.

En intégrant par rapport au temps les deux membres de l'égalité

$$i = C\frac{du}{dt},$$

on obtient

$$u = \frac{1}{C}\int i\, dt. \quad (5.20)$$

L'égalité (5.20) permet de calculer la tension aux armatures d'un condensateur en fonction du courant qui le traverse.

En examinant le passage d'un courant sinusoïdal à travers un condensateur nous avons supposé que le diélectrique, séparant les armatures de ce condensateur, soit un diélectrique parfait ne donnant pas lieu à des pertes d'énergie. Cependant, lorsqu'on applique une tension sinusoïdale aux armatures d'un condensateur réel, séparées par des diélectriques solides ou liquides, certaines pertes d'énergie se produisent toujours dans ces derniers. Ces pertes sont relativement faibles et on peut, en général, les négliger. S'il faut en tenir compte dans les calculs, on doit remplacer le condensateur par un schéma équivalent représenté sur la fig. 98, *d* et dans lequel une résistance active R est branchée en parallèle à la capacité C, les pertes d'énergie dans cette résistance simulant les pertes d'énergie dans le diélectrique réel.

Le courant $\dot{I}$ à travers le condensateur est égal à la somme géométrique de deux courants: du courant $\dot{I}_1$ circulant dans la capacité et déphasé de 90° en avance sur $\dot{U}$ aux armatures du condensateur (98, *e*) et du courant relativement faible $\dot{I}_2$, circulant dans la résistance active R, en phase avec la tension $\dot{U}$.

Ainsi, le courant circulant dans un condensateur à diélectrique imparfait est en avance sur la tension d'un angle quelque peu inférieur à 90°. On appelle angle de pertes l'angle δ entre le courant $\dot{I}$ et le courant $\dot{I}_1$. Il dépend de la nature du diélectrique et de la fréquence et est égal dans le meilleur des cas à plusieurs secondes et dans le cas le plus défavorable à plusieurs degrés. La valeur de $\operatorname{tg}\delta$ est indiquée dans les tableaux (voir p. 694), caractérisant les propriétés de divers diélectriques solides et liquides.

5. **§ 90. Multiplication d'un vecteur par j et par $-j$.** Soit un certain vecteur $\dot{A} = Ae^{j\varphi_a}$ (fig. 99). Démontrons que sa multiplication par j donne un vecteur dont le module est égal à A, mais qui est tourné de 90° en avance (sens contraire aux aiguilles d'une montre) par rapport au vecteur initial $\dot{A}$. La multiplication de $\dot{A}$ (par $-j$) tourne le vecteur $\dot{A}$ de 90° dans le sens du retard (celui des aiguilles d'une montre) également sans modifier son module.

Fig. 99

Pour s'en assurer écrivons le vecteur j et le vecteur $-j$ sous la forme exponentielle

$$j = 1 \cdot e^{j90°} = e^{j90°};$$

$$-j = 1 \cdot e^{-j90°} = e^{-j90°}.$$

Alors

$$\dot{A}j = Ae^{j\varphi_a}e^{j90°} = Ae^{j(\varphi_a + 90°)}; \qquad (5.21)$$

$$-\dot{A}j = Ae^{j\varphi_a}e^{-j90°} = Ae^{j(\varphi_a - 90°)}. \qquad (5.22)$$

Il découle de (5.21) que le vecteur $j\dot{A}$, dont le module est égal à A, forme avec l'axe $+1$ du plan complexe un angle $\varphi_a + 90°$, c'est-à-dire qu'il est tourné de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au vecteur $\dot{A}$.

De même il découle de (5.22) que la multiplication du vecteur $\dot{A}$ (par $-j$) donne un vecteur dont le module est égal à A, mais qui est tourné de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport à ce dernier.

5 , **§ 91. Bases de la méthode symbolique du calcul des circuits à courant sinusoïdal.** La méthode de calcul des circuits à courant sinusoïdal, appelée habituellement méthode symbolique ou complexe, est très largement utilisée.

L'application de cette méthode au régime de courant sinusoïdal repose sur le passage des équations, écrites pour des valeurs instantanées, et qui sont en réalité des équations différentielles (voir équation 5.23), à des équations algébriques, établies à l'aide des quantités complexes du courant et de la F.E.M. Pour une équation quelconque, écrite en vertu des lois de Kirchhoff pour un régime permanent, on remplace pour cela la valeur instantanée du courant i par l'amplitude complexe du courant $\dot{I}_m$, la valeur instantanée de la tension aux bornes de la résistance active R, égale à Ri, par la quantité complexe $R\dot{I}_m$, en phase avec le courant $\dot{I}_m$, la valeur instantanée de la tension aux bornes de l'inductance $u_L = L\frac{di}{dt}$ par la quantité complexe $\dot{I}_m j\omega L$, en avance de 90° sur le courant. La valeur instantanée de la tension aux bornes de la capacité $u_C = \frac{1}{C}\int idt$ est remplacée par la quantité complexe $\dot{I}_m\left(\frac{-j}{\omega C}\right)$, en retard de 90° sur le courant. La valeur instantanée e de la F.E.M. est remplacée par la quantité complexe $\dot{E}_m$. La justification du remplacement de $u_L = L\frac{di}{dt}$ par $\dot{I}_m j\omega L$, repose sur les §§ 88 et 90.

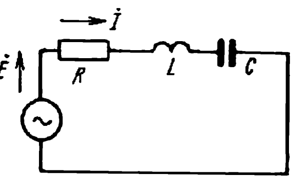


Fig. 100

En effet, il a été démontré à § 88 que l'amplitude de la tension aux bornes d'une inductance est égale au produit de l'amplitude du courant par $X_L = \omega L$. La présence de l'opérateur j indique que le vecteur de la tension aux bornes d'une inductance est en avance de 90° sur le vecteur du courant. De même, il résulte du § 89 que l'amplitude de la tension aux bornes d'une capacité est égale à l'amplitude du courant multipliée par $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Le retard de 90° de la tension aux armatures d'une capacité sur le courant qui y circule a donné lieu à l'utilisation de l'opérateur.

Ainsi, pour le schéma de la fig. 100, l'équation des valeurs instantanées s'écrit de la manière suivante

$$u_R + u_L + u_C = e$$

ou

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e. \qquad (5.23)$$

Ecrivons-la sous sa forme complexe

$$\dot{I}_m R + \dot{I}_m j\omega L + \dot{I}_m\left(\frac{-j}{\omega C}\right) = \dot{E}_m.$$

Mettons $\dot{I}_m$ en facteur :

$$\dot{I}_m\left(R+j\omega L-\frac{j}{\omega C}\right)=\dot{E}_m. \tag{5.24}$$

Par conséquent, nous avons pour le schéma de la fig. 100

$$\dot{I}_m=\frac{\dot{E}_m}{R+j\omega L-\frac{j}{\omega C}}.$$

Cette dernière équation permet de trouver l'amplitude complexe du courant $\dot{I}_m$, en partant de l'amplitude complexe de la F.E.M. $\dot{E}_m$ et des résistances et réactances du circuit R, ωL et $\frac{1}{\omega C}$.

Cette méthode est appelée méthode symbolique, parce que le courant ainsi que chacune des tensions sont remplacés par leurs images complexes ou par leurs symboles.

Ainsi $R\dot{I}_m$ est l'image ou le symbole de la chute de tension iR, $j\omega L\dot{I}_m$ est l'image ou le symbole de la chute de tension $u_L=L\frac{di}{dt}$ dans une inductance ; $-\frac{j}{\omega C}\dot{I}_m$ est l'image de la chute de tension $\frac{1}{C}\int idt$ dans un condensateur.

Le passage de l'équation (5.23) à (5.24) peut être également effectué par une autre méthode plus rigoureuse, mais nettement plus compliquée. Examinons cette méthode. Dans (5.23) substituons au courant i son équivalent $\operatorname{Im}\dot{I}_m e^{j\omega t}$ et à la place de e écrivons $\operatorname{Im}\dot{E}_m e^{j\omega t}$.

Nous obtenons ainsi

$$R\operatorname{Im}\dot{I}_m e^{j\omega t}+L\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\dot{I}_m e^{j\omega t}+\frac{1}{C}\int\operatorname{Im}\dot{I}_m e^{j\omega t}\,dt=\operatorname{Im}\dot{E}e^{j\omega t}.$$

L'opération de dérivation par rapport au temps de l'expression $\dot{I}_m e^{j\omega t}$ et l'opération de séparation de la partie imaginaire (Im) de cette fonction sont commutatives; autrement dit l'ordre dans lequel elles sont effectuées est parfaitement indifférent; le résultat est le même si on commence par séparer la partie imaginaire de la fonction $\dot{I}_m e^{j\omega t}$ et qu'on dérive ensuite par rapport au temps l'expression ainsi obtenue, ou si on commence par dériver par rapport au temps l'expression $\dot{I}_m e^{j\omega t}$ et qu'on prenne ensuite la partie imaginaire de la fonction ainsi dérivée.

Le même raisonnement est valable également pour l'intégrale par rapport au temps de l'expression $\dot{I}_m e^{j\omega t}$. Par conséquent, on peut écrire

$$L\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\dot{I}_m e^{j\omega t}=L\operatorname{Im}\frac{d}{dt}\dot{I}_m e^{j\omega t}=\operatorname{Im}j\omega L\,\dot{I}_m e^{j\omega t} \tag{5.25}$$

$$\frac{1}{C}\int\operatorname{Im}\dot{I}_m e^{j\omega t}\,dt=\frac{1}{C}\operatorname{Im}\int\dot{I}_m e^{j\omega t}\,dt=\operatorname{Im}\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m e^{j\omega t}. \tag{5.26}$$

Nous avons négligé la constante d'intégration en écrivant l'intégrale, car pour un courant sinusoïdal permanent et en l'absence de composante continue de la F.E.M. e, la tension aux bornes du condensateur ne comprend non plus de composante continue.

Récrivons l'équation (5.23) en tenant compte de (5.25) et (5.26):

$$\operatorname{Im} R\dot{I}_m e^{j\omega t} = \operatorname{Im} j\omega L\, \dot{I}_m e^{j\omega t} + \operatorname{Im} \frac{1}{j\omega C}\, \dot{I}_m e^{j\omega t} = \operatorname{Im} \dot{E}_m e^{j\omega t}; \tag{5.27}$$

$$\operatorname{Im} \left(R + j\omega L \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{I}_m e^{j\omega t} = \operatorname{Im} \dot{E}_m e^{j\omega t}. \tag{5.28}$$

Si la F.E.M. e et le courant i dans le schéma de la fig. 100 variaient non pas suivant une loi sinusoïdale, mais suivant une loi cosinusoïdale, à savoir:

$$e = E_m \cos(\omega t + \psi_e)$$

et

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_i),$$

on obtiendrait par une méthode identique l'équation (5.29) à la place de (5.28).

$$\operatorname{Re} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{I}_m e^{j\omega t} = \operatorname{Re} \dot{E}_m e^{j\omega t}. \tag{5.29}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (5.28) par j; en l'additionnant avec (5.29), nous obtenons:

$$\operatorname{Re} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{I}_m e^{j\omega t} + j \operatorname{Im} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{I}_m e^{j\omega t} =$$

$$= \operatorname{Re} \dot{E}_m e^{j\omega t} + j \operatorname{Im} \dot{E}_m e^{j\omega t}$$

ou

$$\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{E}_m e^{j\omega t}. \tag{5.30}$$

Au point de vue physique, l'équation (5.30) décrit deux phénomènes indépendants et se déroulant simultanément dans le schéma de la fig. 100, à savoir: la circulation d'un courant sinusoïdal $I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, sous l'effet de la F.E.M. $E_m \sin(\omega t + \psi_e)$ et la circulation d'un courant cosinusoïdal $I_m \cos(\omega t + \psi_i)$, sous l'effet de la F.E.M. $E_m \cos(\omega t + \psi_e)$. Les amplitudes des courants I_m et les angles de phase ψ_e et ψ_i dans ces deux régimes sont les mêmes. Les deux phénomènes se déroulent indépendamment l'un de l'autre puisque le schéma de la fig. 100 est un schéma linéaire et les paramètres R, I, C ne dépendent pas des courants.

Par conséquent, la superposition au régime examiné d'un courant sinusoïdal $I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, circulant sous l'effet de la F.E.M. $E_m \sin(\omega t + \psi_e)$, d'un deuxième régime n'influence pas l'amplitude et la phase du courant du premier régime. Simplifions expression (5.30) en supprimant le facteur $e^{j\omega t}$ non égal à zéro et en tenant compte que

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j}\,\frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

nous pouvons écrire

$$\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) \dot{I}_m = \dot{E}_m. \tag{5.31}$$

L'équation (5.31) est identique à (5.24).

5. **§ 92. Impédance complexe. Loi d'Ohm pour un circuit à courant sinusoïdal.** Revenons à l'équation (5.24). Le facteur $R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$ est une

quantité complexe, avant les dimensions d'une résistance, qui est désignée par Z et est appelée *impédance complexe*

$$Z = ze^{j\varphi} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}. \tag{5.32}$$

Comme toute quantité complexe Z peut être écrite sous forme exponentielle. Le module de complexe est habituellement désigné par z. Bien que Z soit une quantité complexe il ne faut pas placer un point au-dessus de cette lettre : ce point ne doit être placé qu'au-dessus des quantités complexes qui représentent des fonctions sinusoïdales du temps.

L'équation (5.24) peut alors être écrite de la manière suivante: $\dot{I}_m Z = \dot{E}_m$. Divisons les deux membres de cette équation par $\sqrt{2}$ et passons des amplitudes complexes $\dot{I}_m$ et $\dot{E}_m$ aux quantités efficaces complexes $\dot{I}$ et $\dot{E}$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z}. \tag{5.33}$$

L'équation (5.33) représente la loi d'Ohm pour un circuit à courant sinusoïdal.

Dans le cas général Z a une certaine partie réelle R et une certaine partie imaginaire jX

$$Z = R + jX, \tag{5.34}$$

où R — résistance active, X — réactance effective.

Pour le circuit de la fig. 100 $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

§ 93. Admittance complexe. On appelle admittance complexe Y l'inverse de l'impédance complexe Z

$$Y = \frac{1}{Z} = g - jb = ye^{-j\varphi}. \tag{5.35}$$

L'admittance est mesurée en *ohms*$^{-1}$ ou en *siemens*. Sa partie réelle est désignée par g et sa partie imaginaire par b. Du fait que

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = \frac{R}{R^2+X^2} - j\frac{X}{R^2+X^2} = g - jb,$$

on a

$$\left.\begin{aligned} g = \frac{R}{R^2+X^2}; \quad b = \frac{X}{R^2+X^2} \\ y = \sqrt{g^2+b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

Si X est positif, b est positif également et si X est négatif, b est également négatif.

En utilisant l'admittance complexe on peut écrire la loi d'Ohm (voir 5.33) comme suit

$$\left.\begin{aligned} &\dot{I} = \dot{U}Y \\ \text{ou} \\ &\dot{I} = \dot{U}g - j\dot{U}b = \dot{I}_a + \dot{I}_r \end{aligned}\right\} \tag{5.33'}$$

Ici $\dot{I}_a$ — composante active du courant, $\dot{I}_r$ — composante réactive du courant; U — tension aux bornes d'un tronçon du circuit dont l'impédance est égale à Z.

§ 94. Triangle des impédances et triangle des admittances. Il résulte de (5.34) que le module d'une impédance complexe est

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}. \tag{5.37}$$

Par conséquent, on peut se représenter z comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle (fig. 101), dit triangle des impédances, dont l'un des côtés est égal à la résistance R et l'autre à la réactance effective X:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}. \tag{5.38}$$

De même, le module de l'admittance, conformément à (5.36), est: $y = \sqrt{g^2 + b^2}$. Par conséquent, y est l'hypoténuse d'un triangle rectangle (fig. 102), dont les côtés sont la conductance g et la susceptance b:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{g}. \tag{5.39}$$

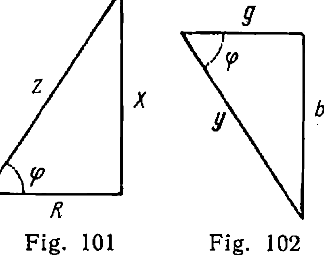


Fig. 101 Fig. 102

Le triangle dit des impédances est l'interprétation graphique du lien entre le module de l'impédance z d'une part et la résistance active et la réactance du circuit d'autre part. De même le triangle dit des admittances est l'interprétation graphique du lien entre le module de l'admittance y d'une part et de ses composantes active (conductance) et réactive (susceptance) d'autre part.

§ 95. Utilisation d'une règle à calcul pour passer de la forme algébrique d'écriture d'une valeur complexe à la forme exponentielle et vice versa. Lorsqu'on calcule les circuits à courant alternatif on a affaire continuellement aux nombres complexes. En effet, l'impédance d'un tronçon de circuit ou du circuit dans son ensemble est une quantité complexe, leur admittance est une quantité complexe, le courant, la tension, la F.E.M. sont également des quantités complexes. Pour réaliser une opération aussi simple que le calcul du courant suivant la loi d'Ohm, il faut diviser la quantité complexe de la F.E.M. par la quantité complexe de l'impédance.

Nous avons appris au cours de mathématique qu'une quantité complexe peut être représentée sous trois formes d'écriture: algébrique $a + jb$, exponentielle $ce^{j\varphi}$ et trigonométrique $c \cos\varphi + jc \sin\varphi$.

L'addition de deux quantités complexes et davantage peut être effectuée le plus facilement en utilisant la forme algébrique. Dans ce cas on ajoute séparément leurs parties réelles et imaginaires

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) + (a_3 - jb_3) = (a_1 + a_2 + a_3) + j(b_1 + b_2 - b_3).$$

La division et la multiplication des quantités complexes peut être effectuée le plus facilement en utilisant la forme exponentielle d'écriture. Supposons, par exemple, qu'il faille diviser la quantité complexe $c_1e^{j\varphi_1}$ par la quantité complexe $c_2{}^{j\varphi_2}$. On obtiendra comme quotient à la suite de cette opération la quantité complexe $c_3e^{j\varphi_3}$

$$c_3e^{j\omega} = \frac{c_1e^{j\varphi_1}}{c_2e^{j\varphi_2}} = \frac{c_1}{c_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Le module de la quantité complexe résultante (c_3) est le quotient $\frac{c_1}{c_2}$ et son argument $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$. En multipliant deux quantités complexes $c_1\ e^{j\varphi_1}$ et $c_2e^{j\varphi_2}$ on obtient :

$$c_4e^{j\varphi_4} = c_1e^{j\varphi_1}c_2e^{j\varphi_2} = c_1c_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

En calculant les circuits électriques on est souvent obligé de passer de la forme algébrique de la quantité complexe à sa forme exponentielle ou d'effectuer l'opération inverse.

Le moyen le plus facile de le faire est d'utiliser une règle à calcul.

Soit $a + jb$ une quantité complexe donnée. Il résulte de ce qui était dit précédemment (§ 92 et § 94) que a et b sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle et que son hypoténuse est $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Le quotient du petit côté par le grand donne la tangente du plus petit angle aigu du triangle rectangle et la division du plus petit côté par le sinus de cet angle donne l'hypoténuse du triangle ou le module de la quantité complexe.

Ces considérations sont à la base du calcul à l'aide d'une règle à calcul du module et de l'argument d'une quantité complexe, exprimée sous forme algébrique $a + jb$. A cette fin, le tiroir de la règle est retourné afin que le côté du tiroir portant les inscriptions « sinus » et « tangente » se trouve sur le recto de la règle.

Ordre des opérations à exécuter pour trouver l'argument et le module :

1. Porter la valeur du plus petit côté de l'angle droit sur l'échelle inférieure principale de la règle et amener en face de la division trouvée le trait du curseur.

2. Porter la valeur du plus grand côté de l'angle droit sur l'échelle principale et placer en face d'elle l'extrémité du tiroir. On effectue ainsi la division du plus petit côté de l'angle droit par le plus grand.

3. Lire sur l'échelle des tangentes en face du trait du curseur la valeur du plus petit angle du triangle rectangle.

4. Sans déplacer le curseur manœuvrer le tiroir de manière qu'en face de son trait retrouve la division de l'échelle des sinus, correspondante à l'angle qu'on vient de trouver. Cette dernière opération est la division du petit côté par le sinus de l'angle le plus petit.

5. Lire le module de la quantité complexe (l'hypoténuse du triangle rectangulaire) en face de l'extrémité des graduations du tiroir sur l'échelle principale fixe inférieure de la règle.

Le passage de la forme exponentielle à la forme algébrique est effectué dans l'ordre inverse. Afin d'éviter une erreur lorsqu'on écrit la quan-

tité complexe sous sa forme exponentielle, il est recommandé de commencer par représenter qualitativement la quantité complexe, donnée sous sa forme algébrique, dans le plan complexe. Cette construction permettra d'exprimer correctement l'angle entre l'axe +1 et le vecteur cherché à l'aide de l'angle lu sur la règle à calcul. Les angles dirigés en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre, par rapport à l'axe +1, sont considérés comme positifs et ceux orientés dans le sens des aiguilles d'une montre sont tenus pour négatifs.

Exemple 47. Récrire sous la forme exponentielle les quantités complexes suivantes: a) $3 + 2j$; b) $2 + 3j$; c) $4 - 5j$; d) $-6 - 2j$; e) $-0{,}2 + 0{,}4j$; f) $10 - j0{,}8$.

Solution. a) Plaçons le curseur en face du chiffre 2 de l'échelle inférieure de la règle et amenons l'extrémité du tiroir en face du chiffre 3. Nous lisons sur l'échelle des tangentes l'angle 33°40′. Déplaçons le tiroir de manière que l'angle 33°40′, lu sur l'échelle des sinus, se trouve en face du trait du curseur. Nous lisons ensuite sur l'échelle inférieure le module 3,6 en face de l'extrémité des graduations du tiroir. Le vecteur $3 + 2j$ est représenté qualitativement sur la fig. 103, *a*. On y voit que l'angle entre l'axe +1 et le vecteur est égal à 33°40′. Par conséquent, $3 + 2j = 3{,}6\ e^{j33°40'}$.

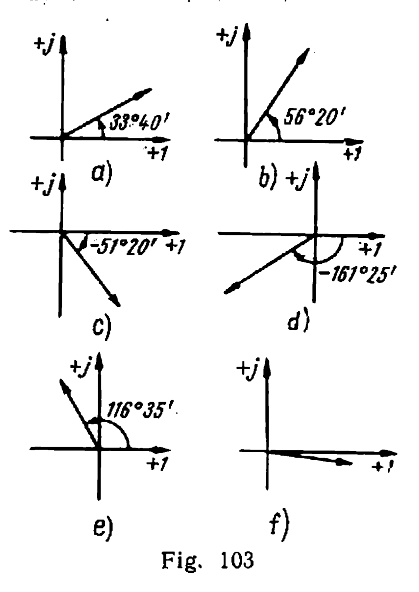


Fig. 103

b) Trouvons à l'aide de la règle l'angle 33°40′ et le module 3,6. Le diagramme correspondant est représenté sur la fig. 103, *b*. L'angle entre l'axe +1 et le vecteur est égal à 90° — —33°40 = 56°20′. Par conséquent, $2 + 3j = 3{,}6e^{j56°20'}$.

c) La règle donne un angle de 38°40′ et un module 6,4. On voit sur la fig. 103, *c* que le vecteur se trouve dans le quatrième quadrant. L'angle entre l'axe +1 et le vecteur est égal à —51°20′. Ainsi

$$4 - 5j = 6{,}4e^{-j51°20'}.$$

d) Trouvons à l'aide de la règle l'angle 18°35′ et le module 6,32. On voit sur la fig. 103, *d* que l'angle entre l'axe +1 et le vecteur peut être exprimé de deux façons: soit comme — (180° — 18°35′) = —161°25′, soit comme +(180° + 18°35′) = 198°35′. Par conséquent,

$$-6 - 2j = 6{,}32e^{-j161°25'} = 6{,}32e^{j198°35'}.$$

e) La règle donne un angle de 26°35′ et un module de 0,448. Le vecteur se trouve dans le deuxième quadrant (fig. 103, *e*). Par conséquent, $-0{,}2 + j0{,}4 = 0{,}448e^{j116°35'}$.

f) Le cas présent diffère en principe des exemples examinés plus haut par le fait que les composantes du vecteur (les côtés du triangle rectangle) diffèrent plus par valeur absolue que par un ordre de grandeur. Ici, l'hypoténuse du triangle rectangle est pratiquement égale au grand côté, et l'angle cherché doit être lu sur l'échelle moyenne du tiroir. La règle donne un angle de 4°40′, se trouvant dans le quatrième quadrant (fig. 103, *f*). Par conséquent, $10 - j0{,}8 \approx 10e^{-j4°40'}$.

§ 96. Les lois de Kirchhoff écrites sous forme symbolique. Conformément à la première loi de Kirchhoff la somme algébrique des valeurs instantanées des courants convergeant à un nœud quelconque d'un circuit est nulle, c'est-à-dire

$$\Sigma i = 0. \qquad (5.40')$$

En remplaçant dans cette somme chaque courant par sa représentation complexe $\dot{I}$ nous obtenons

$$\Sigma \dot{I} = 0. \qquad (5.40)$$

L'équation (5.40) est la première équation de Kirchhoff écrite sous forme symbolique.

Examinons ensuite la forme symbolique d'écriture de la deuxième loi de Kirchhoff.

On peut pour une maille fermée d'un circuit électrique à courant sinusoïdal aussi compliqué soit-il écrire l'équation de la deuxième loi de Kirchhoff pour les valeurs instantanées des courants, des tensions et des F.E.M.

Soit un circuit ramifié fermé comprenant n branches, dont chacune (k) contient, dans le cas général, une F.E.M. e_k, une résistance active R_k, une inductance L_k et une capacité C_k parcourues par le courant i_k. Alors, suivant la deuxième loi de Kirchhoff,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(i_k R_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k \, dt \right) = \sum_{k=1}^{n} e_k. \qquad (5.41')$$

Mais chaque terme du premier membre de cette équation peut être conformément au § 12 remplacé par $\dot{I}_k Z_k$, tandis que chaque terme du second membre de la même équation peut être remplacé par $\dot{E}_k$. Par conséquent, l'équation (5.41′) prend la forme suivante

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k. \qquad (5.41)$$

L'équation (5.41) est la deuxième loi de Kirchhoff écrite sous la forme symbolique.

§ 97. Application au calcul des circuits à courant sinusoïdal de toutes les méthodes décrites dans le chapitre « Circuits électriques à courant continu ». Un certain nombre de méthodes et de procédés, rendant les calculs plus faciles que la solution d'un système d'équations établies par

utilisation directe des lois de Kirchhoff, a été mis au point pour l'analyse et le calcul des circuits électriques à courant continu. Nous avons énuméré au premier chapitre parmi ces méthodes la méthode des courants fictifs maillés, la méthode des potentiels des nœuds, celle de marche à vide et de court-circuit, par exemple.

Il a été également indiqué au premier chapitre que les expressions définitives, utilisées pour les calculs par ces méthodes, ont été obtenues à l'aide d'opérations, basées sur la première et la deuxième lois de Kirchhoff.

Du fait que les première et deuxième lois de Kirchhoff s'appliquent également aux circuits à courant sinusoïdal, on aurait pu écrire les équations pour les valeurs instantanées de diverses grandeurs existant dans les circuits à courant sinusoïdal, passer de ces équations aux équations complexes et, ensuite, répéter la déduction de toutes les expressions du premier chapitre pour les circuits à courant sinusoïdal également.

Mais on peut évidemment, se dispenser de reproduire ces opérations.

Lorsque les diverses branches d'un circuit électrique à courant sinusoïdal ne sont pas couplées entre elles magnétiquement, toutes les expressions utilisées pour les calculs dans le premier chapitre sont valables également pour le calcul des circuits à courant sinusoïdal, si on y substitue au courant continu I le courant complexe $\dot{I}$, à la conductance g l'admittance Y, à la résistance R l'impédance Z et à la place de la F.E.M. continue E on utilise la F.E.M. complexe $\dot{E}$.

Si, par contre, certaines branches d'un circuit électrique à courant sinusoïdal sont couplées l'une à l'autre magnétiquement, ce qui a lieu en présence de l'induction mutuelle, la chute de tension aux bornes d'un tronçon quelconque du circuit dépend non seulement du courant qui y circule, mais également des courants des branches auxquelles la branche considérée est couplée magnétiquement. Il en résulte que le calcul des circuits électriques à courant sinusoïdal, en cas d'existence de branches couplées magnétiquement entre elles, comporte un certain nombre de particularités dont on ne tient pas compte si on remplace simplement dans les expressions du premier chapitre E par $\dot{E}$, R par Z et g par Y. Ces particularités de calcul des circuits à couplage magnétique seront examinées au § 113.

§ 98. Sur l'utilisation des diagrammes vectoriels pour les calculs des circuits électriques à courant sinusoïdal. Les courants et les tensions dans divers tronçons d'un circuit électrique à courant sinusoïdal ne sont pas en phase en général. Une idée concrète sur la disposition des divers vecteurs peut être obtenue à l'aide d'un diagramme vectoriel des courants et des tensions. Il est recommandé, lorsqu'on fait des calculs des circuits électriques à courant sinusoïdal par la méthode analytique, de construire également des diagrammes vectoriels. Ils permettent de contrôler qualitativement les calculs analytiques.

Le contrôle qualitatif consiste en la comparaison des directions de divers vecteurs dans le plan complexe, à savoir des directions obtenues par calcul analytique avec celles résultant des considérations physiques.

Ainsi, par exemple, sur un diagramme vectoriel la tension $\dot{U}_L$ aux bornes de l'inductance L doit être en avance de 90° sur le courant circulant dans cette inductance et la tension aux bornes de la capacité $\dot{U}_C$ doit être en retard de 90° sur le courant circulant dans cette capacité.

Si les résultats du calcul analytique ne sont pas conformes à ces considérations évidentes, une erreur a dû être commise et on doit la rechercher et l'éliminer. En outre, le diagramme vectoriel est souvent utilisé également comme mode de calcul, par exemple, dans la méthode des grandeurs proportionnelles.

Fig. 104

Examinons maintenant quelques exemples.

Exemple 48. Soit pour le schéma de la fig. 104,*a* la F.E.M. $e = 141 \sin \omega t V$ et $R_1 = 3\Omega$; $R_2 = 2\Omega$; $L = 0{,}00955H$. Fréquence angulaire $\omega = 314 s^{-1}$. Calculer le courant et la tension pour les éléments de ce circuit.

Solution. Ecrivons l'équation pour les valeurs instantanées:

$$i = (R_1 + R_2) + L\frac{di}{dt} = e.$$

Récrivons cette équation sous forme complexe:

$$\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega L\dot{I} = \dot{E}$$

ou

$$\dot{I}Z = \dot{E}, \text{ où } Z = R_1 + R_2 + j\omega L = 3 + 2 + j314 \cdot 0{,}00955 = 5 + 3j = 5{,}82e^{j31°}.$$

Valeur efficace complexe de F. E. M.

$$\dot{E} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100\,V.$$

Trouvons

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{100}{5{,}82e^{j31°}} = 17{,}2e^{-j31°}\,A.$$

Tension aux bornes de la résistance R_1

$$\dot{U}_{R1} = \dot{U}_{ab} = \dot{I}R_1 = 51{,}6e^{-j31°}\,V.$$

Tension aux bornes de la résistance R_2

$$\dot{U}_{R_2} = \dot{U}_{bc} = \dot{I}R_2 = 34{,}4e^{-j31°}\,V.$$

Tension aux bornes de l'inductance

$$\dot{U}_L = \dot{U}_{cd} = j\omega L\dot{I} = 3j \cdot 17{,}2e^{-j31°} = 51{,}6e^{j59°}\,V.$$

Le diagramme vectoriel en question est représenté sur la fig. 104, *b*. Le vecteur $\dot{E}$ est dirigé suivant l'axe $+1$. Le courant est en retard de 31° sur ce vecteur.

Exemple 49. Résoudre le problème de l'exemple 48 par la méthode des grandeurs proportionnelles.

Solution. Prenons 1 A comme courant dans le circuit et dirigeons-le suivant l'axe $+1$ ($\dot{I} = 1$) du diagramme vectoriel de la fig. 104, *c*. La tension aux bornes de la résistance active R_1, en phase avec le courant, est numériquement égale à $1 \cdot 3 = 3$ V. La tension aux bornes de R_2, également en phase avec le courant, est égale à 2 V. La tension aux bornes de l'inductance est égale à 3 V et est en avance de 90° sur le courant. Il découle du triangle rectangle que pour un courant de 1 A, circulant dans le circuit considéré, la F.E.M. à l'entrée doit être

$$\sqrt{5^2+3^2} = 5{,}82\ V.$$

La F.E.M. appliquée en réalité à l'entrée étant de 17,2 fois plus grande, tous les courants et les tensions doivent être multipliés par 17,2. Sur le diagramme vectoriel de la fig. 104, *c*, tous les vecteurs sont tournés de 31°, en sens inverse des aiguilles d'une montre, par rapport aux vecteurs correspondants du diagramme vectoriel de la fig. 104, *b*. Il est évident, que la position réciproque des vecteurs sur le diagramme ne s'est pas modifiée de ce fait.

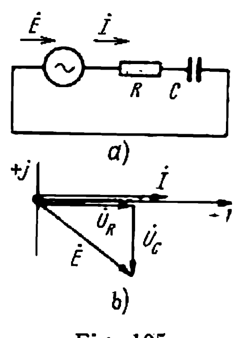


Fig. 105

Exemple 50. Une résistance active et une capacité représentées sur la fig. 105, *a* sont couplées en série; $R = 4\Omega$; la fréquence angulaire $\omega = 10^5 s^{-1}$. Calculer la valeur de la capacité C si pour une F.E.M. $E = 10$ mV, le courant dans ce circuit est de 2 mA.

Solution. Impédance du circuit

$$Z = R - \frac{j}{\omega C}.$$

Son module

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Conformément à la loi d'Ohm

$$I = \frac{E}{z}.$$

D'où

$$z = \frac{E}{I} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 5\Omega.$$

Par conséquent,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

et

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^5 \cdot 3} = 3{,}33 \mu F.$$

Le diagramme vectoriel correspondant est représenté sur la fig. 105, *b*.

Exemple 51. Le tronçon *ab* d'un circuit ramifié de la fig. 106, *a* comporte une réactance inductive $X_L = \omega L$ et une résistance active R, numériquement égale à X_L, couplées en parallèle. L'ampèremètre A_2 indique 5 A. Calculer les indications de l'ampèremètre A_3, en négligeant les résistances des ampèremètres, considérées comme très faibles.

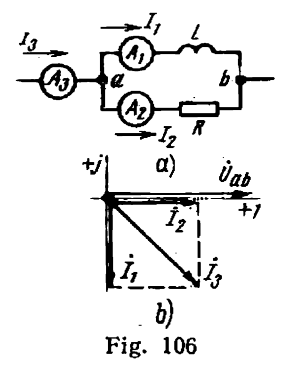


Fig. 106

Solution. Construisons le diagramme vectoriel qualitatif, représenté sur la fig. 106, *b*. La tension $\dot{U}_{ab}$ est en phase avec le courant $\dot{I}_2$. Le courant $\dot{I}_1$ est en retard de 90° sur le courant $\dot{I}_2$ et lui est égal en valeur. Le courant dans le tronçon non ramifié du circuit $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. Le module du courant $\dot{I}_3$ est égal à $5\sqrt{2} = 7{,}05\ A$. L'ampèremètre A_3 indique 7,05 A.

Exemple 52a. Construisons le diagramme vectoriel des courants et des tensions pour le schéma de la fig. 107, *a* si le courant $I_1 = 1\ A$; $R_1 = 10\Omega$; $\omega L_1 = 10\Omega$; $\frac{1}{\omega C} = 14{,}1\Omega$; $\omega L_3 = 20\Omega$ et $R_3 = 2{,}5\Omega$.

Solution. Désignons les courants et choisissons pour eux les sens positifs conformément à la fig. 107, *a*. Prenons comme échelle pour les courants $m_I = 0{,}5\ A/cm$ et pour les tensions $m_U = 4\ V/cm$. Orientons le courant $\dot{I}_1$ suivant l'axe $+1$ (fig. 107, *b*). La chute de tension $\dot{U}_{R_1}$, numériquement égale à 10 V, est en phase avec le courant $\dot{I}_1$. La chute de tension dans la réactance inductive ωL_1 de même égale à 10 V est en avance de 90° sur le courant $\dot{I}_1$. La somme géométrique $\dot{U}_{R_1} + \dot{U}_{L_1}$ a son module égal à $10\sqrt{2} = 14{,}1\ V$. Le courant capacitif $\dot{I}_2$ est en avance de 90° sur la tension.

Le module de ce courant

$$I_2 = \frac{14{,}1}{14{,}1} = 1\ A.$$

Le courant dans le tronçon non ramifié du circuit est égal à la somme géométrique des courants $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. Son module est égal à 0,8 A (calculé par la méthode graphique). La chute de tension aux bornes de la résistance R_3, égale à 2 V, est en phase avec le courant. La chute de tension aux bornes de l'inductance L_3, en avance de 90° sur le courant $\dot{I}_3$, est numériquement égale à $0{,}8 \cdot 20 = 16\ V$. La tension à l'entrée du circuit est égale à la F.E.M., soit à $\sim 18{,}3\ V$.

Exemple 52b. Examinons maintenant un problème inverse à celui examiné dans l'exemple 52a.

Admettons que dans le circuit de la fig. 107, *a* on ait trouvé par voie expérimentale les courants I_1, I_2 et I_3 (des ampèremètres dont

on a noté les indications ont été intercalés dans toutes les branches du circuit) : $I_1 = 1$ A ; $I_2 = 1$ A ; $I_3 \approx 0{,}8$ A et qu'on ait également relevé les trois tensions suivantes : la tension à l'entrée du circuit égale à la F.E.M. $E = 18{,}3$ V, la tension aux bornes de la capacité $U_C = 14{,}1$ V (c'est aussi la tension aux bornes de la première branche) et la tension U_3 aux bornes de la troisième branche (de R_3 et de L_3) $U_3 = 16$ V. Ces tensions ont été mesurées en branchant un voltmètre successivement aux bornes a et e, a et c, e et c.

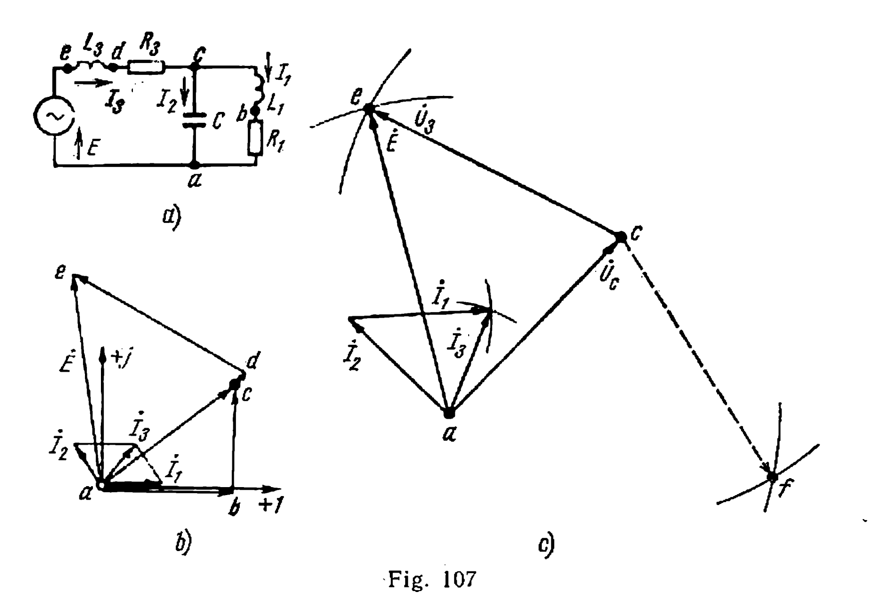


Fig. 107

On demande de construire un diagramme vectoriel en partant de ces données expérimentales (d'après les valeurs des trois courants et des trois tensions).

S o l u t i o n. Sur la fig. 107, c traçons le vecteur $\dot{U}_C$ égal à 14,1 V. Pour faciliter la comparaison avec la fig. 107, b plaçons-le sur ce diagramme comme il a été placé sur la fig. 107, b.

Traçons sur le diagramme le courant $\dot{I}_2$. Il est en avance de 90° sur la tension $\dot{U}_C$ et son module est égal à 1 A. Après ceci on peut construire les courants $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_3$ en partant du fait que les trois courants ($\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ et $\dot{I}_3$) forment un triangle fermé (fig. 107, b).

Pour construire un triangle en partant de ses trois côtés (autrement dit pour déterminer son troisième sommet) traçons à partir de l'extrémité du courant $\dot{I}_2$ (de l'un des sommets du triangle) un arc de rayon égal au courant $\dot{I}_1$ et de l'origine du courant $\dot{I}_2$ (c'est-à-dire du deuxième sommet du triangle) traçons un arc de rayon égal à $\dot{I}_3$.

Le point d'intersection de ces deux arcs est le troisième sommet du triangle, c'est-à-dire le point où aboutissent les vecteurs des courants $\dot{I}_3$ et $\dot{I}_1$.

Après avoir déterminé sur le diagramme la position du courant $\dot{I}_3$, on peut y représenter les vecteurs de tension $\dot{U}_3$ et de la F.E.M. $\dot{E}$.

Les tensions $\dot{U}_C$, $\dot{U}_3$ et la F.E.M. $\dot{E}$ forment également un triangle fermé. Pour le construire procédons de la même manière que pour le triangle des courants.

En partant de l'extrémité du vecteur $\dot{U}_C$, traçons un arc de rayon égal à $\dot{U}_3$ et en partant de l'origine du vecteur U_C, un autre arc de rayon égal à $\dot{E}$. Ces arcs se coupent en deux points: les points *e* et *f*.

Du fait que la tension $\dot{U}_3$ représente la chute de tension due au courant $\dot{I}_3$ dans R_3 et L_3 couplées en série, elle doit être en avance sur le courant $\dot{I}_3$ et non pas en retard sur ce dernier.

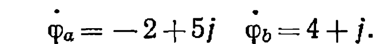
Par conséquent, choisissons parmi les deux points (*e* et *f*), le point *e* (si nous avions choisi le point *f*, nous aurions pour la tension $\dot{U}_3$ représentée en pointillé sur la fig. 107, *c* un retard sur le courant I_3 et non pas une avance par rapport à ce dernier).

Remarquons en conclusion que dans le triangle des courants les arcs se coupent également en deux points, dont le deuxième (non utilisé) n'est pas représenté sur la fig. 107, *c*.

§ 99. Représentation d'une différence de potentiel dans le plan complexe. Les potentiels d'un circuit à courant alternatif sont des nombres complexes. Dans le plan complexe un nombre complexe peut être représenté soit par un point dont les coordonnées sont égales aux parties réelle et imaginaire du potentiel complexe, soit par un vecteur dirigé de l'origine des coordonnées vers le point considéré du plan.

Fig. 108

Deux vecteurs représentés sur la fig. 108, à titre d'exemple, représentent les potentiels complexes:



$$\dot{\varphi}_a = -2 + 5j \quad \dot{\varphi}_b = 4 + j.$$

Par définition la différence de potentiel $\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = -6 + 4j$; $\dot{U}_{ab}$ sera représenté par un vecteur dirigé de *b* vers *a*. Le premier indice figuré auprès de la tension (l'indice *a* dans notre exemple) indique le point vers lequel il faut diriger la flèche du vecteur tension. Naturellement

$$\dot{U}_{ba} = -\dot{U}_{ab}.$$

§ 100. Diagramme topographique. Chaque point d'un circuit électrique, auquel sont raccordées plusieurs résistances, a son potentiel complexe.

L'ensemble des points du plan complexe, représentant les potentiels complexes des points homologues d'un circuit électrique est appelé *diagramme topographique.*

L'utilisation du terme « topographique » s'explique par la ressemblance de ce diagramme avec une carte topographique d'une localité quelconque. Sur une carte topographique chaque point du terrain est représenté par un point déterminé. La distance entre deux points sur le terrain peut être déterminée en mesurant la distance entre deux points homologues représentés sur la carte.

Des mesures analogues peuvent être effectuées également sur un diagramme topographique. La tension entre deux points quelconques d'un circuit électrique, entre les points a et b par exemple, est déterminée en grandeur et en direction par le vecteur tracé sur le diagramme topographique et allant du point b au point a.

Lorsqu'on construit un diagramme topographique, de même que pour la construction du diagramme des potentiels (voir § 9), le potentiel d'un point quelconque du circuit peut être pris comme nul. Sur le diagramme topographique ce point est placé à l'origine des coordonnées. De ce fait la position sur le diagramme de tous les autres points du circuit sera parfaitement déterminée. Elle dépendra des paramètres du circuit, à savoir des F.E.M. et des courants dans ses diverses branches. Examinons un exemple de construction d'un diagramme topographique.

E x e m p l e 53. En partant des données de l'exemple 52a construire un diagramme topographique pour le schéma de la fig. 107, a.

S o l u t i o n. Désignons par les lettres a, b, c, . . . les points du schéma de la fig. 107, a que nous voulons représenter sur le diagramme topographique. Considérons que le potentiel du point a est nul:

$$\dot{\varphi}_a = 0.$$

Exprimons le potentiel du point b à l'aide du potentiel du point a:

$$\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_a + \dot{I}_1 R_1 = \dot{\varphi}_a + 10.$$

Le signe + placé devant le terme $I_1 R_1$ est dû au déplacement en sens inverse du courant I_1 lorsque nous passons du point a au point b. La coordonnée du point b en abscisses du diagramme est égale à + 10. De même,

$$\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_b + \dot{I}_1 j\omega L_1 = 10 + j10;$$

$$\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_c + \dot{I}_3 R_3;$$

$$\dot{\varphi}_e = \dot{\varphi}_d + \dot{I}_3 j\omega L_3.$$

L'ensemble des points a, b, c, d, e du plan complexe de la fig. 109 représente justement le diagramme topographique du schéma de la fig. 107, a. Il est très commode, en utilisant ce diagramme de déterminer la tension

entre deux points quelconques du schéma, ainsi que le déphasage de cette tension par rapport à une autre tension quelconque *.

Examinons quelques exemples d'utilisation de la méthode des potentiels des nœuds et de celle des courants fictifs maillés.

Exemple 54. Déterminer par la méthode des deux nœuds les courants du circuit de la fig. 110. Les sens positifs des F.E.M. sont indiqués par des flèches sur le schéma:

$$e_1 = 120\sqrt{2}\sin\omega t\ V;\quad e_3 = 100\sqrt{2}\sin(\omega t - 30^\circ)\ V;$$

$$R = 2\Omega;\quad \frac{1}{\omega C_2} = 10\Omega;\quad \omega L_3 = 5\Omega.$$

Solution. Ecrivons la F.E.M. sous sa forme complexe:

$$\dot{E}_1 = 120,\quad \dot{E}_3 = 100e^{-j30^\circ}.$$

Fig. 109

Fig. 110

Considérons comme sens positifs pour les courants dans les diverses branches ceux dirigés vers le nœud a. Calculons les admittances des branches

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ S;\quad Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{-10j} = 0{,}1j\ S;$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{5j} = -0{,}2j\ S.$$

Tension entre les nœuds a et b (voir l'expression 1.20):

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\dot{E}_1\dot{Y}_1 + \dot{E}_3\dot{Y}_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{120\cdot 0{,}5 + 100e^{-j30^\circ}\cdot 0{,}2e^{-j90^\circ}}{0{,}5 + 0{,}1j - 0{,}2j} = 104e^{-j8^\circ}\ V.$$

Le courant

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{ab}}{Z_1} = \frac{120 - 104e^{-j8^\circ}}{2} = 8{,}5 + j7{,}25 = 11{,}17e^{j40^\circ 25'}\ A;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-\dot{U}_{ab}}{Z_2} = \frac{-104e^{-j8^\circ}}{-10e^{j90^\circ}} = 10{,}4e^{-j98^\circ}\ A;$$

---

* Il y a lieu de signaler qu'en général il n'existe pas de similitude graphique entre un diagramme topographique et le schéma électrique pour lequel ce diagramme a été construit.

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{E}_3-\dot{U}_{ab}}{Z_3}=\frac{100e^{-j30^\circ}-104e^{-j8^\circ}}{5j}=$$

$$=\frac{100(\cos 30^\circ-j\sin 30^\circ)-104(\cos 8^\circ-j\sin 8^\circ)}{5j}=$$

$$=\frac{-16,2-35,5j}{5j}=\frac{39,1e^{j245^\circ 30'}}{5e^{j90^\circ}}=7,82e^{j155^\circ 30'}\ A.$$

Exemple 55. Trouver les courants dans le schéma de la fig. 111, *a* par la méthode des courants fictifs maillés et construire le diagramme topographique correspondant:

$$\dot{E}_1=100\ V;\quad \dot{E}_2=100e^{j90^\circ}\ V;\quad X_C=\frac{1}{\omega_C}=2\Omega;$$

$$R=\omega L=5\Omega.$$

Solution. Considérons comme sens positif des courants fictifs maillés $\dot{I}_{11}$ et $\dot{I}_{22}$ celui des aiguilles d'une montre. Ecrivons sous sa forme générale l'équation pour les courants fictifs maillés (voir les équations 1.4′):

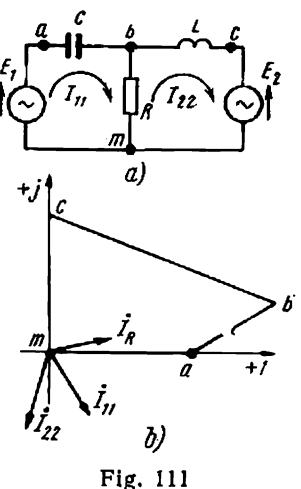


Fig. 111

$$\dot{I}_{11}Z_{11}+\dot{I}_{22}Z_{12}=\dot{E}_{11};$$

$$\dot{I}_{11}Z_{21}+\dot{I}_{22}Z_{22}=\dot{E}_{22}.$$

Où Z_{11} — impédance propre du premier circuit

$$Z_{11}=R-\frac{j}{\omega C}=5-2j;$$

Z_{22} — impédance propre de la deuxième maille:

$$Z_{22}=R+j\omega L=5+5j.$$

$Z_{12}=Z_{21}$ — impédance de la branche commune à la première et à la deuxième mailles, prise avec un signe contraire

$$Z_{12}=-R_1=-5;$$

$\dot{E}_{11}$ — somme algébrique des F.E.M de la première maille

$$\dot{E}_{11}=\dot{E}_1=100;$$

$\dot{E}_{22}$ — somme algébrique des F.E.M. de la deuxième maille

$$\dot{E}_{22}=-\dot{E}_2=-100j.$$

Par conséquent,

$$\dot{I}_{11}(5-2j)-5\dot{I}_{22}=100;$$

$$-5\dot{I}_{11}+\dot{I}_{22}(5+j5)=-100j.$$

Le déterminant du système

$$\Delta=\begin{vmatrix}(5-2j) & -5\\ -5 & (5+5j)\end{vmatrix}=10+15j=18e^{j56°20''};$$

$$\dot{I}_{11}=\frac{\Delta_1}{\Delta};\quad \dot{I}_{22}=\frac{\Delta_2}{\Delta};$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}(5-2j) & 100\\ -5 & -100j\end{vmatrix}=300-500j=582e^{-j59°};$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}100 & -5\\ -100j & (5+5j)\end{vmatrix}=500;$$

$$\dot{I}_{11}=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{500}{18e^{j56°20'}}=27{,}8e^{-j56°20'}\ A;$$

$$\dot{I}_{22}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{582e^{-j59°}}{18e^{j56°20'}}=32{,}3e^{-j115°20'}\ A.$$

Le courant dans la résistance R (dirigé du point b au point m)

$$\dot{I}_{11}-\dot{I}_{22}=30^{j11°43'}\ A.$$

Le diagramme topographique est représenté sur la fig. 111, b.

5. **§ 101. Puissances active, réactive et apparente.** On entend par puissance active P la valeur moyenne de la puissance instantanée p pendant la période T

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt. \qquad (5.42)$$

Si le courant $i=I_m\sin\omega t$, la tension aux bornes du tronçon considéré du circuit $u=U_m\sin(\omega t+\varphi)$, on a

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T I_mU_m\sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)\,dt=\frac{U_mI_m}{2}\cos\varphi=UI\cos\varphi. \qquad (5.43)$$

La *puissance active* est au point de vue physique l'énergie dégagée par unité de temps * sous forme de chaleur (par effet Joule) dans la résistance R du tronçon considéré du circuit. En effet, le produit $U\cos\varphi=IR$; par conséquent

$$P=I^2R. \qquad (5.44)$$

La puissance active est mesurée en watts (W).

On entend par puissance *réactive* Q le produit de la tension U aux bornes d'un tronçon du circuit par le courant I circulant dans ce tronçon et par le sinus de l'angle φ entre la tension U et le courant I

$$Q=UI\sin\varphi. \qquad (5.45)$$

---

* On suppose qu'une seconde comprend un nombre entier de périodes T.

On exprime la puissance réactive en « voltampères réactifs », ou en VAr en abrégé. Si $\sin\varphi > 0$ on a $Q > 0$ et si $\sin\varphi < 0$ on a $Q < 0$.

Examinons la signification physique de la puissance réactive. A cette fin prenons un tronçon du circuit comprenant R, L et C couplées en série. Soit $i = I_m \sin\omega t$ le courant qui y circule. Ecrivons l'expression pour la valeur instantanée de la somme des énergies des champs magnétique et électrique de ce circuit:

$$W_{Me} = W_M + W_e = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}\sin^2\omega t +$$

$$+ \frac{CI_m^2}{2(\omega C)^2}\cos^2\omega t = \frac{LI^2}{2}(1-\cos 2\omega t) + \frac{I^2}{2\omega^2 C}(1+\cos 2\omega t).$$

Il découle de l'expression ainsi obtenue que W_{Me} a une composante continue W_{Me_0}, invariable dans le temps et une composante alternative w_{Me} qui varie à une fréquence angulaire double.

$$W_{Me} = W_{Me_0} - w_{Me};$$

$$W_{Me_0} = \frac{LI^2}{2} + \frac{I^2}{2\omega^2 C}$$

et

$$w_{Me} = \left(\frac{LI^2}{2} - \frac{I^2}{2\omega^2 C}\right)\cos 2\omega t.$$

Pour créer la composante continue W_{Me_0} on a dépensé une certaine quantité d'énergie pendant le processus d'établissement du régime périodique considéré. Par la suite, lorsque le processus périodique est établi, l'énergie W_{Me_0} reste invariable et, par conséquent, la source d'alimentation n'a plus besoin de fournir d'énergie pour la créer.

La valeur moyenne de l'énergie w_{Me}, fournie par la source pendant l'intervalle de temps compris entre $-\frac{T}{8}$ et $+\frac{T}{8}$

$$W_{Me_{moy}} = \frac{4}{T}\int_{t=-\frac{T}{8}}^{t=\frac{T}{8}} w_{Me}\,dt = \frac{1}{\pi}\left(LI^2 - \frac{I^2}{\omega^2 C}\right) = \frac{1}{\pi\omega} I^2 (X_L - X_C) =$$

$$= \frac{1}{\pi\omega} UI\sin\varphi = \frac{1}{\pi\omega} Q. \qquad (5.46)$$

Ainsi, la puissance réactive Q est proportionnelle à la valeur moyenne de l'énergie fournie pendant un quart de période par la source d'alimentation pour créer la composante alternative du champ électrique magnétique de l'inductance et de la capacité.

Pendant une période du courant alternatif, l'énergie $W_{Me\,moy}$ est deux fois cédée par le générateur au circuit et deux fois restituée par le circuit au générateur.

En d'autres termes, la puissance réactive caractérise l'énergie échangée entre le générateur et le récepteur.

La puissance apparente (oscillante)

$$S = UI. \qquad (5.47)$$

Elle est mesurée en voltampères, ou en VA en abrégé. La relation suivante existe entre P, Q et S

$$P^2 + Q^2 = S^2. \tag{5.48}$$

On peut représenter cette relation par la méthode graphique sous forme d'un triangle rectangle (fig. 112), appelé *triangle des puissances* dont l'un des côtés est égal à P, l'autre à Q et l'hypoténuse à S.

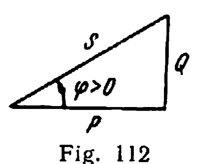


Fig. 112

On indique la valeur S sur la plaque signalétique d'une source quelconque d'énergie électrique à courant alternatif (alternateur, transformateur, etc.). Elle caractérise la puissance que la source *peut* fournir à l'utilisateur *si* ce dernier fonctionne avec un $\cos\varphi = 1$ (c'est-à-dire si c'est une résistance purement active).

§ 102. Expression de la puissance sous forme complexe. Soit une certaine quantité complexe

$$\dot{A} = Ae^{j\varphi_A} = A\cos\varphi_A + jA\sin\varphi_A.$$

Sa conjuguée complexe $\overset{*}{A}$ sera par définition :

$$\overset{*}{A} = Ae^{-j\varphi_A} = A\cos\varphi_A - jA\sin\varphi_A.$$

Examinons un mode simple de calcul des puissances active et réactive à partir de la tension complexe et du courant complexe conjugué. Désignons par $\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}$ la tension aux bornes d'un certain tronçon du circuit, et par $\dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$ le courant dans ce tronçon. L'angle entre la tension et le courant est $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Multiplions la tension complexe par le courant complexe conjugué $\overset{*}{I} = Ie^{-j\varphi_i}$ et désignons l'expression complexe ainsi obtenue par $\tilde{S}$

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = UIe^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ. \tag{5.49}$$

Le signe $\sim$ (le tilde), placé au-dessus de S signifie qu'il s'agit de la puissance apparente complexe (et non de sa conjuguée), formée avec le courant complexe conjugué $\overset{*}{I}$.

Ainsi, la puissance active P est la partie réelle (Re) et la puissance réactive Q la partie imaginaire (Im) du produit $\dot{U}\overset{*}{I}$

$$\left.\begin{aligned} P &= \mathrm{Re}\,\dot{U}\overset{*}{I}; \\ Q &= \mathrm{Im}\,\dot{U}\overset{*}{I}. \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

Exemple 56. Calculer les puissances active, réactive et apparente en partant des données de l'exemple 48.

Solution. La tension aux bornes de l'ensemble du circuit est égale à la F.E.M. :

$$\dot{U} = \dot{E} = 100\ V.$$

Le courant dans le circuit $\dot{I} = 17{,}2\ e^{-j31^\circ}\ A$.

Le courant conjugué $\overset{*}{I} = 17{,}2\,e^{j31°}$.

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = 100 \cdot 17{,}2e^{j31°} = 1720 \cos 31° + j\,1720 \sin 31° = 1475 + j\,886\,;$$

$$\operatorname{Re} \dot{U}\overset{*}{I} = 1475\,;\ \operatorname{Im} \dot{U}\overset{*}{I} = 886.$$

Par conséquent, la puissance active $P = 1475\ W$, la puissance réactive $Q = 886\ VAr$ et la puissance apparente $S = 1720\ VA$.

§ 103. Mesure de la puissance au wattmètre. On mesure habituellement la puissance à l'aide d'un wattmètre électrodynamique. C'est un appareil dans lequel une bobine mobile solidaire d'une aiguille indicatrice peut tourner dans le champ magnétique d'une bobine fixe.

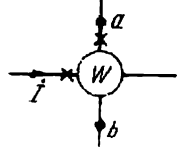


Fig. 113

La bobine fixe, à quelques spires de gros fil, a une très faible résistance et est appelée par la suite enroulement en série. Elle est intercalée dans le circuit en série, comme un ampèremètre. La bobine mobile est exécutée en un fil très fin, sa résistance peut être considérée comme purement active et nous l'appellerons par la suite « enroulement en dérivation ». Elle est branchée en parallèle au tronçon considéré du circuit, comme un voltmètre.

Dans un schéma électrique un wattmètre est représenté par un petit cercle, entourant la lettre W et comprenant quatre fils sortant de ce cercle (fig. 113). Deux des bornes du symbole (ce sont habituellement les bornes horizontales) appartiennent à l'enroulement en série et les deux bornes représentées verticalement en général appartiennent à l'enroulement en dérivation. Les bornes de même polarité des deux enroulements sont habituellement marquées par des astérisques.

Le couple moteur du wattmètre et, par conséquent, ses indications sont proportionnels au produit scalaire de la tension $\overline{U}_{ab}$ aux bornes de l'enroulement en dérivation par le courant $\overline{I}$ circulant dans l'enroulement en série.

La tension aux bornes de l'enroulement en dérivation est prise égale à la différence de potentiel entre la borne de cet enroulement désignée par l'astérisque (point a sur la fig. 113) et son autre borne ne comportant pas d'astérisque (point b).

Le courant I entre par l'extrémité de l'enroulement en série, désignée par l'astérisque.

En écrivant le produit scalaire, exprimant les indications du wattmètre, on surligne les vecteurs tension et courant. Ainsi, la valeur indiquée par le wattmètre (fig. 113) est calculée comme le produit scalaire $\overline{U}_{ab}\overline{I} = U_{ab}\, I \cos (\dot{U}_{ab} \,\hat{}\, \dot{I})$. En général le wattmètre est branché au circuit de manière que le produit scalaire de la tension par le courant, mesuré par ce wattmètre, soit la puissance active.

Cependant pour un branchement particulier, le produit scalaire de la tension par le courant peut donner non pas la puissance active, mais la puissance réactive (voir pour détails le § 144).

La valeur d'une division de l'échelle du wattmètre est déterminée

comme quotient du produit de la tension nominale par le courant nominal (ces valeurs étant indiquées sur la platine de l'appareil) par le nombre de divisions de l'échelle.

E x e m p l e 57. Tension nominale du wattmètre : 120 V. Courant nominal : 5 A. Son échelle comporte 150 divisions. Calculer la valeur d'une division de l'échelle.

S o l u t i o n. La valeur d'une division est égale à $\frac{120 \cdot 5}{150} = 4\ W/div.$

5 , **§ 104. Dipôle branché dans un circuit à courant sinusoïdal.** Le schéma de la fig. 114 représente un dipôle passif branché à une source de F.E.M. Impédance d'entrée du dipôle

$$Z_{ent} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}}.$$

Dans le cas général

$$Z_{ent} = R_{ent} + j\,X_{ent} = ze^{j\varphi}.$$

Si $X_{ent} > 0$, l'impédance d'entrée a un caractère inductif et si $X_{ent} < 0$ elle a un caractère capacitif et pour $X_{ent} = 0$ elle est purement active. L'admittance d'entrée Y_{ent} est l'inverse de l'impédance d'entrée

$$Y_{ent} = \frac{1}{Z_{ent}}.$$

L'impédance d'entrée peut être déterminée soit par voie de calcul si on connaît le schéma des connexions intérieures du dipôle et les valeurs de ses résistances et réactances, soit par voie expérimentale.

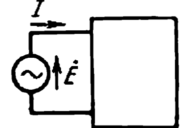


Fig. 114

Si on désire déterminer l'impédance d'entrée par voie expérimentale, le dipôle doit être monté suivant le schéma de la fig. 115, *a*. Dans ce schéma l'ampèremètre mesure le courant I, le voltmètre — la tension $U_{ab} = U$ à l'entrée du dipôle. Le wattmètre mesure le produit scalaire de la tension $\dot{U}_{ab}$ par le courant $\dot{I}$. Cette valeur est égale à la puissance active $P = UI \cos\varphi$. Le module de l'impédance d'entrée est $z = \frac{U}{I}$. La division de P par le produit UI donne le cosinus de l'angle entre la tension et le courant, $\cos\varphi = \frac{P}{UI}$.

A l'aide de ce cosinus on trouve $\sin\varphi$ et ensuite on calcule

$$R_{ent} = z\cos\varphi \quad \text{et} \quad X_{ent} = z\sin\varphi.$$

Du fait que le cosinus est une fonction paire c'est-à-dire que $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, les mesures exposées ci-dessus pour le calcul de l'impédance d'entrée doivent être complétées par un deuxième essai, dont le but est de déterminer le signe de l'angle φ par comparaison des indications de l'ampèremètre au cours de ces deux essais.

Pour déterminer le signe de l'angle φ on branche en parallèle au dipôle examiné une petite capacité C en fermant pour cela l'interrupteur K (fig. 115, *a*).

Si les indications de l'ampèremètre aprés fermeture de l'interrupteur K diminuent, l'angle φ est positif et l'impédance d'entrée $Z = ze^{j\varphi}$ a un caractère inductif (le diagramme vectoriel représenté sur la fig. 115, *b* correspond à cette éventualité).

Si les indications de l'ampèremètre augmentent à la suite de la fermeture de l'interrupteur, l'angle φ est négatif et l'impédance d'entrée a un caractère capacitif (diagramme vectoriel de la fig. 115, *c*).

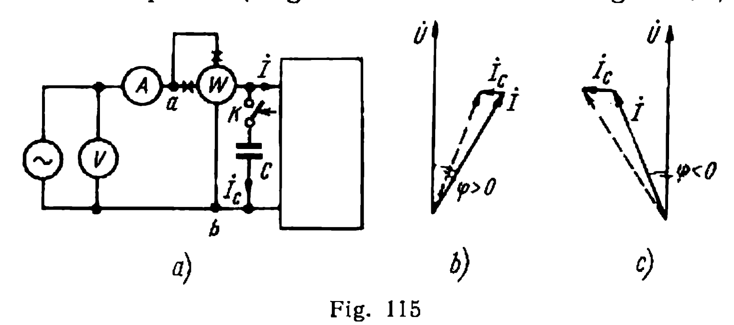


Fig. 115

Sur les diagrammes des fig. 115, *b* et *c* $\dot{I}$ est le courant circulant dans le dipôle; $\dot{I}_c$ — courant circulant dans la capacité, en avance de 90° sur la tension $\dot{U}$ à l'entrée du dipôle. Le courant circulant dans l'ampèremètre, lorsque l'interrupteur est fermé, est représenté en pointillé. La comparaison du courant représenté en pointillé avec le courant $\dot{I}$ a permis d'aboutir à la conclusion ci-dissus.

Exemple 58. Il résulte des mesures effectuées à l'aide du schéma de la fig. 115, *a* que $U = 120\ V$; $I = 5\ A$; $P = 400\ W$. La fermeture de l'interrupteur K a donné lieu à la diminution des indications du wattmètre. Calculer l'impédance d'entrée du dipôle.

Solution. Le module de l'impédance d'entrée

$$z = \frac{U}{I} = 24\Omega;\ \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{400}{120\cdot 5} = 0,666;\ \sin\varphi = 0,745;$$

$$R_{ent} = z\cos\varphi = 24\cdot 0,666 = 16\Omega;\ X_{ent} = z\sin\varphi = 24\cdot 0,745 = 17,9\Omega.$$

L'impédance d'entrée complexe

$$Z_{ent} = (16 + j\,17,9)\,\Omega.$$

§ 105. Fonctionnement d'un dipôle en régime de résonance. Soit un dipôle comprenant une ou plusieurs inductances et une ou plusieurs capacités. On appelle *régime (ou régimes) de résonance* un mode de fonctionnement d'un dipôle de ce type pour lequel son impédance d'entrée de ce dipôle est purement ohmique *.

---

* Il en découle que pour calculer les conditions d'établissement de la résonance, il faut écrire que la partie imaginaire de la quantité complexe de l'impédance d'entrée du dipôle est nulle.

Ce mode de calcul des conditions d'établissement de la résonance est juste, si on ne néglige pas les résistances actives des bobines d'inductance.

Un dipôle, fonctionnant en régime de résonance, se comporte par rapport au circuit extérieur comme une résistance active et, par conséquent, le courant et la tension à l'entrée du dipôle sont en phase.

La puissance réactive du dipôle est nulle dans ces conditions.

On distingue deux variétés principales de régimes de résonance: résonance des courants et résonance des tensions.

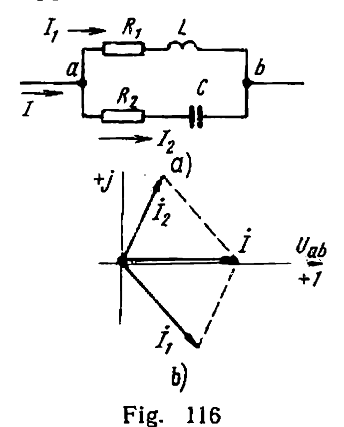


Fig. 116

§ 106. Résonance des courants. Le phénomène de résonance dans le schéma de la fig. 116, *a*, constitué par deux branches en parallèle à réactances d'un caractère différent, est appelé *résonance des courants* (ou résonance en parallèle ou encore antirésonance). Admettons que la première branche comprenne une résistance active R_1 et une réactance inductive ωL, et la deuxième branche une résistance active R_2 et une réactance capacitive $\frac{1}{\omega C}$.

Le courant $\dot{I}_1$ dans la première branche est en retard sur la tension $\dot{U} = \dot{U}_{ab}$ (voir fig. 116, *b*) et peut être écrit:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} Y_1 = \dot{U}\ (g_1 - j\, b_1).$$

Le courant $\dot{I}_2$ dans la deuxième branche est en avance sur la tension

$$\dot{I}_2 = \dot{U} Y_2 = \dot{U}\ (g_2 - j\, b_2).$$

Courant dans le tronçon non ramifié du circuit:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}\,(g_1 + g_2) - j\, \dot{U}\ (b_1 + b_2).$$

Par définition du régime de résonance, le courant $\dot{I}$ doit être en phase avec la tension $\dot{U}$. Ceci n'est possible que si la somme des susceptances des branches est nulle

$$b_1 + b_2 = 0.$$

Suivant (5.36) on a

$$b_1 = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{et} \quad b_2 = -\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Par conséquent, la condition d'établissement d'un régime de résonance des courants pour le schéma de la fig. 116, *a* s'écrit:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \qquad (5.51)$$

La fig. 116, *b* représente un diagramme vectoriel pour un régime de résonance. Il découle de (5.51) que pour $R_2 = 0$ la résonance s'établit pour

$$\frac{\omega L}{R_1^2+\omega^2 L^2}=\omega C. \qquad (5.51')$$

Dans un cas encore plus particulier, lorsque $R_2 = 0$ et $R_1 \ll \omega L$, la résonance s'établit pour

$$\omega^2 LC \approx 1. \qquad (5.51'')$$

La résonance peut être obtenue en faisant varier ω, L, C ou en modifiant les valeurs de R_1 et R_2. Le courant dans le tronçon non ramifié du circuit peut être moindre que les courants dans les branches de ce circuit. Pour $R_2 = 0$ et $R_1 \approx 0$, le courant I peut être infime par rapport aux courants I_1 et I_2.

Pour un régime de fonctionnement parfait, pratiquement irréalisable, lorsque $R_1 = R_2 = 0$, le courant dans le tronçon non ramifié du circuit est nul et l'impédance d'entrée du circuit devient égale à l'infini.

Signalons en outre le point suivant. Cinq grandeurs (L, C, R_1, R_2, ω) figurent dans l'expression (5.51). Si on calcule L ou C, en partant de cette expression il peut arriver qu'on obtienne deux valeurs réelles pour la grandeur cherchée. L'existence de deux valeurs réelles pour L et pour C indique que lorsque quatre paramètres du circuit restent invariables, on peut en faisant varier le cinquième paramètre obtenir deux régimes de résonance (les explications de ce phénomène sont données dans l'exemple 70).

Si on obtient pour la grandeur cherchée, ω par exemple, une valeur imaginaire, ceci veut dire que pour la combinaison donnée des quatre autres paramètres, la résonance ne peut pas être obtenue en faisant varier le cinquième.

Exemple 59. Soit pour le circuit de la fig. 116, *a* $R_1 = 30\,\Omega$; $\omega L = 40\Omega$; $R_2 = 0$; $\omega = 10^3\ s^{-1}$. Quelle est la capacité dans ce circuit réalisant une résonance des courants?

Solution. Suivant l'expression (5.51)

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{R_1^2+(\omega L)^2}{\omega L}=\frac{30^2+40^2}{40}=62{,}5\Omega\,;$$

$$C=\frac{1}{\omega X_C}=\frac{1}{10^3\cdot 62{,}5}=16\mu F.$$

§ 107. Compensation d'un déphasage. L'impédance d'entrée de la majorité des utilisateurs d'énergie électrique a un caractère inductif. Pour réduire le courant qu'ils consomment en diminuant sa composante réactive et pour réduire ainsi les pertes d'énergie dans l'alternateur et les conducteurs de distribution, on branche une batterie de condensateurs en parallèle avec le récepteur d'énergie.

Le processus de la diminution de l'angle de déphasage entre la tension aux bornes d'un récepteur et le courant fourni par l'alternateur est appelé compensation de déphasage ou amélioration du cos φ.

§ 108. Résonance des tensions. La résonance existant dans un circuit où R, L, C sont couplées en série (fig. 117, *a*) est appelée *résonance des tensions* (ou résonance série).

En cas de résonance, le courant dans un circuit doit être en phase avec la F.E.M. E. Le courant est en phase avec la F.E.M. E si l'impédance d'entrée du circuit

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

est purement active. La condition d'établissement de la résonance dans ce circuit est

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}\,. \tag{5.52}$$

On a alors $I = \frac{U}{R}$. La tension aux bornes de l'inductance est égale à celle aux bornes de la capacité

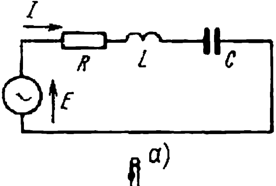
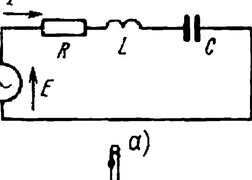
$$U_L = U_C = \omega L I = \frac{\omega L}{R} U.$$

La relation

$$\frac{\omega L}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = Q \tag{5.53}$$

est appelé *coefficient de qualité* (ou facteur Q) d'un circuit de résonance. Le coefficient de qualité indique de combien de fois la tension aux bornes de l'inductance (ou de la capacité) est supérieure à la tension à l'entrée de circuit en régime de résonance (on l'appela de ce fait également « coefficient de surtension »).

Pratiquement Q peut atteindre 200 et même plus. Le diagramme vectoriel d'un régime de résonance est représenté sur la fig. 117, *b*.

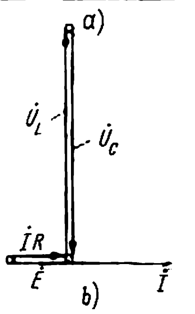


Fig. 117

§ 109. Etude du fonctionnement du schéma de la fig. 117, *a* en cas de variation de la fréquence ou de la variation de l'inductance. Supposons que dans le schéma de la fig. 117, *a* les paramètres R, L, C ainsi que la valeur de la F.E.M. E soient constants, mais que la fréquence ω varie. Examinons le caractère de variation du courant I et des tensions aux bornes de l'inductance U_L et de la capacité U_C en fonction de ω.

Le courant dans ce circuit est

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\,.$$

Lorsque ω varie, la réactance du circuit varie également

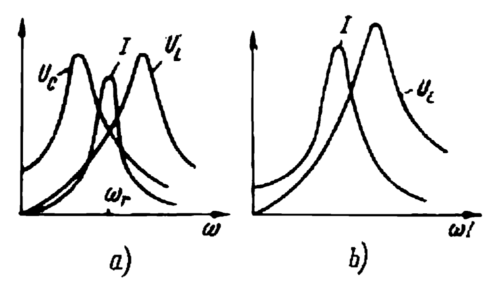
$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}\,:$$

pour ω* $\to 0$ $X \to -\infty$ et $I \to 0$;

pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $X = 0$ et $I = \frac{E}{R}$;

pour $\omega \to \infty$ $X \to \infty$ et $I \to 0$.

L'acuité de la courbe $I = f(\omega)$ est d'autant plus accentuée, que la résistance active du circuit résonnant en question est plus faible, les autres paramètres du circuit restant inchangés; autrement dit, ceci a lieu lorsque le coefficient de qualité Q du circuit s'augmente. Soit la tension aux bornes de l'inductance $U_L = \omega LI$. Pour $\omega \to 0$ $U_L = 0$; pour $\omega \to \infty$ $U_L \to E$ (fig. 118, *a*).



a) *b*)

Fig. 118

Une analyse détaillée, que nous omettons, montre que pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ la courbe U_L (et la courbe U_C) passent par un maximum et que pour $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ la courbe U_L tend d'une manière monotone vers E.

La tension aux bornes de la capacité $U_C = I\frac{1}{\omega C}$ pour $\omega \to 0$ tend vers E et pour $\omega \to \infty$ $U_C \to 0$. On voit sur la fig. 118, *a* que le maximum de la tension aux bornes de l'inductance U_L et le maximum tension aux bornes de la capacité U_C ont lieu pour des fréquences qui ne sont pas égales à la fréquence de résonance $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Le maximum de U_L a lieu pour une fréquence plus grande que ω_r et le maximum de U_C — pour une fréquence moindre que ω_r.

Si dans le schéma 117, *a* on fait varier non pas la fréquence, mais l'inductance L, les valeurs de I, U_L en fonction de $X_L = \omega L$ (ω = const) sont représentées par les courbes de la fig. 118, *b* **.

Exemple 60. Soit pour le schéma de la fig. 117, *a* $R = 10\ \Omega$; $L = 1H$; $C = 1\mu F$.

Calculer la fréquence de résonance, le coefficient de qualité Q, ainsi que la tension aux bornes de la capacité, lorsqu'on applique à l'entrée du circuit une tension de 10 *mV*, à la fréquence de résonance.

Solution. La fréquence de résonance $\omega_r = \omega$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 10^3 s^{-1}.$$

---

* La flèche $\to$ remplace ici les termes « qui tend » ou « tendant » respectivement.

** Du fait que $U_c = \frac{1}{\omega C} I$, $\frac{1}{\omega C}$ = const, la courbe $U_C = f(\omega L)$ a le même aspect qualitatif que la courbe $I = f(\omega L)$.

Le coefficient de qualité

$$Q=\frac{\omega L}{R}=\frac{10^3\cdot 1}{10}=100.$$

Le courant dans ce circuit

$$I=\frac{E}{R}=\frac{0{,}01}{10}=1\ mA.$$

La tension aux bornes de la capacité

$$U_C=QE=100\cdot 0{,}01=1\ V.$$

5 **§ 110. Courbe de réponse en fréquence d'un dipôle.** L'impédance d'entrée d'un dipôle et son admittance complexe d'entrée sont fonction de la fréquence. La variation, en fonction de la fréquence, des parties réelle et imaginaire de l'impédance d'entrée ou de l'admittance d'entrée d'un dipôle, sont appelées les *courbes de réponse en fréquence d'un dipôle.*

Les courbes de réponse en fréquence sont largement utilisées en radiotechnique et dans la technique des communications. Elles sont soit calculées en partant du schéma des connexions intérieures du dipôle et les valeurs des résistances actives, des inductances et des capacités de ce dipôle, soit relevées par voie expérimentale.

Lorsqu'on relève les courbes de réponse en fréquence par voie expérimentale, on applique à l'entrée du circuit une tension dont la fréquence peut varier dans de larges limites et en partant des résultats de mesure on calcule les parties réelle et imaginaire de l'impédance d'entrée.

Des inductances, des capacités et des résistances actives couplées en parallèle et en série peuvent faire partie d'un circuit d'un dipôle. Ce sont les courbes de réponse en fréquence des dipôles, comprenant uniquement des inductances et des capacités, qui présentent le plus d'intérêt. Si la fréquence de la source d'alimentation du dipôle est élevée, les réactances inductives des bobines d'induction deviennent nettement plus grandes que les résistances actives propres de ces bobines et pour simplifier la construction des courbes de réponse, on néglige souvent ces résistances. Un schéma ainsi simplifié et idéalisé ne comporte que des inductances et des capacités et la construction des courbes de réponse sera nettement facilitée de ce fait.

Examinons à titre d'exemple la construction des courbes de réponse en fréquence des dipôles représentés sur la fig. 119, *a* et *d*. Le dipôle de la fig. 119, *a* est constitué par l'inductance L_1 et la capacité C_1, couplées en série. Le dipôle de la fig. 119, *d* comprend une inductance L_2 et une capacité C_2, couplées en parallèle. Pour construire leurs courbes de réponse en fréquence, supposons qu'il n'existe pas de pertes d'énergie dans les réactances de tous les éléments faisant partie de ces dipôles. L'impédance d'entrée et l'admittance d'entrée pour les dipôles de la fig. 119, *a* sont respectivement:

$$Z=jX=J\left(\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}\right);\quad X=\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1};$$

$$Y=-jb=\frac{1}{j\left(\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}\right)};\quad b=\frac{1}{X}=\frac{1}{\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}}.$$

La droite *1* de la fig. 119, *b* représente la fonction $\omega L_1 = f(\omega)$; la courbe *2* est la fonction $\frac{1}{\omega C_1} = f(\omega)$ et la courbe *3* est la fonction $X = f(\omega)$.

La valeur de $\omega = \omega_0$ pour laquelle la courbe *3* (fig. 119, *b*) coupe l'axe des abscisses correspond à la fréquence angulaire pour laquelle la résonance des tensions s'établit dans le dipôle de la fig. 119, *a*.

Pour $\omega < \omega_0$ l'impédance d'entrée a un caractère capacitif (X est négatif) et pour $\omega > \omega_0$ l'impédance d'entrée a un caractère inductif (X est positif).

Du fait que la susceptance pour le schéma de la fig. 119, *a* $b = \frac{1}{X}$, la courbe $b = f(\omega)$, représentée sur la fig. 119, *c* est réciproquement inverse à la courbe *3* de la fig. 119, *b*. Pour $\omega < \omega_0$ l'impédance d'entrée a un caractère capacitif et pour $\omega > \omega_0$ elle a un caractère inductif. Au point $\omega = \omega_0$ la courbe $b = f(\omega)$ subit une discontinuité de $-\infty$ à $+\infty$. Pour le dipôle de la fig. 119, *e*, l'impédance d'entrée et l'admittance d'entrée sont respectivement:

$$Z = jX = \frac{j\omega L_2\left(-\frac{1}{\omega C_2}\right)}{j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = j\,\frac{\omega L_2}{1 - \frac{\omega L_2}{\frac{1}{\omega C_2}}};$$

$$X = \frac{\omega L_2}{1 - \frac{\omega L_2}{\frac{1}{\omega C_2}}};$$

$$Y = -jb = -j\,\frac{1 - \omega^2 L_2 C_2}{\omega L_2}; \quad b = \frac{1 - \frac{\omega L_2}{\frac{1}{\omega C_2}}}{\omega L_2}.$$

Les fonctions $X = f(\omega)$ et $b = f(\omega)$ sont respectivement représentées pour le schéma de la fig. 119, *d* sur les fig. 119, *e* et *f*. Pour $\omega = \omega_0'$ la susceptance b devient nulle et la réactance subit une discontinuité de $+\infty$ à $-\infty$. Pour $\omega = \omega_0'$ la résonance des courants s'établit dans le dipôle de la fig. 119, *d*.

En tenant compte de tout ceci, on peut se rendre compte, d'après l'aspect de la caractéristique $X = f(\omega)$ ou de la caractéristique $b = f(\omega)$ quels seront le caractère et le nombre des régimes de résonances pouvant apparaître dans le circuit considéré lorsque la fréquence varie entre 0 et ∞.

Les points auxquels la courbe $X = f(\omega)$ coupe l'axe des abscisses (ou la courbe $b = f(\omega)$ subit respectivement une discontinuité de $-\infty$ à $+\infty$), donnent les fréquences angulaires pour lesquelles les régimes de résonance des tensions apparaissent dans le circuit étudié.

Les points auxquels la courbe $X = f(\omega)$ subit une discontinuité de $+\infty$ à $-\infty$ (ou auxquels la courbe $b = f(\omega)$ coupe l'axe des abscisses) correspondent aux régimes de résonance des courants.

Pour illustrer la règle que nous venons de formuler, construisons les courbes de réponse en fréquence $X = f(\omega)$ et $b = f(\omega)$ pour le schéma de la fig. 119, *g* et déterminons à l'aide de ces courbes quels sont les régimes de résonance et combien il peut y en avoir dans le circuit considéré, lorsque la fréquence varie de 0 à ∞.

Pour le dipôle de la fig. 119, *g*, la réactance est égale à la somme des réactances des dipôles des fig. 119, *a* et *d*. Il en découle que les ordonnées de la courbe $X = f(\omega)$ pour le circuit de la fig. 119, *g* sont obtenues en ajoutant les ordonnées des courbes $X = f(\omega)$ de la fig. 119, *b* et *e* (fig. 119, *h*).

La fonction $b = f(\omega)$ pour le schéma de la fig. 119, *g* est représentée sur la fig. 119, *i*. En examinant les fig. 119, *h* et *i* on constate que les phénomènes

suivants ont lieu dans le schéma de la fig. 119, *g* lorsque la fréquence croît de 0 à ∞ : pour $\omega = \omega_1$ on obtient la résonance des tensions et pour $\omega = \omega_2$ — la résonance des courants, et ensuite la résonance des tensions a lieu à nouveau pour

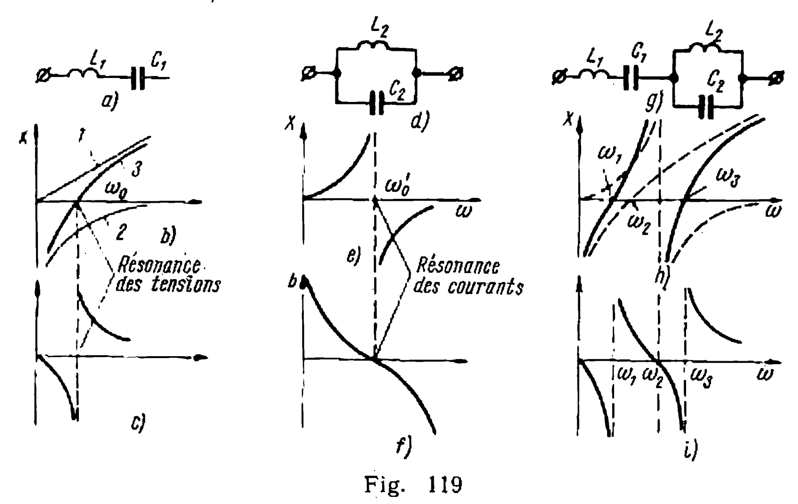


Fig. 119

$\omega = \omega_3$. Lorsque la tension continue à croître, on ne rencontre plus de résonances dans le circuit. Il est lieu de souligner que les régimes de résonance des courants et des tensions se suivent alternativement.

§ 111. Transport d'énergie d'un dipôle actif à une charge. La charge $Z_c = R_c + jX_c$ est branchée aux bornes du dipôle actif de la fig. 120. On cherche quelles sont les conditions à respecter pour qu'une puissance active maximale soit dégagée dans cette charge.

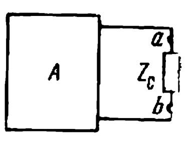


Fig. 120

Conformément à la méthode de marche à vide et de court-circuit (§ 23), le courant dans la charge

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{abmv}}{Z_{ent} + Z_c}.$$

Ici $Z_{ent} = R_{ent} + jX_{ent}$ est l'impédance d'entrée du dipôle par rapport aux bornes *ab*. Par conséquent,

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{abmv}}{R_{ent} + R_c + j\,(X_{ent} + X_c)}.$$

Les valeurs de R_{ent} et X_{ent} sont données et nous ne pouvons pas les changer. On ne peut que modifier les valeurs de R_c et X_c. Choisissons X_c de manière que le courant dans le circuit soit maximal, ce qui a lieu pour $X_{ent} + X_c = 0$. Dans ces conditions le dipôle fonctionne en régime de résonance: le courant circulant dans la charge est en phase avec la tension $\dot{U}_{abmv}$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{abmv}}{R_{ent} + R_c}.$$

De même que dans un circuit à courant continu (§ 24), la puissance dégagée dans la charge est maximale si on prend $R_c = R_{ent}$:

$$P = \frac{U^2_{abmv}}{4R_{ent}}.$$

Ainsi, pour obtenir une puissance maximale possible dans une charge branchée à un dipôle actif à impédance d'entrée égale à $R_{ent} + jX_{ent}$, il faut choisir la résistance de cette charge de manière que $X_c = -X_{ent}$ et $R_c = R_{ent}$.

§ 112. Chute et perte de tension dans une ligne de transport d'énergie. Soit un alternateur branché à un récepteur d'énergie par une ligne de transport. Cette ligne possède une résistance active R_l et une réactance inductive $X_l = \omega L_l$.

Construisons un diagramme vectoriel pour un circuit comprenant un alternateur, une ligne de transport et un récepteur. Pour fixer les idées, supposons que la charge du récepteur ait un caractère inductif. Orientons le vecteur de la tension à l'extrémité de la ligne (aux bornes du récepteur) suivant l'axe $+1$ (fig. 121); le courant $\dot{I}$ sera en retard sur ce vecteur en vertu du caractère inductif de la charge. La chute de tension dans la résistance active de la ligne IR_l est en phase avec le courant, tandis que la chute de tension dans la réactance inductive de la ligne $\dot{I}jX_l$ est en quadrature avant sur le courant.

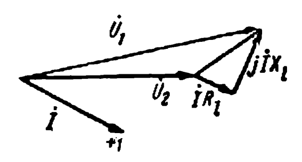


Fig. 121

Introduisons maintenant deux termes nouveaux couramment utilisés dans les ouvrages d'électrotechnique: chute de tension dans une ligne de transport et perte de tension dans cette ligne.

On entend par chute de tension dans une ligne de transport le module de la différence géométrique des vecteurs de tension au commencement ($\dot{U}_1$) et à la fin $\dot{U}_2$) de la ligne; cette chute est

$$I\sqrt{R_l^2 + (\omega L_l)^2}.$$

La perte de tension est égale à la différence des modules de tension au commencement et à la fin de la ligne, c'est-à-dire qu'elle est égale à $|\dot{U}_1| - |\dot{U}_2|$.

La perte de tension dans une ligne de transport indique la différence, exprimée en volts, entre la tension au commencement et à l'extrémité de la ligne.

En général la chute de tension est plus grande que la perte de tension.

§ 113. Calcul des circuits électriques comportant des bobines couplées magnétiquement entre elles. Les circuits électriques peuvent comprendre des bobines couplées magnétiquement avec d'autres bobines. Le flux d'une d'elles traverse les autres bobines et y induit des F.E.M. d'induction mutuelle, dont on doit tenir compte dans les calculs. Lorsqu'on établit des équations pour des circuits couplés magnétiquement, il faut

savoir si les flux d'auto-induction et d'induction mutuelle sont dirigés dans le même sens ou en opposition.

On le saura si on connaît le sens de l'enroulement des bobines sur leur noyau et si on a choisi le sens positif des courants dans ces bobines.

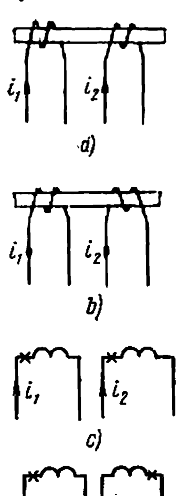


Fig. 122

Les bobines sont branchées en concordance sur la fig. 122, *a* et en opposition sur la fig. 122, *b*. Si on représente les noyaux des bobines sur les schémas électriques ceux-ci deviennent difficilement lisibles; on évite donc de le faire et on se limite à indiquer les bornes homologues (les entrées des enroulements, par exemple) par des signes identiques, des astérisques, par exemple.

Le schéma de la fig. 122, *c* est entièrement équivalent au schéma de la fig. 122, *a*, tandis que le schéma de la fig. 122, *d* est

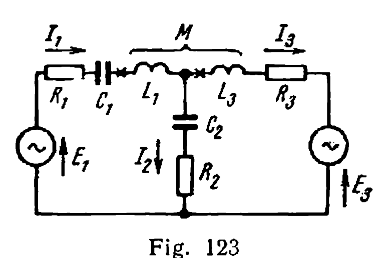


Fig. 123

équivalent au circuit de la fig. 122, *b*.

Si dans un schéma électrique les courants des deux bobines couplées magnétiquement sont orientés d'une manière identique par rapport aux bornes homologues (désignées par des astérisques) et sont dirigés, par exemple, tous les deux vers ces astérisques ou, par contre, partent tous les deux de ces astérisques, nous avons affaire à un branchement en concordance dans le premier cas et à un branchement en opposition dans le second. Le calcul des circuits couplés magnétiquement est fait en général par la méthode symbolique. Examinons sur l'exemple du schéma de la fig. 123 la manière d'établir les équations pour calculer les circuits couplés magnétiquement.

Choisissons arbitrairement les sens positifs des courants dans les diverses branches du circuit (fig. 123). Prenons également comme sens positif de parcours des mailles celui des aiguilles d'une montre. Commençons par écrire les équations pour les valeurs instantanées:

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

Pour la maille gauche (branches *1* et *2*)

$$i_1R_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt + i_2R_2 = e_1.$$

Nous avons mis devant le terme $M\frac{di_3}{dt}$ le même signe que devant le terme $L_1\frac{di_1}{dt}$, puisque le courant i_1 et le courant i_3 arrivent aux bornes homologues des bobines couplées magnétiquement, c'est-à-dire que nous avons affaire à un branchement en concordance. La somme des termes

$$M\frac{di_3}{dt}+L_1\frac{di_1}{dt}$$

représente la chute de tension dans la première bobine.

Tous les termes du premier membre de cette équation sont pris avec le signe $+$, car dans tous les tronçons de la première maille, les sens positifs des courants coïncident avec le sens du parcours de la maille. Ecrivons l'équation pour la deuxième maille (branches *2* et *3*). Le courant i_2 étant opposé au sens du parcours de la maille, la somme des chutes de tension dans la deuxième branche figurera dans l'équation avec le signe —

$$-\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt-i_2R_2+L_3\frac{di_3}{dt}+M\frac{di_1}{dt}+i_3R_3=-e_3.$$

Ecrivons maintenant ces équations sous la forme complexe

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3;$$

$$\dot{I}_1\left(R_1-\frac{j}{\omega C_1}+j\omega L_1\right)+\dot{I}_2\left(R_2-\frac{j}{\omega C_2}\right)+\dot{I}_3 j\omega M=\dot{E}_1;$$

$$\dot{I}_1 j\omega M-\dot{I}_2\left(R_2-\frac{j}{\omega C_2}\right)+\dot{I}_3(R_3+j\omega L_3)=-\dot{E}_3.$$

La résolution de ce système de trois équations à trois inconnues ne présente pas de difficultés.

§ 114. Branchement en série de deux bobines couplées magnétiquement. Sur la fig. 124 on voit le schéma d'un couplage en série et en concordance de deux bobines, et sur la fig. 125, celui de couplage en série et en opposition de ces mêmes bobines. Pour le couplage en concordance nous avons

$$iR_1+L_1\frac{di}{dt}+M\frac{di}{dt}+L_2\frac{di}{dt}+M\frac{di}{dt}+iR_2=e.$$

Ou sous forme complexe

$$\dot{I}\left[R_1+R_2+j\omega(L+L_2+2M)\right]=\dot{E};$$

$$\dot{I}Z_{conc}=\dot{E};$$

$$Z_{conc}=R_1+R_2+j\omega(L_1+L_2+2M). \qquad (5.54)$$

Le diagramme vectoriel pour un couplage en concordance est représenté sur la fig. 126. Sur ce diagramme $\dot{U}_1$ est la tension aux bornes de

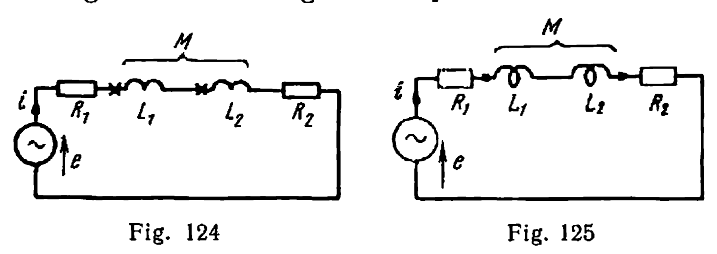


Fig. 124 Fig. 125

la première bobine et $\dot{U}_2$ celle aux bornes de la deuxième.

Pour un couplage en opposition, nous avons

$$iR_1 + L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + iR_2 = e.$$

d'où

$$\dot{I}Z_{op} = \dot{E}.$$

Ici

$$Z_{op} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M). \quad (5.55)$$

Le diagramme vectoriel pour un couplage en opposition et pour $L_1 > M$ et $L_2 > M$ est représenté sur la fig. 127.

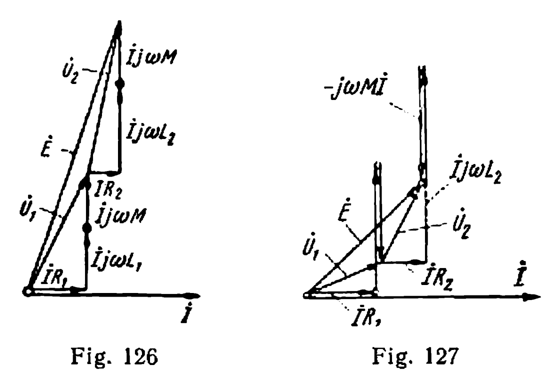


Fig. 126 Fig. 127

5 .§ **115. Mesure de M par des essais.** Examinons deux méthodes, jouant un grand rôle dans la pratique de mesures expérimentales de l'induction mutuelle M de deux bobines couplées magnétiquement.

Première méthode. Effectuons deux essais. Pour le premier les bobines sont branchées en série et en concordance. Mesurons le courant et la tension à l'entrée du circuit, ainsi que sa puissance active. Pour le deuxième essai les mêmes bobines sont branchées en série et en opposition et on mesure également I, U, P. En partant des résultats de mesures, écrivons

$$X_{conc} = \omega(L_1 + L_2 + 2M)$$

et

$$X_{op}=\omega(L_1+L_2-2M).$$

La différence

$$X_{conc}-X_{op}=4\omega M,$$

et, par conséquent,

$$M=\frac{X_{conc}-X_{op}}{4\omega}. \qquad (5.56)$$

D e u x i è m e m é t h o d e. Branchons la première bobine à une source de F.E.M. sinusoïdale, en passant par un ampèremètre (fig. 128) et raccordons aux bornes de la deuxième bobine un voltmètre à grande résistance interne. Mesurons le courant I_1 et la tension U_2.
La valeur instantanée de la tension est

$$u_2=M\frac{di_1}{dt}.$$

Sa valeur efficace

$$U_2=\omega M I_1.$$

Par conséquent,

$$M=\frac{U_2}{\omega I_1}. \qquad (5.57)$$

E x e m p l e 61. Le voltmètre représenté sur le schéma de la fig. 128 indique 100 V et l'ampèremètre — 10 A ; $\omega = 314\ s^{-1}$. Calculer M.

S o l u t i o n. D'après l'expression (5.57) nous trouvons

$$M=\frac{100}{314\cdot 10}=0{,}0319\ H.$$

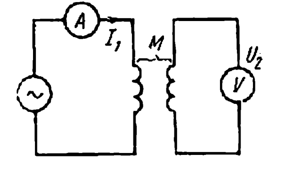


Fig. 128

§ 116. Transformateur. Impédance introduite.

Le transformateur est un dispositif statique * destiné à transformer la valeur d'une tension variable dans le temps.

Dans un transformateur le transport de l'énergie d'un circuit à un autre se fait en utilisant le phénomène d'induction mutuelle.

Un transformateur possède deux enroulements placés sur un noyau commun. Supposons que la perméabilité du noyau soit constante. Les paramètres de l'enroulement primaire sont R_1 et L_1, ceux du secondaire R_2 et L_2. L'induction mutuelle entre les deux enroulements est M (fig. 129). L'impédance de la charge branchée aux bornes de l'enroulement secondaire est égale à Z_c.

Choisissons les sens positifs pour les courants I_1 et I_2. Désignons par U_c la tension aux bornes de la charge. Ecrivons l'équation sous forme complexe.

---

* C'est-à-dire dépourvu de parties mobiles.

Nous avons pour le premier circuit

$$\dot{I}_1R_1+\dot{I}_1j\omega L_1+\dot{I}_2j\omega M=\dot{E}_1 \tag{5.58}$$

et pour le second circuit

$$\dot{I}_2R_2+\dot{I}_2j\omega L_2+\dot{I}_1j\omega M+\dot{U}_c=0. \tag{5.59}$$

Construisons sur la fig. 130 le diagramme vectoriel qualitatif, en supposant, pour fixer les idées, que la charge $Z_c=z_ce^{j\varphi_c}$ ait un caractère inductif. Le courant $\dot{I}_2$ est dirigé suivant l'axe $+1$. La tension aux

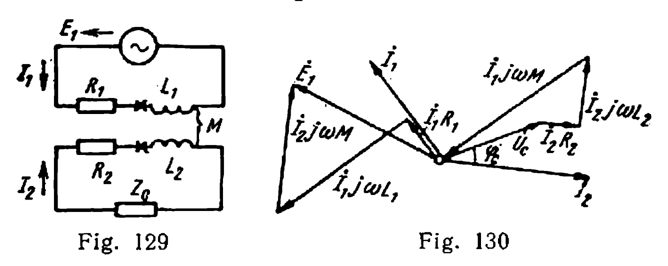


Fig. 129 Fig. 130

bornes de la charge $\dot{U}_c$ est en avance de l'angle φ_c sur le courant $\dot{I}_2$. La chute de tension $\dot{I}_2R_2$ est en phase avec le courant $\dot{I}_2$. Le vecteur $\dot{I}_2j\omega L_2$ est en avance de 90° sur le courant $\dot{I}_2$.

Conformément à l'équation (5.59), traçons le vecteur $\dot{I}_1j\omega M$ de manière que la somme géométrique des chutes de tension dans le circuit secondaire soit nulle.

Le courant $\dot{I}_1$ est en retard de 90° sur le vecteur $\dot{I}_1j\omega M$. Le vecteur $\dot{I}_1R_1$ est en phase avec le courant $\dot{I}_1$ et le vecteur $\dot{I}_1j\omega L_1$ est en avance de 90° sur $\dot{I}_1$.

Le vecteur $\dot{I}_2j\omega M$ est en avance de 90° sur $\dot{I}_2$. Conformément à l'équation (5.58) la somme géométrique $\dot{I}_1R_1+\dot{I}_1j\omega L_1+\dot{I}_2j\omega M$ donne $\dot{E}_1$.

Substituons dans (5.59) à $\dot{U}_c$

$$\dot{U}_c=\dot{I}_2Z_c=\dot{I}_2(R_c+jX_c)$$

et résolvons les équations (5.58) et (5.59) par rapport à $\dot{I}_1$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}}{(R_1+R_{in})+j(X_1-X_{in})}.$$

Où

$$R_{in}=\frac{\omega^2M^2}{(R_2+R_c)^2+(\omega L^2+X_c)^2}(R_2+R_c)\,;\quad X_1=\omega L_1\,;$$

$$X_{in}=\frac{\omega^2M^2}{(R_2+R_c)^2+(\omega L_2+X_c)^2}(\omega L_2+X_c).$$

On appelle R_{in} et X_{in} — résistance active et réactance introduites dans le circuit secondaire par le circuit primaire.

Les *résistances introduites* sont des résistances qu'il faudrait introduire dans le circuit primaire (en les branchant en série avec R_1 et X_1) pour tenir compte de l'influence de la charge du circuit secondaire du transformateur sur le courant dans le circuit primaire de ce transformateur.

Exemple 62. Calculer les courants pour le schéma de la fig. 131, *a* et construire le diagramme topographique et le diagramme vectoriel des

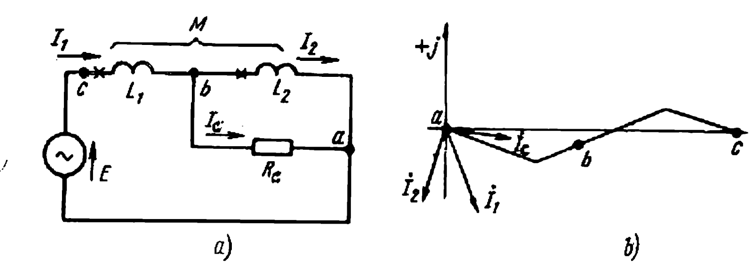


Fig. 131

courants; $\omega L_1 = 2\Omega$, $\omega L_2 = 3\Omega$, $\omega M = 1\Omega$, $R_c = 4\Omega$, $E = 100\ V$.

Solution. Ecrivons les équations suivant les lois de Kirchhoff

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_c.$$

Pour les équations résultant de la deuxième loi de Kirchhoff les mailles du circuit sont parcourues dans le sens des aiguilles d'une montre

$$\dot{I}_1 j\omega L_1 + \dot{I}_2 j\omega M + \dot{I}_c R_c = \dot{E}\,; \quad \dot{I}_1 j\omega M + \dot{I}_2 j\omega L_2 - \dot{I}_c R_c = 0.$$

Remplaçons dans les deux dernières équations $\dot{I}_c$ par $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$

$$\dot{I}_1 (R_c + j\omega L_1) + \dot{I}_2 (j\omega M - R_c) = \dot{E}\,; \quad \dot{I}_1 (j\omega M - R_c) + \dot{I}_2 (R_c + j\omega L_2) = 0.$$

Introduisons les valeurs numériques:

$$\dot{I}_1 (4 + 2j) + \dot{I}_2 (j - 4) = 100\,;$$

$$\dot{I}_1 (j - 4) + \dot{I}_2 (4 + 3j) = 0.$$

En résolvant ces équations obtenons

$$\dot{I}_1 = 17{,}7 e^{-j63^\circ} A\,;$$

$$\dot{I}_2 = 14{,}6 e^{-j114^\circ} A\,;$$

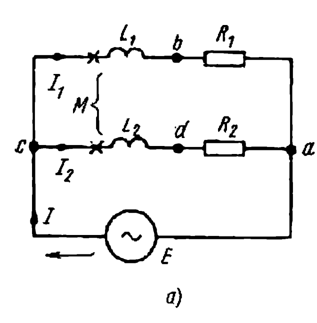
$$\dot{I}_c = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 14{,}12 e^{-j9^\circ 54'} A.$$

Le diagramme topographique et le diagramme vectoriel des courants sont représentés sur la fig. 131, *b*.

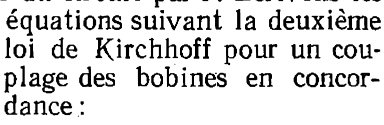
Exemple 63. Construire le diagramme topographique pour le schéma de la fig. 132, *a* en le rattachant au diagramme vectoriel des courants. Les deux branches du circuit sont couplées magnétiquement. Les paramètres ont les valeurs suivantes:

$$\omega L_1 = 3\Omega\,; \quad \omega L_2 = 4\Omega\,; \quad \omega M = 3\Omega\,; \quad R_1 = R_2 = 2\Omega\,; \quad \dot{E} = 100\ V.$$

Solution. Désignons les courants dans les branches par $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_2$ et le courant dans le tronçon non ramifié du circuit par $\dot{I}$. Ecrivons les équations suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour un couplage des bobines en concordance:



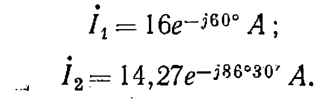
a)



$$\dot{I}_1 = (R_1 + j\omega L_1) + \dot{I}_2 j\omega M = \dot{E}\,;$$

$$\dot{I}_1 j\omega M + \dot{I}_2 (R_2 + j\omega L_2) = \dot{E}.$$

La solution de ces équations donne



$$\dot{I}_1 = 16e^{-j60°}\ A\,;$$

$$\dot{I}_2 = 14{,}27e^{-j86°30'}\ A.$$

Le diagramme topographique rattaché au diagramme vectoriel des courants est représenté sur la fig. 132, *b*.

b)

Fig. 132

§ 117. Théorème du bilan des puissances actives et réactives. Dans un circuit électrique linéaire quelconque la somme des puissances actives des sources de F.E.M. est égale à la somme des puissances actives des récepteurs, tandis que la somme des puissances réactives des sources des F.E.M. est égale à la somme des puissances réactives des récepteurs d'énergie.

On entend par puissance réactive des récepteurs d'énergie la somme des produits des carrés des courants dans les branches, multipliés par les réactances des branches, calculées sans tenir compte du phénomène d'induction mutuelle *, plus la somme algébrique des puissances transportées de certaines branches dans d'autres par les flux magnétiques, en vertu du phénomène d'induction mutuelle.

* Nous voulons dire ici qu'on doit calculer sans tenir compte de l'induction mutuelle uniquement les réactances des branches. Par contre, les courants doivent être calculés en tenant compte de l'induction mutuelle.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que le circuit comprenne f nœuds, b branches et que toutes les branches ou une partie d'entre elles soient couplées magnétiquement les unes aux autres. Suivant la première loi de Kirchhoff, la somme des courants arrivant à un nœud quelconque et partant de ce dernier est nulle. Ainsi, pour le nœud k auquel aboutissent n branches on a

$$\sum_{p=1}^{n} \dot{I}_{kp}=0.$$

Ou

$$\sum_{p=1}^{n} \overset{*}{I}_{kp}=0.$$

Multiplions chaque terme de cette somme par le potentiel $\dot{\varphi}_k$ du nœud k

$$\dot{\varphi}_k \sum_{p=1}^{n} \overset{*}{I}_{kp}=0.$$

Ajoutons les expressions analogues pour l'ensemble des f nœuds du circuit

$$\sum_{k=1}^{f} \dot{\varphi}_k \sum_{p=1}^{n} \overset{*}{I}_{kp}=0.$$

Un courant quelconque de ce circuit, par exemple le courant I_{mq}, figure dans la double somme ci-dessus deux fois et avec des signes contraires. En effet, pour $k = m$ et $p = q$ le terme correspondant de la double somme est égal à $\dot{\varphi}_m \overset{*}{I}_{mq}$ et pour $k = q$ et $p = m$ ce terme est égal à $\dot{\varphi}_q \overset{*}{I}_{qm}$. Du fait que

$$\overset{*}{I}_{qm}= -\overset{*}{I}_{mq}.$$

En groupant ces termes on obtient $\overset{*}{I}_{mg} (\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_q)$. Admettons qu'une branche quelconque du circuit, la branche kq, par exemple, soit magnétiquement couplée à la branche sr, de manière que la réactance d'induction mutuelle soit égale à $X_{M\frac{kq}{sr}}$ (fig. 133).

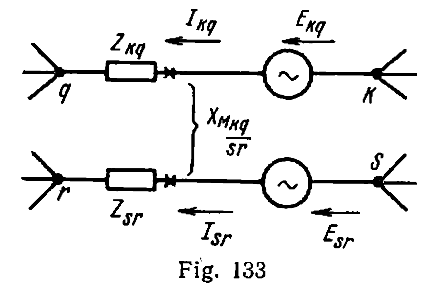


Fig. 133

On aura alors conformément à la fig. 133

$$\dot{\varphi}_q - \dot{\varphi}_k = \dot{E}_{kq} - \dot{I}_{kq} z_{kq} - \dot{I}_{sr} jX_{M\frac{kq}{sr}}.$$

Et à son tour, pour la branche sr

$$\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_s = \dot{E}_{sr} - \dot{I}_{sr} Z_{sr} - \dot{I}_{kq} jX_{M\frac{kq}{sr}}.$$

Si on considère que

$$\dot{I}_{kq} = I_{kq} e^{j\varphi_{kq}}, \quad \dot{I}_{sr} = I_{sr} e^{j\varphi_{sr}},$$

et si on tient compte que

$$\overset{*}{I}_{kq} = I_{kq} e^{-j\varphi_{kq}} \text{ et } \overset{*}{I}_{sr} = I_{sr} e^{-j\varphi_{sr}}$$

la somme des deux termes est

$$\overset{*}{I}_{kq} \dot{I}_{sr} j X_{M_{\frac{kq}{sr}}} + \dot{I}_{kq} \overset{*}{I}_{sr} j X_{\frac{kq}{sr}} = I_{kq} I_{sr} j X_{M_{\frac{kq}{sr}}} \left[e^{-j(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})} + e^{-j(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})}\right] =$$

$$= j2X_{M_{\frac{kq}{sr}}} I_{kq} I_{sr} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}).$$

Ainsi, le groupement deux par deux des termes de la double somme permet de récrire cette dernière sous la forme suivante:

$$\sum \dot{E}_{kp} \overset{*}{I}_{kp} = \sum I^2_{kp} Z_{kp} + j \cdot 2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{\frac{kq}{sr}}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}) \,. \tag{5.60}$$

Les termes du type $\dot{E}_{kp} \overset{*}{I}_{kp}$ représentent le produit de la F.E.M., intercalée dans la branche kp (k et p étant les indices courants des nœuds du circuit), par la valeur complexe conjuguée du courant dans cette branche; I^2_{kp} — carré du module du courant dans la branche kp;

$$Z_{kp} = R_{kp} + jX_{kp}.$$

Les produits deux par deux des courants des branches couplées magnétiquement multipliés par les réactances d'induction mutuelle correspondantes et par les cosinus des angles entre les courants de ces branches figurent une fois dans la somme

$$j \cdot 2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{\frac{kq}{sr}}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}).$$

Ainsi, par exemple, si dans un circuit quelconque trois branches sont couplées magnétiquement (branches 12, 13, et 23 par exemple) la somme

$$j \cdot 2 \sum I_{kp} I_{sr} X_{M_{\frac{kq}{sr}}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr})$$

peut être écrite comme suit :

$$j.2 \{I_{12} I_{13} X_{M_{\frac{12}{13}}} \cos(\varphi_{12} - \varphi_{13}) + I_{12} I_{23} X_{M_{\frac{12}{23}}} \cos(\varphi_{12} - \varphi_{23}) + I_{23} I_{13} \cos(\varphi_{23} - \varphi_{13})\}.$$

Le premier et le second membre de l'équation (5.60) sont des quantités complexes. L'égalité des parties réelles donne l'équation (5.61) et l'égalité des valeurs imaginaires, l'équation (5.62)

$$\operatorname{Re} \sum \dot{E}_{kp} \overset{*}{I}_{kp} = \sum I^2_{kp} R_{kp}, \tag{5.61}$$

$$\operatorname{Im} \sum \dot{E}_{kp} \overset{*}{I}_{kp} = \sum I^2_{kp} X_{kp} + 2 \sum I_{kq} I_{sr} X_{M_{\frac{kq}{sr}}} \cos(\varphi_{kq} - \varphi_{sr}). \tag{5.62}$$

Dans cette dernière expression $X_{M_{\frac{kq}{sr}}}$ est considéré comme positif lorsque les flux d'induction mutuelle et d'auto-induction des branches kq et sr ont un sens concordant, et comme négatif lorsque ces flux sont opposés.

Les équations (5.61) et (5.62) sont la formulation mathématique du théorème énoncé ci-dessus.

Exemple 64. En partant des données de l'exemple 62 s'assurer qu'au point de vue numérique le théorème du bilan des puissances est satisfait pour le schéma de la fig. 131, *a*.

Solution. La puissance active fournie par la source de la F.E.M. est

$$\mathrm{Re}\,\dot{E}\overset{*}{I} = \mathrm{Re}\,100 \cdot 17{,}7e^{j63°} = 1770 \cos 63° = 800 \ W.$$

La puissance active absorbée par les récepteurs

$$I_c^2 R_c = 14{,}12^2 \cdot 4 = 800 \ W.$$

Par conséquent, l'égalité des puissances actives est réalisée.

La puissance réactive de la source de F.E.M.

$$\mathrm{Im}\,\dot{E}\overset{*}{I} = 1770 \sin 63° = 1582 \ VAr.$$

La puissance réactive des récepteurs d'énergie, compte tenu du couplage des bobines en concordance, est

$$I_1^2 \omega L_1 + I_2^2 \omega L_2 + 2 I_1 I_2 \omega M \cos(\varphi_{i_1} - \varphi_{i_2}) =$$
$$= 17{,}7^2 \cdot 2 + 14{,}6^2 \cdot 3 + 2 \cdot 17{,}7 \cdot 14{,}6 \cos(63° - 114°) = 1582 \ VAr.$$

Ainsi le bilan des puissances réactives est également réalisé.

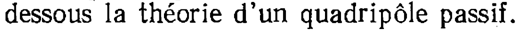
CHAPITRE VI

THÉORIE DES QUADRIPÔLES ET DIAGRAMMES CIRCULAIRES

§ 118. **Quadripôle et ses équations fondamentales.** On appelle quadripôle un circuit électrique ayant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. A titre d'exemple, nous pouvons citer un transformateur, une ligne de transport d'énergie, un circuit en pont, etc.

Le quadripôle est habituellement représenté sous forme d'un rectangle d'où partent les fils (les pôles) *mn* et *pq* (fig. 134).

Si le circuit électrique représenté par un quadripôle comprend une F.E.M. on écrit la lettre *A* (première lettre du mot « actif ») dans ce quadripôle.

Si la lettre *A* n'y figure pas, le quadripôle en question est passif, c'est-à-dire qu'il ne comprend pas de F.E.M. Nous examinerons ci-dessous la théorie d'un quadripôle passif.

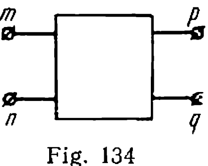


Fig. 134

Désignons le courant d'entrée par $\dot{I}_1$, la tension d'entrée par $\dot{U}_1$; le courant et la tension à la sortie par $\dot{I}_2$ et $\dot{U}_2$ repsectivement.

Le quadripôle est un élément de raccordement de la source d'alimentation à la charge. Les bornes *mn* sont les bornes d'entrée; c'est à ces bornes qu'on branche en général la source d'alimentation. Les bornes *pq* sont les bornes de sortie; la charge est branchée habituellement à ces bornes.

Lorsqu'un quadripôle est utilisé comme élément de raccordement entre la source et la charge, on considère que cette dernière, ainsi que la tension à l'entrée du quadripôle peuvent varier, mais que le schéma des connexions intérieures du quadripôle et la valeur des résistances de toute nature de ce montage restent invariables.

Pour un quadripôle passif (ne comprenant pas de F.E.M.) linéaire quelconque, la tension et le courant à l'entrée, c'est-à-dire $\dot{U}_1$ et $\dot{I}_1$ sont liés à la tension et au courant à la sortie $\dot{U}_2$ et $\dot{I}_2$ par deux équations qu'on appelle habituellement équations caractéristiques du quadripôle

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \tag{6.1}$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \tag{6.2}$$

Dans ces équations les coefficients complexes *A*, *B*, *C*, *D* dépendent du schéma des connexions intérieures du quadripôle, des valeurs des impédances incorporées et de la fréquence. Pour chaque quadripôle, ces coefficients peuvent être déterminés par des calculs ou expérimentalement.

Ces coefficients sont liés entre eux par l'expression

$$AD - BC = 1. \tag{6.3}$$

Etablissons les équations (6.1) et (6.2). A cette fin branchons aux bornes *mn* une source de F.E.M. $\dot{E}_1 = \dot{U}_{mn} = \dot{U}_1$ et aux bornes *pq* la charge Z_2 (fig. 135, *a*).

La tension aux bornes de la charge $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 = \dot{U}_{pq}$. Conformément au théorème de compensation (§ 16) remplaçons la charge Z_2 par la F.E.M. $\dot{E}_2$, dirigée en sens inverse du courant $\dot{I}_2$ et numériquement égale

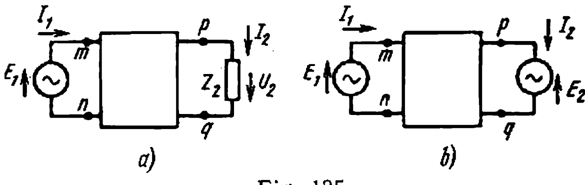


Fig. 135

à $\dot{U}_2$ (fig. 135, *b*). Ecrivons les équations des courants $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_2$ en fonction de $\dot{E}_1$ et $\dot{E}_2$ ainsi que les admittances d'entrée et mutuelles des branches (voir § 13).

Si on considère les courants $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_2$ comme des courants fictifs maillés, les F.E.M. des mailles dont le sens est le même que celui des courants fictifs maillés figurent dans les équations, de même nature que l'équation (1.7), avec le signe +, et les F.E.M. de sens inverse aux courants fictifs maillés correspondants entrent dans ces équations avec le signe —.

La F.E.M. $\dot{E}_1$ est dirigée dans le même sens que $\dot{I}_1$ et, par conséquent, elle figure dans les équations (6.4) et (6.5) avec le signe + ; $\dot{E}_2$ est dirigée en sens inverse de $\dot{I}_2$ et, par conséquent, elle figure dans les équations (6.4) et (6.5) avec le signe — :

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 Y_{11} - \dot{E}_2 Y_{12}; \tag{6.4}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E}_1 Y_{12} - \dot{E}_2 Y_{22}. \tag{6.5}$$

On déduit de (6.5)

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 \frac{Y_{22}}{Y_{12}} + \dot{I}_2 \frac{1}{Y_{12}}. \tag{6.6}$$

Substituons (6.6) dans (6.4)

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_2 \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}{Y_{12}} + \dot{I}_2 \frac{Y_{11}}{Y_{12}}. \tag{6.7}$$

Désignons par :

$$A = \frac{Y_{22}}{Y_{12}}; \quad B = \frac{1}{Y_{12}}; \quad C = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}{Y_{12}}; \quad D = \frac{Y_{11}}{Y_{12}}. \tag{6.8}$$

Remplaçons dans (6.6) et (6.7) $\dot{E}_1$ par $\dot{U}_1$ et $\dot{E}_2$ par $\dot{U}_2$, utilisons les notations de (6.8) ; nous obtenons les équations de base du quadripôle (6.1) et (6.2)

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 = D\dot{I}_2.$$

Rassurons-nous qu'on a bien (6.3):

$$AD-BC=\frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{12}^2}-\frac{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2}{Y_{12}^2}=1.$$

Examinons ensuite quelle est la relation entre $\dot{U}_1$ et $\dot{I}_1$, ainsi qu'entre $\dot{I}_2$ et $\dot{U}_2$, si la source de F.E.M. $\dot{E}_1$ est branchée cette fois-ci aux bornes *pq* et si la charge est raccordée aux bornes *mn* (fig. 136).

Comme dans la démonstration précédente remplaçons Z_2 par la F.E.M. E_2 opposée au courant $\dot{I}_2$, et écrivons les équations pour les courants $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_2$

$$\dot{I}_2=-\dot{E}_2Y_{11}+\dot{E}_1Y_{12}; \tag{6.9}$$

$$\dot{I}_1=-\dot{E}_2Y_{12}+\dot{E}_1Y_{22}. \tag{6.10}$$

On déduit de (6.9)

$$\dot{E}_1=\dot{E}_2\frac{Y_{11}}{Y_{12}}+\dot{I}_2\frac{1}{Y_{12}}. \tag{6.11}$$

Substituons (6.11) dans (6.10)

$$\dot{I}_1=\dot{E}_2\frac{Y_{11}Y_{22}-Y_{22}^2}{Y_{12}}+\dot{I}_2\frac{Y_{22}}{Y_{12}}. \tag{6.12}$$

Remplaçons $\dot{E}_1$ par $\dot{U}_1$ et $\dot{E}_2$ par $\dot{U}_2$, utilisons (6.8) et récrivons (6.11) et (6.12) comme suit

$$\dot{U}_1=D\dot{U}_2+B\dot{I}_2, \tag{6.13}$$

$$\dot{I}_1=C\dot{U}_2+A\dot{I}_2. \tag{6.14}$$

Les équations (6.1) et (6.2) décrivent le fonctionnement d'un quadripôle lorsqu'il est alimenté à partir des bornes *mn* et lorsque la charge est raccordée aux bornes *pq*, tandis que les équations (6.13) et (6.14) décrivent le fonctionnement du même quadripôle quand il est alimenté à partir des bornes *pq*, la charge étant raccordée aux bornes *mn*.

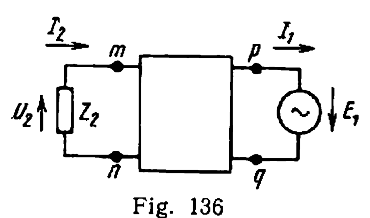


Fig. 136

Le quadripôle est considéré comme *symétrique* si lorsqu'on permute la source d'alimentation et la charge, les courants dans la source d'alimentation et dans la charge ne varient pas. Dans un quadripôle symétrique $A = D$.

Notons que les systèmes d'équations (6.1 — 6.2; forme *A*) et (6.4 — 6.5, forme *Y*) ne sont pas les seules formes possibles d'écriture des équations des quadripôles. Ainsi, après avoir résolu le système (6.1 — 6.2) par rapport à $\dot{U}_1$ et $\dot{U}_2$ nous obtenons une nouvelle forme d'équations, appelée forme *Z*:

$$\dot{U}_1=Z_{11}\dot{I}_1+Z_{12}\dot{I}_2;\ \dot{U}_2=Z_{21}\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2.$$

En résolvant ces équations (6.1 — 6.2) par rapport à $\dot{U}_1$ et $\dot{I}_2$, nous obtenons la forme H des équations d'un quadripôle

$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.$$

Les équations d'un quadripôle peuvent être écrites sous d'autres formes encore.

§ 119. Détermination des constantes d'un quadripôle. Comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe précédent, le comportement d'un quadripôle en différents régimes est décrit par les équations (6.1, 6.2, 6.13 et 6.14). Toutes ces équations comprennent les constantes complexes A, B, C, D. Le calcul de ces constantes peut être fait soit à l'aide de l'équation (6.8), si le schéma des connexions intérieures du quadripôle et ses paramètres sont connus, soit par utilisation des impédances caractéristiques d'entrée du quadripôle, obtenues par des calculs ou par voie expérimentale.

La détermination des impédances d'entrée complexes peut être faite par voie expérimentale à l'aide d'un wattmètre, d'un ampèremètre et d'un voltmètre montés conformément à un schéma, analogue à celui de la fig. 115, *a* avec la seule différence qu'à la place d'un dipôle on branche à la source d'alimentation par l'intermédiaire des bornes *mn* ou *pq* (suivant qu'on mesure l'impédance d'entrée ou de sortie) le quadripôle à essayer.

Effectuons des essais pour déterminer l'impédance d'entrée d'un quadripôle en trois régimes de fonctionnement différents.

1. Déterminons l'impédance d'entrée complexe du côté des bornes *mn*, la branche *pq* étant ouverte (marche à vide de la branche *pq*, indice zéro)

$$Z_{10} = z_{10} e^{j\varphi_{10}}.$$

2. Mesurons l'impédance d'entrée complexe du côté des bornes *mn*, la branche *pq* étant court-circuitée (court-circuit, indice *cc*)

$$Z_{1cc} = z_{1cc} e^{j\varphi_{1c}}.$$

3. Cherchons l'impédance d'entrée complexe du côté des bornes *pq*, les bornes *mn* étant court-circuitées

$$Z_{2cc} = z_{2cc} e^{j\varphi_{2cc}}.$$

En dépouillant le résultat des trois essais, nous obtenons les impédances complexes Z_{10}, Z_{1cc}, Z_{2cc}. Exprimons-les à l'aide des constantes A, B, C, D. A cette fin, calculons, Z_{10} et Z_{1cc} à partir des équations (6.1) et (6.2) en fonction de A, B, C, D et en partant de (6.13) et de (6.14) exprimons Z_{2cc} à l'aide de B et A.

Au cours du premier essai, lorsqu'on cherchait Z_{10} la branche *pq* était ouverte et, par conséquent, $I_2 = 0$. De ce fait, on déduit de (6.1) et (6.2):

$$\dot{U}_{10} = A\dot{U}_{20}; \quad \dot{I}_{10} = C\dot{U}_{20}.$$

L'impédance d'entrée sera donc

$$Z_{10}=\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}}=\frac{A}{C}.$$

Dans le deuxième essai, lorsqu'on cherchait Z_{1cc}, la branche *pq* était court-circuitée et, par conséquent, $U_2 = 0$; nous déduisons de (6.1) et (6.2)

$$\dot{U}_{1cc}=B\dot{I}_{2cc}; \quad \dot{I}_{1cc}=DI_{2cc}$$

et

$$Z_{1cc}=\frac{\dot{U}_{1cc}}{\dot{I}_{1cc}}=\frac{B}{D}.$$

Au cours du troisième essai, l'alimentation se faisant à partir des bornes *pq*, et les bornes *mn* étant court-circuitées, on a à partir des équations (6.13) et (6.14) avec $U_2 = 0$,

$$Z_{2cc}=\frac{B\dot{I}_{2cc}}{A\dot{I}_{2cc}}=\frac{B}{A}.$$

Ainsi, pour calculer les quatre constantes inconnues A, B, C et D nous disposons de quatre équations

$$AD-BC=1; \tag{6.3}$$

$$Z_{10}=\frac{A}{C}; \tag{6.15}$$

$$Z_{1cc}=\frac{B}{D}; \tag{6.16}$$

$$Z_{2cc}=\frac{B}{A}. \tag{6.17}$$

Ecrivons la différence

$$1-\frac{Z_{1cc}}{Z_{10}}=1-\frac{BC}{AD}=\frac{1}{AD}$$

ou

$$\frac{Z_{10}-Z_{1cc}}{Z_{10}}=\frac{1}{AD}. \tag{6.18}$$

Divisons (6.17) par (6.16)

$$\frac{Z_{2cc}}{Z_{1cc}}=\frac{D}{A}. \tag{6.19}$$

Multiplions (6.18) par (6.19)

$$\frac{(Z_{10}-Z_{1cc})\,Z_{2cc}}{Z_{10}Z_{1cc}}=\frac{1}{A^2}.$$

Nous obtenons ainsi

$$A=\sqrt{\frac{Z_{10}Z_{1cc}}{Z_{2cc}\,(Z_{10}-Z_{1cc})}}. \tag{6.20}$$

L'équation (6.20) permet d'exprimer A à partir de Z_{10}, Z_{1cc} et Z_{2cc}. Après avoir déterminé A calculons la constante C à l'aide de (6.15), B à l'aide de (6.17) et D à l'aide de (6.16).

Les constantes A et D sont sans dimensions, la constante B a les dimensions de l'un *ohm* et la constante C celles du *siemens*.

Exemple 65. Les essais ont donné $Z_{10} = 7{,}815\ e^{-j\,50°12'}\ \Omega$, $Z_{1cc} = 12{,}5\ e^{j\,66°23'}\Omega$ et $Z_{2cc} = 3{,}33\ e^{j\,27°33'}\Omega$.
Calculer les constantes A, B, C, D du quadripôle.

Solution. Ecrivons

$$z_{10} - z_{1cc} = 5 - 6j - 5 - 12j = -18j - 18e^{-j90°}.$$

A l'aide de (6.20) calculons A

$$A = \sqrt{\frac{7{,}815e^{-j50°12'}\cdot 12{,}5e^{j66°23'}}{3{,}33e^{j27°33'}\cdot 18e^{-j90°}}} \approx 1{,}28e^{j39°40'};$$

$$C = \frac{A}{Z_{10}} = \frac{1{,}28e^{j39°40'}}{7{,}815e^{-j50°12'}} \approx 0{,}166e^{j90°}\, S;$$

$$B = AZ_{2cc} = 1{,}28e^{j39°40'}\cdot 3{,}33e^{j27°33'} \approx 4{,}26e^{j67°}\,\Omega;$$

$$D = \frac{B}{Z_{1cc}} = \frac{4{,}26e^{j67°}}{12{,}5e^{j66°23'}} \approx 0{,}34.$$

Exemple 66. Une charge $Z_2 = (6 + j6)\ \Omega$ est branchée aux bornes pq (fig. 134) du quadripôle de l'exemple 65. Une source de F.E.M. est branchée aux bornes mn. Trouver $\dot{U}_1$ et $\dot{I}_1$ si $\dot{I}_2 = 1\ A$.

Solution. D'après (6.1)

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = A\dot{I}_2 Z_2 + B\dot{I}_2 = \dot{I}_2(AZ_2 + B);$$

$$\dot{U}_1 = 1\cdot(1{,}28e^{j39°40'}\cdot 6\sqrt{2}e^{j45°} + 4{,}26e^{j67°}) = 14{,}85e^{j79°45'}\, V.$$

Suivant l'expression (6.2)

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = \dot{I}_2(CZ_2 + D) = 1\cdot(0{,}166e^{j90°}\cdot 6\sqrt{2}e^{j45°} + 0{,}34) = 1{,}165e^{j123°}\, A.$$

Exemple 67. Une charge $Z_2 = (6 + j6)\ \Omega$ est branchée aux bornes mn du quadripôle de l'exemple 65. La source de F.E.M. est branchée aux bornes pq. Pour quelle tension de la source de F.E.M. le courant I_2 circulant dans la charge est égal à $1\ A$?

Solution. Conformément à l'expression (6.13), on a:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2(DZ_2 + B) = 0{,}34\,(6 + j6) + 4{,}26^{j67°} = 6{,}98e^{j58°20'}\, V.$$

§ 120. Circuit équivalent d'un quadripôle passif. Les fonctions d'un quadripôle passif, considéré comme élément de raccordement entre la source de courant et la charge, peuvent être assurées par des circuits électriques les plus simples, considérés comme circuits équivalents,

à savoir : étoile à trois branches (circuit en T), la fig. 137 et un triangle qui lui est équivalent (circuit en Π) fig. 138 *.

Les trois impédances des circuits en T ou en Π doivent être calculées de manière que le circuit équivalent ait les mêmes constantes A, B, C, D que le quadripôle qu'il remplace.

C'est un problème univoque, puisque le circuit équivalent comporte trois paramètres et le quadripôle est également caractérisé par trois

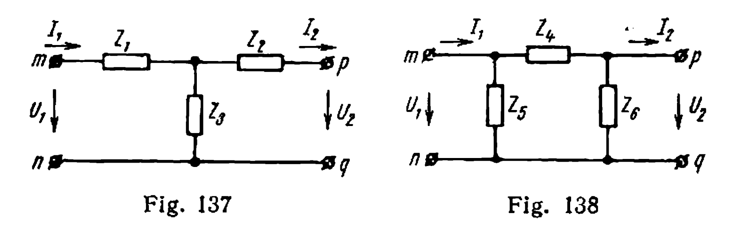


Fig. 137 Fig. 138

paramètres (l'une des relations entre A, B, C et D étant donnée par l'équation $AD - BC = 1$).

Exprimons la tension $\dot{U}_1$ et le courant $\dot{I}_1$ à l'entrée d'un circuit en T (fig. 137) en fonction de la tension $\dot{U}_2$ et du courant $\dot{I}_2$ à la sortie de ce circuit :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2}{Z_3} = \dot{U}_2 \frac{1}{Z_3} + \dot{I}_2 \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right) ; \tag{6.21}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_1 Z_1 = \dot{U}_2 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) + \dot{I}_2 \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}\right) . \tag{6.22}$$

Comparons (6.22) avec (6.1), et (6.21) avec (6.2). Cette comparaison donne

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} ; \quad B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} ; \quad C = \frac{1}{Z_3} ; \quad D = 1 + \frac{Z_2}{Z_3} .$$

Par conséquent,

$$Z_3 = \frac{1}{C} ; \tag{6.23}$$

$$Z_1 = \frac{A-1}{C} ; \tag{6.24}$$

$$Z_2 = \frac{D-1}{C} . \tag{6.25}$$

Les expressions (6.23—6.25) permettent de trouver les impédances Z_3, Z_1, Z_2 du schéma de la fig. 137 en partant des constantes A, C, D du quadripôle. Les mêmes opérations exécutées pour le circuit en Π de la fig. 138 donnent

$$A = 1 + \frac{Z_4}{Z_6} ; \quad B = Z_4 ; \quad C = \frac{Z_4 + Z_5 + Z_6}{Z_5 Z_6} ; \quad D = 1 + \frac{Z_4}{Z_5} .$$

---

* En d'autres termes, un quadripôle linéaire quelconque, lorsque la fréquence est fixe, peut être remplacé par un circuit équivalent en T ou en Π.

Par conséquent,

$$Z_4 = B; \tag{6.26}$$

$$Z_5 = \frac{B}{D-1}; \tag{6.27}$$

$$Z_6 = \frac{B}{A-1}. \tag{6.28}$$

Si le quadripôle est symétrique $A = D$, et dans le circuit équivalent en T $Z_1 = Z_2$, tandis que dans le circuit en П $Z_5 = Z_6$.

E x e m p l e 68. Trouver les paramètres d'un circuit en T, équivalent au quadripôle de l'exemple 65.

S o l u t i o n. Ecrivons conformément aux équations (6.23) — (6.25)

$$Z_3 = \frac{1}{C} \approx 6e^{-j90°}\Omega; \quad Z_2 = \frac{D-1}{C} = \frac{0,34-1}{0,166e^{j90°}} \approx 4e^{j90°}\,\Omega, \quad Z_1 = 5\Omega.$$

Le fonctionnement des circuits électriques est souvent étudié par des méthodes graphiques, en construisant des diagrammes circulaires et linéaires. Avant d'aborder l'étude des diagrammes circulaires, examinons la construction d'un arc de circonférence connaissant la corde qu'elle sous-tend et l'angle inscrit.

§ 121. Construction d'un arc de cercle en partant de sa corde et de l'angle inscrit. On appelle en géométrie angle inscrit un angle dont le sommet se trouve sur la circonférence et dont les côtés sont des cordes de cette circonférence.

L'angle inscrit est mesuré par la moitié de l'arc qu'il découpe. Ainsi $\widehat{ABC} = \psi$ (fig. 139) est mesuré par $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{ADC}$ et $\widehat{ADC}$ est mesuré par $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{ABC}$. La somme des angles $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi$.

L'angle $\widehat{EDC}$ est un angle complémentaire à π pour $\widehat{ADC}$ et, par conséquent, $\widehat{EDC} = \psi$.

Quelle que soit la position occupée par le point D dans l'intervalle entre A et C, l'angle entre le prolongement de la corde AB (c.-à-d. la ligne DE) et la corde DC reste invariable et égale à ψ.

L'angle entre le prolongement de la corde AC et la tangente à la circonférence au point C est également mesurée par l'angle ψ.

Le centre O de la circonférence se trouve à l'intersection de la perpendiculaire élevée au milieu de la corde et de la perpendiculaire à la tangente (fig. 140).

Il découle de ce qui vient d'être exposé que pour trouver le centre de la circonférence (voir fig. 140) en partant d'une corde et de l'angle inscrit ψ, il faut effectuer les opérations suivantes:

1. Elever une perpendiculaire au milieu de la corde.
2. Tracer sous un angle ψ, par rapport au prolongement de la corde, une droite qui sera la tangente à la circonférence.

3. Elever une perpendiculaire à cette tangente. L'intersection de la perpendiculaire à la corde et la perpendiculaire à la tangente donne le centre de la circonférence.

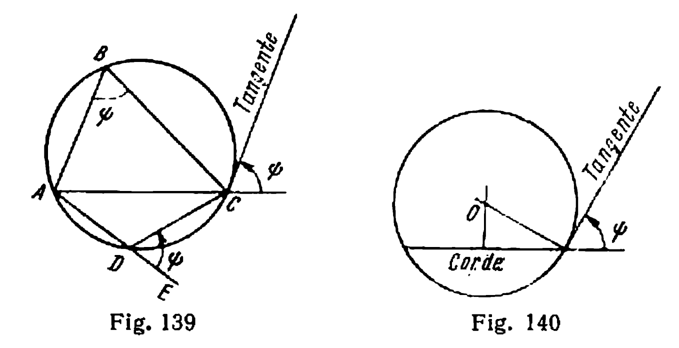


Fig. 139 Fig. 140

§ 122. Equation d'un arc de cercle écrite sous forme vectorielle. Les constructions analogues à celles de la fig. 139 peuvent être exécutées également dans le plan complexe. Dans ce cas toutes les cordes, les cordes CA, DA et CD, par exemple, seront des vecteurs.

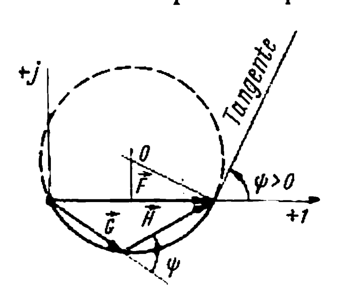


Fig. 141

Dans le plan complexe de la fig. 141 faisons coïncider la corde $\overrightarrow{CA} = \vec{F}$ avec l'axe $+1$. Si l'angle ψ est positif, il doit être tracé dans le sens contraire des aiguilles d'une montre par rapport au prolongement de la corde, et si $\psi < 0$, il doit être tracé dans le sens des aiguilles d'une montre.

Désignons $\overrightarrow{DA} = \vec{G}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{H}$. Alors

$$\vec{G} + \vec{H} = \vec{F}. \tag{6.29}$$

Le vecteur $\vec{H}$ est en avance de l'angle ψ sur le vecteur $\vec{G}$. Supposons le module du vecteur $\vec{H}$ k fois plus grand que le module du vecteur $\vec{G}$. On a alors

$$\vec{H} = k\vec{G}e^{j\psi}. \tag{6.30}$$

Si $k = 0$, on a $\vec{H} = 0$ et $\vec{G} = \vec{F}$.

Pour $k = \infty$, $\vec{H} = \vec{F}$ et $\vec{G} = 0$.

Substituons (6.30) dans (6.29). Nous obtenons

$$\vec{G}(1 + ke^{j\psi}) = \vec{F},$$

ou

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{1 + ke^{j\psi}}. \tag{6.31}$$

L'équation (6.31) est l'équation vectorielle d'un arc de cercle.

Lorsque le coefficient k varie de 0 à ∞, les deux vecteurs $\vec{G}$ et $\vec{H}$ varient également, mais de telle manière que l'angle ψ entre eux reste invariable et la somme de ces vecteurs soit égal au vecteur $\vec{F}$. L'extrémité du vecteur $\vec{G}$ décrit un arc de cercle dont le vecteur $\vec{F}$ est la corde. Par conséquent, on peut dire que l'arc de cercle est le lieu géométrique des extrémités du vecteur $\vec{G}$.

Il faut souligner ici que la partie utilisée de la circonférence ou l'arc utilisé est la partie de la circonférence située du côté du prolongement de la tangente par rapport à la corde $\vec{F}$ (l'arc utilisé est tracé sur la fig. 141 en trait plein et l'arc non utilisé est figuré en pointillé).

§ 123. **Diagrammes circulaires.** Il découle du § 83 que les fonctions sinusoïdales (les courants et les tensions, par exemple) peuvent être représentées par des vecteurs dans un plan complexe. Si un phénomène, se déroulant dans un circuit électrique, peut être décrit par une équation de forme identique à (6.31), le lieu géométrique des extrémités du vecteur courant ou tension, jouant dans l'équation du circuit électrique le même rôle que le vecteur $\vec{G}$ dans l'équation (6.31), est une circonférence.

On appelle diagramme circulaire du courant ou de la tension un arc de cercle, lieu géométrique des extrémités du vecteur courant ou, respectivement, tension, lorsque le module d'une impédance quelconque du circuit électrique varie, les autres impédances, la fréquence et la F.E.M. des sources d'énergie restant invariables.

Le fonctionnement des circuits électriques peut être analysé par la méthode graphique à l'aide des diagrammes circulaires.

§ 124. **Diagramme circulaire de courant pour un couplage en série de deux impédances.** Soit $Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$ et $Z = ze^{j\varphi}$ (fig. 142) des impédances couplées en série avec une source de F.E.M. L'impédance Z_1 est invariable, tandis que Z peut varier uniquement en module et, par conséquent, l'angle φ reste constant. Le courant dans ce circuit

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z} = \frac{\frac{\dot{E}}{Z_1}}{1 + \frac{z}{z_1} e^{j(\varphi - \varphi_1)}} . \tag{6.32'}$$

Ici

$$\frac{\dot{E}}{Z_1} = \dot{I}_{cc}$$

est le courant, circulant dans le circuit lorsque l'impédance Z est court-circuitée.

Désignons $\varphi - \varphi_1 = \psi$. Alors

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_{cc}}{1 + \frac{z}{z_1} e^{j\psi}} . \tag{6.32}$$

L'équation (6.32) est identique à (6.31).

Le rôle du vecteur $\vec{F}$ est joué par $\dot{I}_{cc}$; celui du coefficient k est joué par $\frac{z}{z_1}$; le rôle de $\vec{G}$ est joué par le vecteur $\dot{I}$. Lorsque z varie, le vecteur $\dot{I}$ glisse sur l'arc d'une circonférence, dont la corde est $\dot{I}_{cc}$.

Le diagramme circulaire correspondant est construit sur la fig. 143. Sur ce diagramme le vecteur de la F.E.M. est dirigé suivant l'axe $+1$. Le courant est en retard de l'angle φ_1 sur la F.E.M. $\dot{E}$. Pour fixer les idées, construisons le diagramme pour $\psi < 0$. Choisissons l'échelle des courants : admettons que le tronçon ac exprime à l'échelle m_I le module du courant $\dot{I}_{cc}$. De même, le tronçon da représente le courant $\dot{I}$, le tronçon cd, conformément à l'équation (6.32), représente le produit $\dot{I}\frac{z}{z_1}$. Portons dans le sens de $\dot{I}_{cc}$ le tronçon ae à l'échelle arbitraire m_z exprimant le module de l'impédance constante z_1:

$$z_1 = ae \cdot m_z.$$

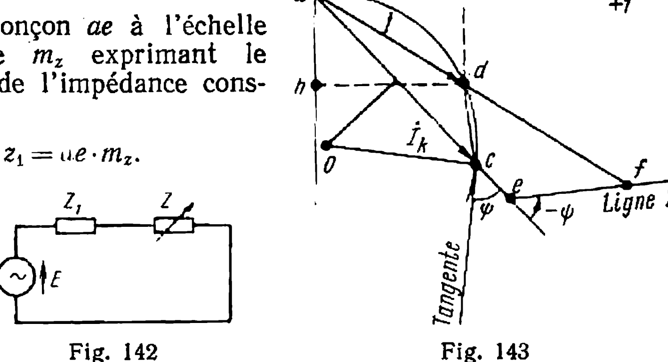


Fig. 142 Fig. 143

Traçons à partir du point e sous l'angle $-\psi$ par rapport à ae, la droite ef; cette droite est comme ceci sera démontrée plus loin, la droite du module de l'impédance variable z, mesurée à partir du point e. Portons sur cette droite à l'échelle m_z les divisions nécessaires pour mesurer z.

Il découle de la similitude des triangles adc et aef que

$$\frac{ad}{ac} = \frac{ae}{ef}; \quad ef = ae\frac{dc}{ad} = \frac{z_1}{m_z}\,\frac{I\frac{z}{z_1}}{I} = \frac{z}{m_z}$$

ou

$$z = ef \cdot m_z.$$

Par conséquent, le tronçon ef représente à l'échelle m_z le module de l'impédance variable z.

La projection de $\dot{I}$ sur la direction E, le tronçon ag représente à l'échelle $m_p = Em_I$ la puissance active

$$P = ag \cdot m_p = ag \cdot E \cdot m_I = ag \cdot E \cdot \frac{I}{ad} = EI\cos\varphi.$$

$$m_I = \frac{I}{ad}; \qquad \frac{ag}{ad} = \cos\varphi.$$

La projection de $\dot{I}$ sur la direction, perpendiculaire à $\dot{E}$, autrement dit sur ah, représente, à l'échelle m_p, la puissance réactive

$$Q = ah \cdot m_p = ah \cdot E \cdot \frac{I}{ad} = EI \sin \varphi.$$

§ 125. Diagramme circulaire de tension pour deux impédances couplées en série. Miltiplions les deux membres de l'équation (6.32) par $Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$. Rappelons que $\dot{I}Z_1 = \dot{U}_{z_1}$. Il vient:

$$\dot{U}_{z_1} = \frac{\dot{E}}{1 + \frac{z_1}{z} e^{j(\varphi - \varphi_1)}}. \tag{6.33}$$

L'équation (6.33) montre que le lieu géométrique des extrémités du vecteur $\dot{U}_{z_1}$ est un arc de cercle, dont la corde est $\dot{E}$.

§ 126. Diagramme circulaire pour un dipôle actif. Le courant $\dot{I}_c$ circulant dans la charge $Z_c = z_c e^{j\varphi_c}$ du dipôle actif de la fig. 120 est

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{U}_{ab\,mv}}{Z_{ent} + Z_c} = \frac{\frac{\dot{U}_{ab\,mv}}{Z_{ent}}}{1 + \frac{z_c}{z_{ent}} e^{j(\varphi_c - \varphi_{ent})}}. \tag{6.34}$$

$Z_{ent} = z_{ent}\, e^{j\varphi_{ent}}$ l'impédance d'entrée d'un dipôle, évaluée par rapport aux bornes ab de la branche isolée.

Il découle de l'équation (6.34) que le courant $\dot{I}_c$ glisse le long de l'arc de circonférence lorsque le module de l'impédance de la charge z_c varie.

Examinons deux exemples simples de diagrammes circulaires.

Exemple 69. Soit $\dot{E} = 120\ V$; $Z = R = 24\ \Omega$ les paramètres du circuit de la fig. 142; l'impédance Z est purement capacitive et son module varie de 0 à ∞. Construire le diagramme circulaire du courant et le diagramme circulaire de la tension aux bornes de l'impédance Z_1.

Solution. Le courant $\dot{I}_{cc} = \frac{120}{24} = 5\ A$. Choisissons comme échelle pour les courants $m_I = 1{,}31\ A/cm$, et pour les tensions l'échelle $m_u = 26\ V/cm$.

Trouvons l'angle $\psi = \varphi - \varphi_1 = -90° - 0° = -90°$.

La fig. 144 représente un diagramme circulaire de courant, basé sur le courant $\dot{I}_{cc}$ utilisé comme diamètre et le diagramme circulaire de tension, utilisant la F.E.M. E comme diamètre. L'échelle pour les impédances est $m_z = 10\ \Omega/cm$. Pour une valeur quelconque de l'impédance z trouvons à l'aide du diagramme le courant et la tension U_z. Ainsi pour $z = 9{,}5\ \Omega$ $I = 4{,}65\ A$ et $U_{z_1} = 111{,}5\ V$.

Exemple 70. Construire le lieu géométrique des extrémités du courant $\dot{I}$ du tronçon non ramifié du schéma de la fig. 145 et étudier par la méthode graphique la possibilité d'apparition des régimes de réso-

nance en partant des données suivantes: $\dot{E} = 30\ V$; $R_2 = 6\Omega$; $X_C = 8\Omega$; $R_1 = 3\Omega$; X_L peut varier de 0 à ∞.

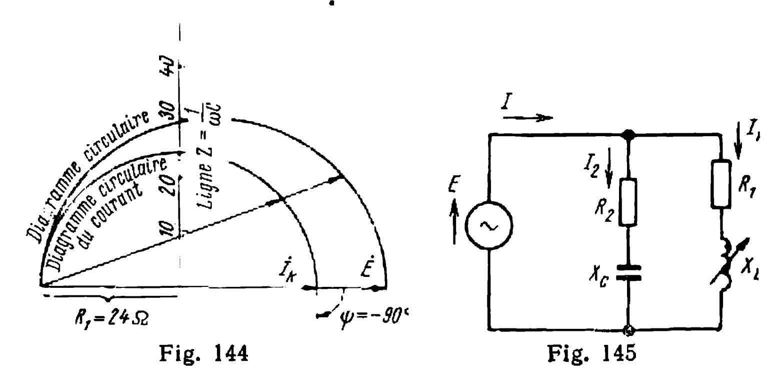


Fig. 144 Fig. 145

S o l u t i o n. Le courant $\dot{I}_2$ dans ce circuit reste invariable:

$$\dot{I}_2 = \frac{30}{6 - j8} = 3e^{j53°10'}\ A.$$

Il est en avance de 53°10′ sur la F.E.M. $\dot{E}$ (fig. 146). Lorsque X_L varie, le courant $\dot{I}_1$ varie de manière que son extrémité décrit l'arc d'une circonférence dont le diamètre est le courant

$$\dot{I}_{1cc} = \frac{\dot{E}}{R_1} = 10A;$$

$$m_I = 2{,}65\ A/cm.$$

Le courant dans la partie non ramifiée du circuit $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$.

Son lieu géométrique est également un arc de cercle *a12b*. Pour les régimes correspondants aux points *1* et *2*, le courant est en phase avec la F.E.M. $\dot{E}$. Par conséquent pour ces régimes une résonance des courants apparaît dans ce circuit.

Choisissons comme échelle des impédances $m_z = 2\Omega/cm$. Trouvons par la méthode graphique X_L pour les points *1* et *2*.

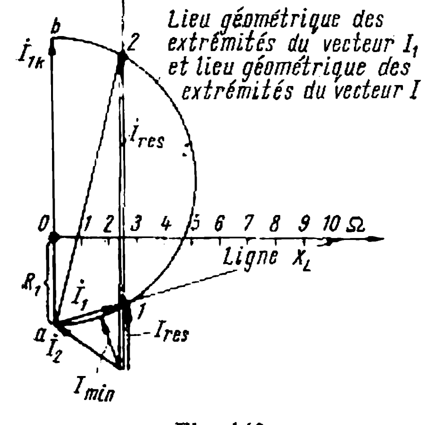


Fig. 146

Pour le point *2* $X_L \approx 0{,}8\Omega$, pour le point *1* $X_L = 10{,}6\Omega$. Dans ces conditions le courant I est égal à 11,1 A et à 2,4 A respectivement.

§ 127. Diagramme circulaire d'un quadripôle. Supposons que la tension $\dot{U}_1$ à l'entrée du quadripôle de la fig. 135, *a* soit invariable en grandeur, phase et fréquence, tandis que la charge $Z_2 = z_2e^{j\varphi_2}$ à la sortie

du même quadripôle varie seulement en module, l'angle φ_2 qui la caractérise restant constant.

Alors des diagrammes circulaires peuvent être construits pour le courant $\dot{I}_2$, la tension $\dot{U}_2$ et le courant $\dot{I}_1$. Démontrons qu'un tel diagramme existe pour le courant $\dot{I}_2$. A cette fin, remplaçons l'ensemble du quadripôle de la fig. 135, *a*, à l'exception de la charge Z_2, par un dipôle actif et trouvons le courant $\dot{I}_2$ dans la branche *pq* par la méthode de court-circuit et de marche à vide

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{pq\,mv}}{Z_{ent\,pq} + Z_2}. \tag{6.35'}$$

On entend par $\dot{U}_{pq\,mv}$ la tension entre les points *p* et *q* lorsque la branche *pq* est ouverte et par $Z_{ent\,pq} = Z_{2cc} = z_{2cc}e^{j\varphi_{2cc}}$ l'impédance d'entrée par rapport aux bornes *pq*, lorsque les bornes *mn* sont court-circuitées. Divisons le numérateur et le dénominateur du second membre de (6.35') par $Z_{ent\,pq} = Z_{2cc}$ et, en tenant compte que

$$\frac{\dot{U}_{pq\,mv}}{Z_{2cc}} = \dot{I}_{2cc},$$

où $\dot{I}_{2cc}$ — courant de court-circuit dans la branche *pq*

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_{2cc}}{1 + \frac{z_2}{z_{2cc}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2cc})}}. \tag{6.35}$$

Il résulte de l'équation (6.35) que le vecteur courant $\dot{I}_2$ glisse sur un arc de circonférence, dont la corde est $\dot{I}_{2cc}$.

Discutons ensuite le problème du diagramme circulaire du courant $\dot{I}_1$ à l'entrée du quadripôle.

Il a été déjà dit (voir par exemple l'expression 1.14), que dans un circuit linéaire deux courants quelconques, lorsque l'impédance d'une branche quelconque de ce circuit varie, sont liés l'un à l'autre par une relation de la forme

$$I_m = a + bI_n.$$

Par conséquent, le courant $\dot{I}_1$ peut être exprimé linéairement en fonction de $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_1 = a + b\dot{I}_2 \tag{6.36}$$

Cherchons les coefficients *a* et *b*. Si la branche *pq* est ouverte, on a $I_2 = 0$ et

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{10}} = \dot{I}_{10}.$$

L'équation (6.36) donne

$$a = \dot{I}_{10}. \tag{6.37}$$

Si la branche pq est en court-circuit, on a $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2cc}$ et $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1cc}$. Par conséquent,

$$\dot{I}_{1cc} = \dot{I}_{10} + b\dot{I}_{2cc}.$$

D'où

$$b = \frac{\dot{I}_{1cc} - \dot{I}_{10}}{\dot{I}_{2cc}} . \qquad (6.38)$$

Substituons (6.37), (6.38) et (6.35) dans (6.36); nous obtenons

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{10} + \frac{\dot{I}_{1cc} - \dot{I}_{10}}{1 + \frac{z_2}{z_{2cc}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2cc})}} . \qquad (6.39)$$

L'équation (6.39) montre que le lieu géométrique des extrémités du vecteur $\dot{I}_1$ est également un arc de cercle.

Nous avons examiné ci-dessus le problème de la construction d'un diagramme circulaire pour le courant. Le diagramme circulaire pour la tension est construit d'une manière analogue. Ainsi, lorsque dans un circuit l'impédance $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$ d'une branche, la deuxième branche, par exemple, varie en module, la tension aux bornes d'un certain tronçon ab de ce circuit peut être écrite sous forme d'une équation analogue à (6.39)

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{ab\,mv} + \frac{\dot{U}_{ab\,co} - \dot{U}_{ab\,mv}}{1 + \frac{z_2}{z_{2cc}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2cc})}}$$

Ici $\dot{U}_{ab\,mv}$ — tension aux bornes de ab pour $z_2 = \infty$, $\dot{U}_{ab\,cc}$ — tension aux bornes ab pour $z_2 = 0$.

La grandeur $Z_{2cc} = z_{2cc} e^{j\varphi_{2cc}}$ est l'impédance d'entrée de l'ensemble du circuit, par rapport aux bornes auxquelles est branchée l'impédance Z_2.

Précisons l'ordre des opérations de construction d'un diagramme circulaire à l'aide d'un exemple numérique.

Exemple 71. Construire le diagramme circulaire du courant $\dot{I}_1$ pour le quadripôle de l'exemple 65, si $\dot{U}_1 = 80\ V$ et $\varphi_2 = -32°27'$.

Solution. 1. En partant des données de l'exemple 65 écrivons les valeurs des impédances d'entrée:

$$Z_{10} = 7{,}815 e^{-j50°12'}; \qquad Z_{1cc} = 12{,}5 e^{j66°23'};$$
$$Z_{2cc} = 3{,}33 e^{j27°33'}.$$

2. Trouvons

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{10}} = 10{,}2 e^{j50°12'}; \qquad \dot{I}_{1cc} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{1cc}} = 6{,}4 e^{-j66°23'}.$$

3. Traçons le vecteur $\dot{U}_1$ sur la fig. 147 à l'échelle $m_U = 20\ V/cm$.

4. Portons sur la fig. 147 à l'échelle $m_{I1} = 4\ A/cm$, les courants

$\dot I_{10}$ et $\dot I_{1cc}$; $\dot I_{10}$ est en avance de 50°12′ sur $\dot U_1$ et $\dot I_{1cc}$ est en retard de 66°23′ par rapport à $\dot U_1$.

5. Traçons la corde $\dot I_{1cc} - \dot I_{10}$ et en partant de cette corde et de l'angle

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_{2cc} = -32°27' - 27°33' = -60°$$

trouvons le centre de la circonférence.

6. Choisissons comme échelle pour les impédances $m_z = 2\ \Omega/cm$ et portons à cette échelle le long de la corde, à partir du point m, le tronçon m représentant le module de l'impédance $z_{2cc} = 3{,}33\ \Omega$; $mq \cdot m_z = z_{2cc}$; $mq = 1{,}66\ cm$.

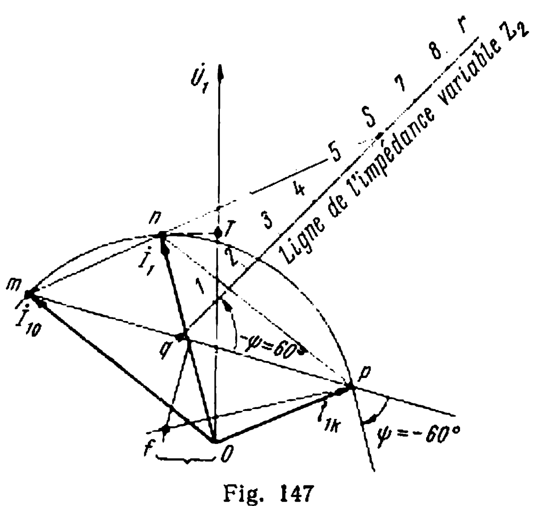


Fig. 147

7. Sous l'angle $-\psi$, c'est-à-dire $+60°$, traçons la droite qr, la ligne du module de l'impédance variable z_2 et portons sur cette dernière, à l'échelle m_z, les divisions permettant de lire la valeur de l'impédance z_2.

L'arc mnp est le lieu géométrique des extrémités du courant $\dot I_1$ lorsque z_2 varie. Pour calculer la valeur et la phase du courant $\dot I_1$, la valeur de z_2 étant donné, il faut sur la droite de l'impédance variable, autrement dit sur qr porter un tronçon, le tronçon qs par exemple, qui représente à l'échelle m_z l'impédance z_2 et réunir ensuite le point s au point m. L'intersection de la droite ms avec l'arc mnp donne le point n. A l'échelle m_{I_1} le vecteur nO représente le courant $\dot I_1$. L'angle entre $\dot U_1$ et le vecteur $\dot I_1$ est l'angle φ. Ainsi, par exemple, pour $z_2 = 6\ \Omega$, $I_1 = 9{,}1\ A$ et $\varphi = 16°$.

§ 128. Calcul de $\dot I_2$, $\dot U_2$, P_1 et Q_1 à l'aide d'un diagramme circulaire d'un quadripôle. Le diagramme circulaire d'un quadripôle, représenté sur la fig. 147, sert non seulement au calcul du courant $\dot I_1$ pour une valeur

quelconque de z_2. Il peut être également utilisé pour calculer le module du courant I_2, le module de la tension U_2 aux bornes de la charge, les puissances active P_1 et réactive Q_1 pour une impédance quelconque z_2. Chacune des grandeurs énumérées est représentée sur le diagramme par un tronçon. Ainsi, le courant I_2 mesuré à l'aide du tronçon mn; U_2 par np; P_1 par OT; Q_1 par Of *. Nous allons nous en assurer.

En partant des équations fondamentales du quadripôle (6.1) et (6.2) calculons $\dot{U}_2$ et $\dot{I}_2$:

$$\dot{U}_2 = D\dot{U}_1 - B\dot{I}_1; \qquad (6.40)$$

$$\dot{I}_2 = A\dot{I}_1 - C\dot{U}_1. \qquad (6.41)$$

Il résulte de l'équation (6.40) que

$$\dot{U}_2 = B\left(\frac{\dot{U}_1}{\frac{B}{D}} - \dot{I}_1\right) = B(\dot{I}_{1cc} - \dot{I}_1).$$

La différence $\dot{I}_{1cc} - \dot{I}_1$ est représentée sur le digramme circulaire par le $\overline{pn}$. Ainsi, le segment $\overline{pn}$ est proportionnel à U_2.

En marche à vide, lorsque $\dot{I}_2 = 0$ et $\dot{I}_1 = \dot{I}_{10}$, le point n se confond avec le point m et la corde mp donne la valeur U_{20}. L'échelle m_{U2}, à l'aide de laquelle le segment np exprime la tension U_2 est

$$m_{U_2} = \frac{U_{20}}{mp}.$$

En partant de l'équation (6.41), on trouve

$$\dot{I}_2 = A\left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{\frac{A}{C}}\right) = A(\dot{I}_1 - \dot{I}_{10}).$$

La différence $\dot{I}_1 - \dot{I}_{10}$ est représentée par le segment $\overline{mn}$. Puisque pour le quadripôle considéré, A est une grandeur constante, on peut dire que le segment mn est proportionnel au courant I_2.

Lorsque les bornes pq sont en court-circuit, on a $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2cc}$ et $\dot{I}_1 = \dot{I}_{cc}$, le point n coïncide avec le point p et la corde mp exprime le courant $\dot{I}_{2cc}$. Ainsi l'échelle du courant I_2

$$m_{I_2} = \frac{I_{2cc}}{mp}.$$

Le segment OT représente la projection du vecteur courant $\dot{I}_1$ sur la direction de la tension $\dot{U}_1$; à l'échelle $m_{p1} = U_1 m_{I_1}$ il donne la puissance active $P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi$. La projection du vecteur courant $\dot{I}_1$ sur une direction perpendiculaire à $\dot{U}_1$, à savoir le segment of, exprime, à la même échelle, la puissance réactive $Q_1 = U_1 I_1 \sin\varphi$.

* Indiqué par une parenthèse sur la fig. 147.

Pour chaque valeur de z_2 on peut trouver sur le diagramme circulaire les valeurs de I_1, I_2, U_2, P_1 et Q_1 et construire les courbes de ces grandeurs en fonction de z_2, c'est-à-dire effectuer une analyse graphique très poussée du fonctionnement du quadripôle.

Exemple 72. Construire à partir du diagrame circulaire du quadripôle de l'exemple 71 et à l'aide des données de l'exemple 65, les courbes de I_1, I_2 et U_2 en fonction de z_2. Chercher quelle sera la valeur de z_2 pour un régime de résonance.

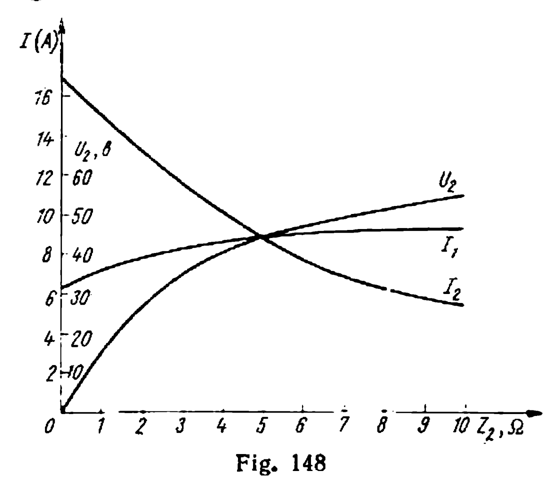


Fig. 148

Solution. Calculons la tension $\dot{U}_2$ en marche à vide

$$\dot{U}_{20} = B(\dot{I}_{1cc} - \dot{I}_{10}) = 4{,}26e^{j67^\circ}(6{,}4e^{-j66^\circ23'} - 10{,}2e^{j50^\circ12'}) = 61{,}3e^{-j39^\circ}\ V.$$

La longueur de la corde mp représentée sur la fig. 147 est égale à 3,6 cm. L'échelle

$$m_{U_2} = \frac{U_{20}}{mp} = \frac{61{,}3V}{3{,}6cm} = 17\ V/cm.$$

Le courant

$$\dot{I}_{2cc} = A\dot{I}_{1cc} - C\dot{U}_1 = 6{,}4e^{-j66^\circ23'} \cdot 1{,}28e^{j39^\circ40'} - 80 \cdot 0{,}166j \approx$$
$$\approx 18{,}9e^{-j66^\circ30'}\ A.$$

L'échelle

$$m_{I_2} = \frac{I_{2cc}}{mp} = \frac{18{,}9A}{3{,}6cm} = 5{,}26\ A/cm.$$

L'échelle des puissances $m_p = \dot{U}_1 \cdot m_{I_1} = 320\ W/cm$.

Les courbes I_1, I_2 et U_2 sont représentées sur la fig. 148 en fonction de z_2. Dans ce circuit la résonance a lieu pour $z_2 \approx 3{,}33\Omega$, le courant I_1 étant alors en phase avec la tension $\dot{U}_1$.

Exemple 73. Construire le diagramme circulaire du courant $\dot{I}_1$ du schéma de la fig. 149, a: $X_C = 5\Omega$, $R = 5\Omega$, $E = 100\ V$. La

charge du quadripôle est une réactance inductive X_L pouvant varier entre 0 et ∞.

S o l u t i o n. Trouvons le courant de marche à vide $\dot{I}_{10}$ (lorsque le circuit de la charge est ouvert):

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{E}}{R - jX_C} = \frac{100}{5 - j5} = 14,15 e^{j45^\circ} A.$$

Calculons le courant de court-circuit $\dot{I}_{1cc}$ (lorsque la charge est en court-circuit):

$$\dot{I}_{1cc} = \frac{E}{-jX_C + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}} = 12,82 e^{j71^\circ 20'} A.$$

Calculons l'impédance d'entrée Z_{2cc} du côté des bornes pq, les bornes mn étant en court-circuit

$$Z_{2cc} = z_{2cc} e^{j\varphi_{2cc}} = -jX_C + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = 7,8 e^{-j71^\circ 20'} \Omega.$$

Par conséquent $\varphi_{2cc} = -71^\circ 20'$.
L'angle $\psi = \varphi_2 - \varphi_{2cc} = 90 - (-71^\circ 20') = 161^\circ 20'$.
Le diagramme circulaire du courant I_1 est construit sur la fig. 149, *b*.

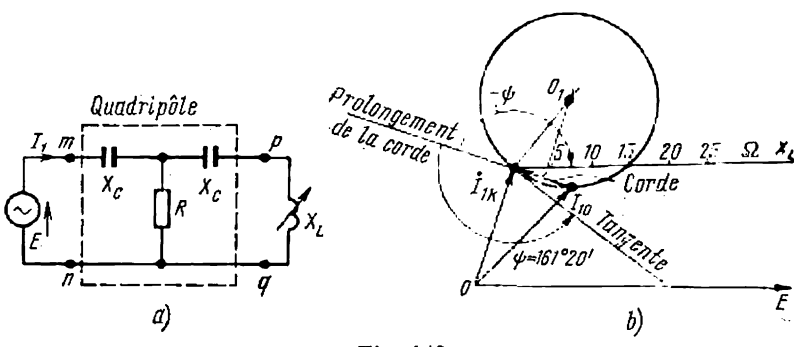


Fig. 149

La corde de cette circonférence représente la différence $\dot{I}_{1cc} - \dot{I}_{10}$. L'angle ψ est positif et, par conséquent, pour déterminer la position de la tangente, il a été porté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à partir du prolongement de la corde.

Ce diagramme a un caractère quelque peu particulier: la partie utilisée de l'arc occupe la quasi-totalité de la circonférence.

Pour trouver la position de l'extrémité du vecteur courant $\dot{I}_1$, traçons à partir de l'extrémité du vecteur $\dot{I}_{10}$ une droite passant par le point se trouvant sur la ligne X_L et correspondant à la valeur donnée de X_L, et prolongeons-la jusqu'à son intersection avec la partie utilisée de l'arc

de la circonférence. Pour $X_L = 5\Omega$, le courant $\dot{I}_1$ est en avance de 90° sur la F.E.M. $\dot{E}$.

§ 129. **Diagrammes linéaires.** On appelle diagrammes linéaires les diagrammes pour lesquels le lieu géométrique des extrémités du vecteur courant ou tension est une ligne droite.

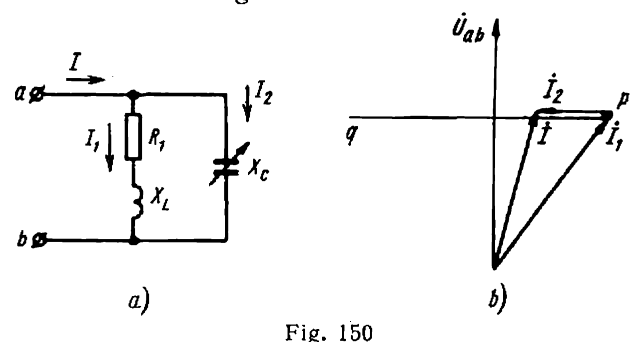


Fig. 150

En fait le diagramme linéaire n'est qu'un cas particulier d'un diagramme circulaire puisqu'une droite n'est qu'un arc de cercle de rayon infiniment grand.

Exemple 74. Construire le lieu géométrique des extrémités du vecteur courant I pour le schéma de la fig. 150, *a* lorsque X_C varie. La tension U_{ab} = const, R_1 et X_L sont invariables.

Solution. Représentons sur la fig. 150, *b* le vecteur $\dot{U}_{ab}$. Le courant $\dot{I}_1$ est en retard sur ce vecteur d'un angle

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{X_L}{R_1}.$$

Le courant $\dot{I}_2$ est en avance de 90° sur $\dot{U}_{ab}$. Le lieu géométrique des extrémités du courant total $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ est la ligne droite *pq*. C'est justement le diagramme linéaire du courant $\dot{I}$.

§ 130. **Equations d'un quadripôle actif.** Supposons que dans la première branche (la branche *mn*) du quadripôle de la fig. 151, *a*, il existe une source de F.E.M. $\dot{E}_1$, qu'une charge Z_c soit intercalée dans la deuxième branche (*pq*) et que dans les autres branches (3—*p*), se trouvant à l'intérieur du quadripôle, il existe ou puissent exister des F.E.M. $\dot{E}_k$ (l'indice *k* peut avoir n'importe quelle valeur entre 3 et *p*). Alors en remplaçant, conformément au théorème de compensation, l'impédance Z_2 par la F.E.M. $\dot{E}_2$ (fig. 151, *b*) écrivons les équations pour les courants $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_2$

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 Y_{11} - \dot{E}_2 Y_{12} + \sum_{k=3}^{p} \dot{E}_k Y_{1k}, \quad (6.42)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E}_1 Y_{21} - \dot{E}_2 Y_{22} + \sum_{k=3}^{p} \dot{E}_k Y_{2k}. \quad (6.43)$$

Mettons en court-circuit simultanément les bornes mn et pq. Dans ces conditions, il circulera dans la première branche le courant $\dot{I}_{1cc} = \sum_{k=3}^{p} \dot{E}_k Y_{1k}$ et dans la seconde le courant $\dot{I}_{2cc} = \sum_{k=3}^{p} \dot{E}_k Y_{2k}$.

Substituons dans (6.42) $\dot{I}_{1cc}$ à $\sum_{k=3}^{p} \dot{E}_k Y_{1k}$ et dans (6.43) $\dot{I}_{2cc}$ à $\sum_{k=3}^{p} \dot{E}_k Y_{2k}$. En outre, remplaçons $\dot{E}_1$ par $\dot{U}_1$ et $\dot{E}_2$ par $\dot{U}_2$. Nous obtenons ainsi

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_{1cc} = \dot{U}_1 Y_{11} - \dot{U}_2 Y_{12}, \quad (6.42')$$

$$\dot{I}_2 - \dot{I}_{2cc} = \dot{U}_1 Y_{21} - \dot{U}_2 Y_{22}. \quad (6.43')$$

Les équations (6.42′) et (6.43′) diffèrent des équations (6.4) et (6.5) uniquement par le fait qu'on trouve dans leurs premiers membres $\dot{I}_1 - \dot{I}_{1cc}$ et $\dot{I}_2 - \dot{I}_{2cc}$, à la

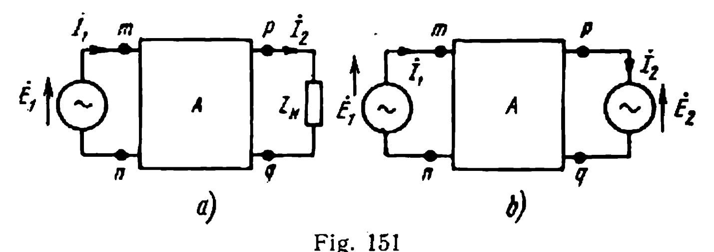


Fig. 151

place de $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_2$ respectivement. Il s'ensuit que toutes les équations obtenues par transformations de (6.4) et (6.5), seront satisfaite pour un quadripôle actif également, sous réserve qu'on y remplace $\dot{I}_1$ par $\dot{I}_1 - \dot{I}_{1cc}$ et $\dot{I}_2$ par $\dot{I}_2 - \dot{I}_{2cc}$.

Ainsi, à la forme A des équations d'un quadripôle passif

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,$$

correspond la forme A des équations pour un quadripôle actif

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B(\dot{I}_2 - \dot{I}_{2cc}),$$

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_{1cc} = C\dot{U}_2 + D(\dot{I}_2 - \dot{I}_{2cc}).$$

Les constantes A, B, C et D d'un quadripôle actif satisfont à la condition $AD - BC = 1$ et sont calculées de la même manière que pour un quadripôle passif.

CHAPITRE VII

CIRCUITS TRIPHASÉS, CHAMP MAGNÉTIQUE TOURNANT ET MÉTHODE DES COMPOSANTES SYMÉTRIQUES

§ 131. Système triphasé de F.E.M. On appelle système triphasé de F.E.M. un ensemble de trois F.E.M. sinusoïdales de fréquence et amplitude égales, déphasées de 120° l'une sur l'autre. Le diagramme de leurs valeurs instantanées est représenté sur la fig. 152. Le diagramme vectoriel de ce système est donné sur la fig. 153.

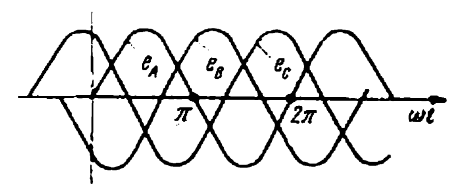


Fig. 152

On peut obtenir un système triphasé de F.E.M. à l'aide d'un alternateur triphasé. Le principe de son fonctionnement est illustré par la fig. 154. Dans un champ magnétique uniforme tournent à une vitesse angulaire constante ω trois bobines identiques, rigidement fixées les unes aux autres.

Les plans de ces bobines sont déplacées de 120° dans l'espace. Une F.E.M. sinusoïdale d'amplitude identique, mais déphasée de 120° par rapport aux deux autres, est induite dans chacune des trois bobines.

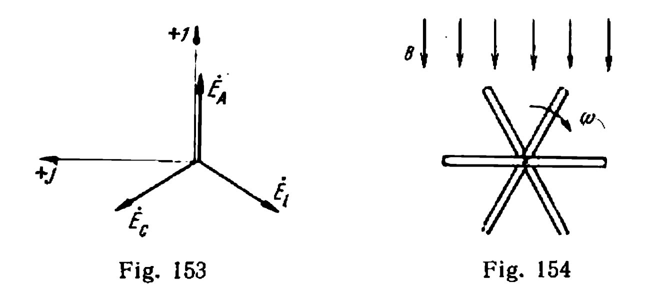


Fig. 153 Fig. 154

On peut obtenir d'une manière analogue des systèmes de F.E.M. diphasés, quadriphasés, etc.

Dans la pratique, c'est le système triphasé qui est le plus souvent utilisé.

Pour distinguer l'une de l'autre les trois F.E.M. d'un alternateur triphasé, on les désigne d'une manière appropriée. Ainsi, par exemple, si l'une des F.E.M. est désignée par $\dot{E}_A$, la F.E.M. en retard de 120° sur celle-ci est appelée $\dot{E}_B$, et celle qui est en avance de 120°, $\dot{E}_C$.

L'ordre dans lequel les F.E.M. passent par des valeurs identiques (par la valeur nulle, par exemple) est appelé ordre du système polyphasé.

§ 132. Circuit triphasé. Extension de la notion de phase. Un ensemble constitué, par un système triphasé de F.E.M., une charge ou des charges triphasées et des conducteurs de raccordement est appelé circuit triphasé.

Les courants circulant dans divers tronçons des circuits triphasés sont déphasés l'un par rapport à l'autre. On appelle phase d'un circuit triphasé un tronçon de circuit parcouru par le même courant *.

§ 133. Schémas de couplage principaux des circuits triphasés, définition des grandeurs de lignes et de phases. Les enroulements d'un alternateur doivent être raccordés à une charge. Le moyen le moins économique de réaliser ce raccordement est de coupler chaque enroulement de l'alternateur à la charge à l'aide de deux conducteurs. Ainsi réalisé, le système comprendrait six conducteurs de raccordement. Pour réduire le nombre de ces conducteurs, les enroulements d'un alternateur triphasé sont couplés en étoile ou en triangle. La charge triphasée est également couplée en étoile ou en triangle. Par cet artifice le nombre des conducteurs de raccordement entre l'alternateur et la charge est réduit de six à trois ou à quatre.

L'alternateur triphasé est habituellement représenté dans un schéma électrique par trois enroulements, décalés de 120° l' un par rapport à l'autre. Lorsque ces enroulements sont couplés en étoile on raccorde au même point les bornes homologues (les sorties par exemple) des trois enroulements. On appelle ce point — point neutre de l'alternateur et on le désigne par la lettre O (fig. 155). Les entrées des enroulements de l'alternateur sont habituellement désignées par les lettres A, B, C. La lettre A désigne l'entrée de la première phase, B, l'entrée de la seconde, et C, l'entrée de la troisième.

Lorsque les enroulements de l'alternateur sont couplés en triangle (fig. 156), la sortie du premier enroulement de l'alternateur est raccordée à l'entrée du deuxième enroulement, la sortie du deuxième enroulement est raccordée à l'entrée du troisième et la sortie du troisième, à l'entrée du premier. La somme géométrique des F.E.M. dans un triangle fermé est nulle. Par conséquent, si aucune charge n'est branchée aux bornes A, B, C, aucun courant ne circulera dans les enroulements de l'alternateur.

Les cinq modes les plus simples de raccordement d'un alternateur triphasé à une charge triphasée sont représentés sur les fig. 157—160.

Le point auquel sont raccordées les trois sorties de la charge triphasée lorsque celle-ci est couplée en étoile, est appelé point neutre de la charge et on le désigne par O'. On appelle fil neutre le conducteur raccordant le point neutre de l'alternateur au point neutre de la charge. Appelons I_0 le courant circulant dans le conducteur neutre. Prenons comme sens positif pour ce courant celui allant du point O' vers le point O.

---

* Nous allons également continuer à appeler « phase » l'argument d'une grandeur qui varie suivant une loi sinusoïdale.

Ainsi, suivant la question qu'on est en train de traiter, la phase est soit un tronçon d'un circuit triphasé, soit l'argument d'une grandeur sinusoïdale.

Les conducteurs raccordant les points A, B, C de l'alternateur à la charge sont appelés conducteurs de ligne.

Le couplage réalisé sur le schéma de la fig. 157 est appelé étoile — étoile à conducteur neutre, celui de la fig. 158 étoile — étoile sans conducteur neutre; celui de la fig. 159, *a* étoile — triangle; celui de la fig. 159, *b* triangle — triangle et celui de la fig. 160 triangle — étoile.

Les courants circulant dans les conducteurs de ligne sont appelés courants de ligne et désignés par $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ et $\dot{I}_C$. On prend par convention

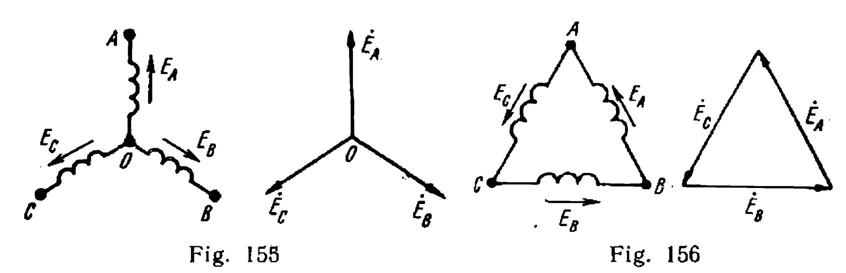


Fig. 155 Fig. 156

comme sens positif pour ces courants le sens allant de l'alternateur vers la charge. Les modules des courants de ligne sont souvent désignés par I_l, sans leur affecter aucun indice complémentaire. Cette désignation est utilisée surtout lorsque tous les courants de ligne ont le même module.

La tension entre les conducteurs de ligne est appelée tension de ligne (ou encore tension entre phases ou tension composée). Comme toute

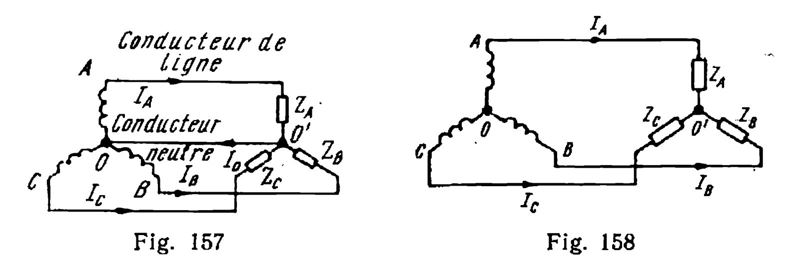


Fig. 157 Fig. 158

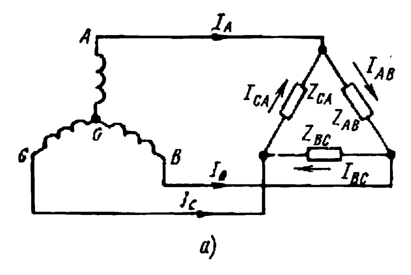
tension elle est pourvue de deux indices. Ainsi, par exemple, $\dot{U}_{AB}$ est la tension de ligne entre les points A et B. Le module de la tension de ligne est désigné par U_l.

Présentons maintenant la notion de tensions de phase et de courants de phase (ou de tensions et de courants simples). Chacun des trois enroulements de l'alternateur est appelé phase de l'alternateur.

Chacune des trois charges est appelée phase de la charge. Les courants qui y circulent sont appelés courants de phase I_{ph} de l'alternateur ou, respectivement, de la charge, tandis que les tensions aux bornes de ces enroulements ou de ces charges, sont appelées tensions de phase ou tensions simples (U_{ph}).

§ 134. Relations entre les tensions et les courants de ligne et de phase. *Lorsque l'alternateur est couplé en étoile* (fig. 157, 158, 159, *a*) la tension de ligne U_l est en module $\sqrt{3}$ fois plus grande que la tension de phase de l'alternateur ($U_{ph_{alt}}$). Ceci résulte de ce que U_l est la base d'un triangle isocèle, à angles aigus de 30° (fig. 161)

$$U_l = U_{AB} = U_{ph} \cdot 2 \cos 30° = \sqrt{3}\, U_{ph_{alt}}. \qquad (7.1)$$



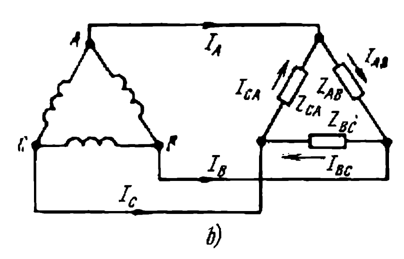


Fig. 159

Le courant de ligne I_l, lors du couplage de l'alternateur en étoile, est égal au courant de phase de cet alternateur

$$I_l = I_{ph}.$$

Lorsque l'alternateur est couplé en triangle, la tension de ligne de l'alternateur est égale à sa tension de phase. Ceci résulte de la fig. 156.

$$U_l = U_{ph_{alt}}. \qquad (7.2)$$

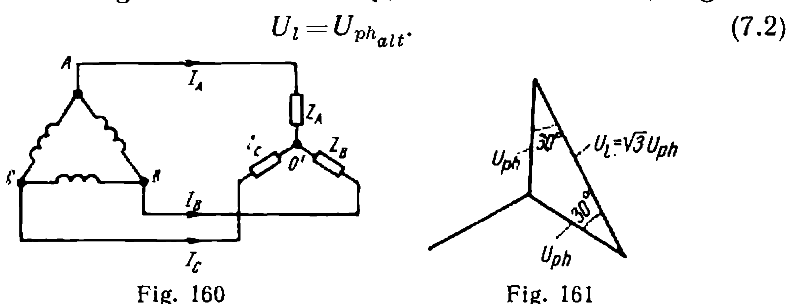


Fig. 160 Fig. 161

Lorsque la charge est couplée en étoile (fig. 157, 158, 160) le courant de ligne est égal au courant de phase respectif de la charge

$$I_l = I_{ph}.$$

Lorsque la charge est couplée en triangle, les courants dans les côtés du triangle sont également dotés de deux indices (fig. 159, *a* et *b*). Les sens positifs de ces courants sont ceux des aiguilles d'une montre. Les indices désignant ces courants correspondent aux sens positifs choisis pour ces courants. Le premier indice du courant est celui du point dont part ce courant, et le second, au point où le courant arrive.

Lorsque la charge est couplée en triangle (fig. 159, *a* et *b*) les courants de ligne ne sont pas égaux aux courants de phase et doivent

être calculés en fonction de ces derniers conformément à la première loi de Kirchhoff

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \qquad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \qquad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

§ 135. Avantages des systèmes triphasés. Tous les éléments des systèmes triphasés: alternateur, transformateur, moteur asynchrone triphasé, ligne de transport triphasée ont été étudiés dans leur principe en 1891.

La très large diffusion des systèmes triphasés s'explique en premier lieu par les trois raisons essentielles suivantes:

a) le transport d'énergie à grandes distances est au point de vue économique plus avantageux en courant triphasé que son transport en courant alternatif à un autre nombre de phases;

b) les éléments d'un système triphasé, à savoir le moteur asynchrone triphasé et le transformateur triphasé sont très simples à construire, sûrs et économiques en service;

c) le système triphasé est caractérisé dans certaines conditions par l'invariabilité de la valeur de la puissance instantanée du système pendant toute la durée d'une période du courant sinusoïdal. Il en est ainsi lorsque la charge dans les trois phases de l'alternateur triphasé est la même.

§ 136. Calcul des circuits triphasés. Les circuits triphasés ne sont qu'une variété de circuits à courant sinusoïdal et, par conséquent, leur calcul et leur étude se font par *les méthodes* et *procédés* qui ont déjà été discutés aux cinquième et sixième chapitres.

On peut utiliser également pour les circuits à courant triphasé la méthode symbolique de calcul, comme on peut construire les diagrammes vectoriels, topographiques et circulaires.

Il est recommandé de faire suivre le calcul analytique des circuits triphasés par la construction des diagrammes vectoriels ou topographiques. Les diagrammes vectoriels facilitent la recherche des angles entre les courants et les tensions, évitant des erreurs éventuelles dans le calcul analytique et rendent plus évidentes les relations entre les diverses grandeurs.

Examinons les circuits triphasés les plus simples.

§ 137. Etoile — étoile à conducteur neutre. Si le conducteur neutre, du schéma de la fig. 157, a une impédance très faible, le potentiel du point *O′* est pratiquement égal au potentiel du point *O*; les points *O′* et *O* ne sont alors en réalité qu'un seul et même point. Dans ces conditions le circuit peut être décomposé en trois mailles séparées. Les courants dans ces mailles ont les valeurs suivantes:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A}; \qquad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{Z_B}; \qquad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{Z_C}.$$

Suivant la première loi de Kirchhoff, le courant dans le conducteur neutre est égal à la somme géométrique des courants de phases

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \tag{7.3}$$

Si $Z_A = Z_B = Z_C$ (une telle charge est appelée uniforme ou symétrique), le courant $\dot{I}_0$ est nul et le fil neutre peut être supprimé du circuit, sans modifier en rien son régime.

Si la charge de phase n'est pas symétrique, le courant $\dot{I}_0$ n'est pas en général nul.

Lorsque le conducteur neutre a une certaine impédance Z_0 le calcul du circuit doit se faire par la méthode des deux nœuds (voir § 140).

Exemple 75. Dans le circuit de la fig. 162, *a*, la F.E.M. de chaque phase de l'alternateur triphasé est égale à 127 *V*. Les impédances des phases de la charge ont des valeurs égales (6,35 Ω), mais un caractère différent :

$$Z_A = R; \qquad Z_B = j\omega L; \qquad Z_C = \frac{-j}{\omega C}.$$

Calculer le courant circulant dans le conducteur neutre.

Solution. Construisons le diagramme vectoriel représenté sur la fig. 162, *b*. Les courants dans toutes les phases ont un module égal à $\frac{127}{6,35} = 20\ A$. Le courant $\dot{I}_A$ est en phase avec $\dot{E}_A$. Le courant $\dot{I}_B$ est en retard de 90° sur $\dot{E}_B$. Le courant $\dot{I}_C$ est en avance de 90° sur $\dot{E}_C$. La somme $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ donne le courant $\dot{I}_0$. Son module est égal à 14,6 *A*.

Exemple 76. Quelle doit être la valeur de la résistance *R* de la phase *A* du circuit de la fig. 162, *a* pour que le courant dans le conducteur neutre soit nul?

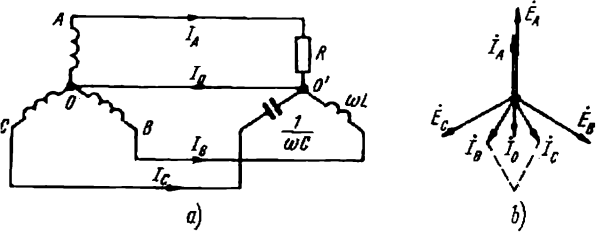


Fig. 162

Solution. La somme géométrique des courants $\dot{I}_B + \dot{I}_C$ est égale en module à :

$$2 \cdot 20 \cdot \cos 30° = 20\sqrt{3}\ A.$$

Le courant dans le conducteur neutre s'annule si le courant $\dot{I}_A$, dirigé en sens contraire à la somme $\dot{I}_B + \dot{I}_C$, a pour module $20\sqrt{3}\ A$. Dans ce cas, la résistance de la phase *A* est :

$$R = \frac{E}{20\sqrt{3}} = \frac{127}{20\sqrt{3}} = 3,66 \Omega.$$

Exemple 77. Calculer le courant dans le conducteur neutre du schéma de la fig. 162, *a* si une résistance active de 3,66Ω est intercalée dans la phase *A* et si on intervertit l'inductance et la capacité des phases *B* et *C*

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 6{,}35\Omega.$$

Solution. Le diagramme vectoriel correspondant est représenté sur la fig. 163. Il découle de ce diagramme que

$$I_0 = 34{,}6 + 34{,}6 = 69{,}2\ A.$$

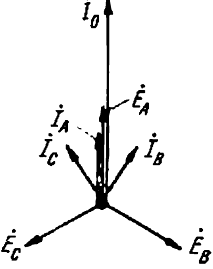


Fig. 163

§ 138. Couplage en triangle de la charge. Choisissons le sens des courants dans les phases du triangle conformément à la fig. 159, *a*. Le courant $\dot{I}_{AB}$ est dû à la tension $\dot{U}_{AB}$. Son intensité et sa phase par rapport à la tension $\dot{U}_{AB}$ sont déterminées par l'impédance de la charge Z_{AB}. Le courant $\dot{I}_{BC}$ est dû à la tension $\dot{U}_{BC}$. Son intensité et sa phase par rapport à $\dot{U}_{BC}$ dépendent de l'impédance Z_{BC}. Le courant $\dot{I}_{CA}$ est dû à la tension $\dot{U}_{CA}$ et dépend de Z_{CA}. Les courants de ligne sont calculés à partir des courants de phase suivant la première loi de Kirchhoff

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \end{aligned}\right\} \qquad (7,4)$$

Lorsque la charge des phases est uniforme (symétrique), les courants de ligne ont un module $\sqrt{3}$ fois supérieur à celui des courants de phase. En cas de charge non uniforme les courants de ligne peuvent être supérieurs ou inférieurs aux courants de phase.

Exemple 78. Dans le schéma de la fig. 164, *a*

$$Z_{AB} = -19j; \qquad Z_{BC} = 19j; \qquad Z_{CA} = 19\Omega.$$

La F.E.M. de chaque phase de l'alternateur est égale à 220 *V*. Calculer tous les courants et construire le diagramme vectoriel.

Solution. Construisons le diagramme vectoriel (fig. 164, *b*) en même temps que nous effectuons les calculs. Les tensions aux bornes des phases de la charge sont $\sqrt{3}$ fois supérieures aux F.E.M. des phases de l'alternateur et sont égales à $220\sqrt{3} = 380$ *V*. Le courant $\dot{I}_{AB}$ est en avance de 90° sur la tension $\dot{U}_{AB}$ et son intensité est égale à $\frac{380}{19} = 20$ *A*. Le courant $\dot{I}_{BC}$ est en retard de 90° sur $\dot{U}_{BC}$ et est de même égal à 20 *A*. Le courant $\dot{I}_{CA}$ a un module égal à 20 *A* et est en phase avec la tension

$\dot{U}_{CA}$. Déterminons les courants de ligne $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ et $\dot{I}_C$ par la méthode graphique en utilisant les (7.4). Par leur module $I_A = I_C \approx 10A$; $I_B = 20A$.

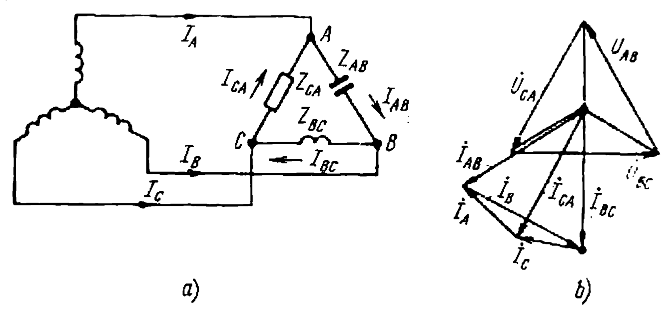


Fig. 164

§ 139. Opérateur *a* d'un système triphasé. Désignons par a le nombre complexe $e^{j\,120°}$, dont le module est égal à l'unité, et appelons-le opérateur du système triphasé.

Alors

$$e^{j240°} = (e^{j120°})^2 = a^2.$$

Les trois vecteurs: 1, a et a^2 forment un système triphasé symétrique (fig. 165)

$$1 + a + a^2 = 0. \qquad (7.5)$$

La multiplication d'un vecteur quelconque par l'opérateur a le fait tourner d'un angle de 120° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, sans modifier son module. La multiplication d'un vecteur par a^2 le fait tourner d'un angle de 240° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ou, ce qui revient au même, le tourne de 120° dans le sens des aiguilles d'une montre.

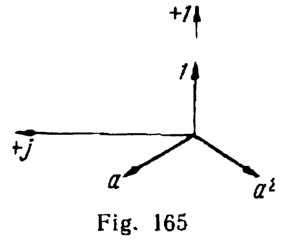


Fig. 165

En utilisant l'opérateur a on peut exprimer la F.E.M. $\dot{E}_B$ et la F.E.M. $\dot{E}_C$ d'un système triphasé symétrique des F.E.M. en fonction de la F.E.M. $\dot{E}_A$:

$$\dot{E}_B = a^2 \dot{E}_A; \qquad \dot{E}_C = a\dot{E}_A. \qquad (7.6)$$

§ 140. Couplage étoile — étoile sans conducteur neutre. Le schéma de la fig. 158 est un schéma à deux nœuds (points 0 et $0'$). La méthode la plus rationnelle de calcul de courant dans ce circuit est la méthode des deux nœuds (§ 19). La tension entre ces deux nœuds est

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{\dot{E}_A (Y_A + a^2 Y_B + a Y_C)}{Y_A + Y_B + Y_C}. \qquad (7.7)$$

Si la charge est symétrique ($Y_A = Y_B = Y_C$) on a (conformément à (7.5)

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A (1 + a + a^2)}{3Y_A} = 0$$

et la tension dans chaque phase de la charge est égale à la F.E.M. correspondante

$$\dot{U}_{AO'} = \dot{E}_A ; \qquad \dot{U}_{BO'} = \dot{E}_B ; \qquad \dot{U}_{CO'} = \dot{E}_C .$$

Il en est tout autrement si la charge est dissymétrique. Dans ce cas $\dot{U}_{O'O} \neq 0$ et $\dot{U}_{AO'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{O'O}$, $\dot{U}_{BO'} = \dot{E}_B - \dot{U}_{O'O}$, $\dot{U}_{CO'} = \dot{E}_C - \dot{U}_{O'O}$. Les courants dans les phases de la charge sont

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AO'}}{Z_A} ; \qquad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BO'}}{Z_B} ; \qquad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CO'}}{Z_C} .$$

Pour les calculs numériques voir l'exemple 80.

Si les charges dans deux phases sont égales, par exemple $Z_B = Z_C \neq Z_A$, l'équation (7.7) prend après transformation, la forme simplifiée suivante:

$$\dot{U}_{O'O} = \dot{E}_A \frac{Z_B - Z_A}{Z_B + 2Z_A} . \qquad (7.8)$$

§ 141. **Circuits triphasés en présence d'induction mutuelle.** Le calcul des circuits triphasés comprenant des bobines couplées magnétiquement se fait de la même manière que le calcul des circuits couplés magnétiquement à courant sinusoïdal monophasé.

E x e m p l e **79.** Calculer les indications de l'ampèremètre et celles du voltmètre dans le circuit de la fig. 166. Construire un diagramme

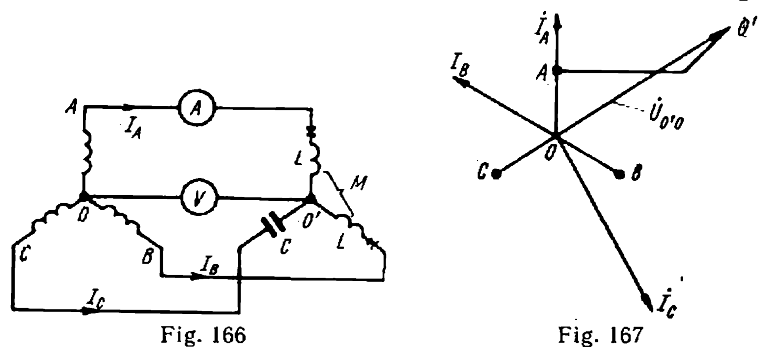


Fig. 166 Fig. 167

topographique conjointement avec le diagramme vectoriel des courants. Soit: $E_{ph} = 127$ V

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 4\Omega ; \qquad \omega M = 2\Omega .$$

S o l u t i o n. Choisissons les sens positifs des courants conformément à la fig. 166. Suivant la première loi de Kirchhoff, $\dot{I}_A + \dot{I}_B +$

$+\dot{I}_C = 0$. Supposons que la F.E.M. E_A soit dirigée suivant l'axe $+1$. Ecrivons l'équation suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour la maille $OAO'BO$

$$\dot{I}_A j\omega L + \dot{I}_B j\omega M - (\dot{I}_B j\omega L + \dot{I}_A j\omega M) = \dot{U}_{AB}.$$

En substituant aux symboles leurs valeurs numériques, nous obtenons

$$2j(\dot{I}_A - \dot{I}_B) = 220e^{j30°}$$

ou

$$\dot{I}_A - \dot{I}_B = \frac{220e^{j30°}}{2e^{j90°}} = 110e^{-j60°}\ A.$$

Pour la maille $OCO'BO$

$$\dot{I}_C\left(-\frac{j}{\omega C}\right) - (\dot{I}_B j\omega L + \dot{I}_A j\omega M) = \dot{U}_{CB}$$

ou

$$-4j\dot{I}_C - 2j\dot{I}_A - 4j\dot{I}_B = 220j.$$

La résolution de ces trois équations donne

$$\dot{I}_A = 110, \quad \dot{I}_B = 110e^{j60°}, \quad \dot{I}_C = 110\sqrt{3}\,e^{-j150°}\ A.$$

Le diagramme topographique, construit sur le diagramme vectoriel du courant, est représenté sur la fig. 167. L'ampèremètre indique 110 A et le voltmètre ~ 640 V:

$$\dot{\varphi}_{0'} = \dot{\varphi}_0 + \dot{E}_A - \dot{I}_A j\omega L - \dot{I}_B j\omega M.$$

§ 142. Puissances active, réactive et apparente d'un système triphasé. On entend par puissance active d'un système triphasé la somme des puissances actives des phases, plus la puissance active dégagée dans la résistance intercalée dans le conducteur neutre

$$P = P_A + P_B + P_C + P_0. \tag{7.9}$$

La puissance réactive est la somme des puissances réactives des phases, plus la puissance réactive de la réactance intercalée dans le conducteur neutre.

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_0. \tag{7.10}$$

Puissance apparente:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{7.11}$$

Si la charge est symétrique, on a

$$P_0 = Q_0 = 0; \qquad P_A = P_B = P_C = U_{ph} I_{ph} \cos\varphi_{ph};$$
$$Q_A = Q_B = Q_C = U_{ph} I_{ph} \sin\varphi_{ph}.$$

Ici par φ_{ph} on entend l'angle entre la tension U_{ph} aux bornes de la phase de la charge et le courant I_{ph} circulant dans la phase de la charge. En cas

de charge symétrique des phases on a

$$\left.\begin{aligned} P &= 3U_{ph}I_{ph}\cos\varphi_{ph};\\ Q &= 3U_{ph}I_{ph}\sin\varphi_{ph};\\ S &= 3U_{ph}I_{ph}. \end{aligned}\right\}^{*} \qquad (7.12)$$

§ 143. Mesure de la puissance active dans un système triphasé. Pour mesurer la puissance active d'un système triphasé dans le cas le plus général (charge dissymétrique et présence d'un conducteur neutre) il faut disposer de trois wattmètres, branchés suivant le schéma la fig. 168.

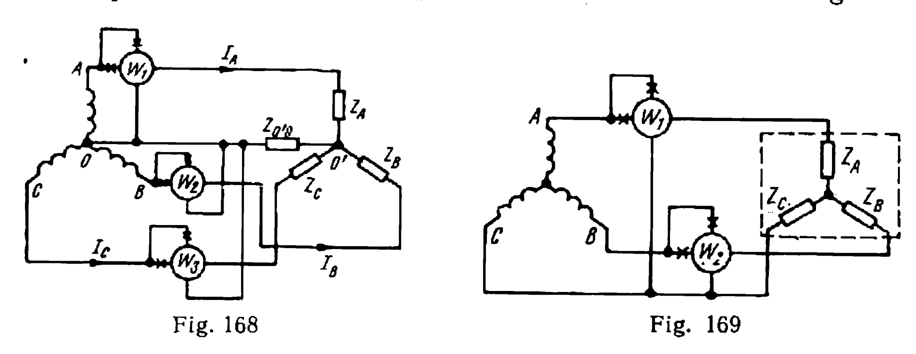


Fig. 168 Fig. 169

La puissance active du système est égale à la somme des indications des trois wattmètres. S'il n'y a pas de conducteur neutre, la puissance peut être mesurée à l'aide de deux wattmètres branchés suivant le schéma de la fig. 169. La somme des indications des deux wattmètres du schéma de la fig. 169 donne la puissance active de l'ensemble du système, indépendamment du couplage en étoile ou en triangle de la charge (le triangle de la charge peut être toujours transformé en une étoile équivalente).

L'indication du premier wattmètre est égale au produit scalaire de la tension $\overline{U}_{AC}$ par le courant $\overline{I}_A$, c'est-à-dire à $\overline{U}_{AC}\overline{I}_A$; les indications du deuxième à $\overline{U}_{BC}\overline{I}_B$. La somme des indications des deux wattmètres

$$\overline{U}_{AC}\overline{I}_A+\overline{U}_{BC}\overline{I}_B=(\overline{U}_{AO}-\overline{U}_{CO})\overline{I}_A+(\overline{U}_{BO}-\overline{U}_{CO})\overline{I}_B=$$
$$=\overline{U}_{AO}\overline{I}_A+\overline{U}_{BO}\overline{I}_B-\overline{U}_{CO}(\overline{I}_A+\overline{I}_B)=\overline{U}_{AO}\overline{I}_A+\overline{U}_{BO}\overline{I}_B+\overline{U}_{CO}\overline{I}_C.$$

---

* Pour une charge symétrique et indépendamment du mode de son couplage en étoile ou en triangle

$$3U_{ph}I_{ph}=\sqrt{3}\,\sqrt{3}\,U_{ph}I_{ph}=\sqrt{3}\,U_lI_l.$$

Ici U_l tension de ligne aux bornes de la charge, I_l—courant de ligne circulant dans la charge.

Par conséquent, à la place des équations (7.12) on utilise souvent les suivantes :

$$P=\sqrt{3}\,U_lI_l\cos\varphi;$$
$$Q=\sqrt{3}\,U_lI_l\sin\varphi;$$
$$S=\sqrt{3}\,U_lI_l.$$

Cette dernière expression n'est autre chose que la somme des puissances actives des trois phases.

Lorsque la charge des phases est symétrique, il suffit de mesurer la puissance de l'une des phases et de tripler le résultat obtenu.

Si dans le schéma de la fig. 169 la charge est symétrique, on peut, en partant des indications des deux wattmètres (P_1 et P_2), calculer la tangente de l'angle φ de la charge. Discutons la manière de le faire.

Le diagramme vectoriel représenté sur la fig. 170 correspond à une charge inductive symétrique. L'angle entre la tension $\dot{U}_{AC}$ et le courant $\dot{I}_A$ est égal à $(\varphi - 30°)$ et l'angle entre la tension $\dot{U}_{BC}$ et le courant $\dot{I}_B$ est égal à $(\varphi + 30°)$.

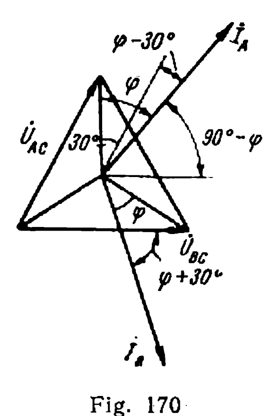


Fig. 170

Par conséquent, les indications du premier wattmètre

$$P_1 = \overline{U}_{AC}\overline{I}_A = U_l I_l \cos(\varphi - 30°)$$

et celles du deuxième

$$P_2 = \overline{U}_{BC}\overline{I}_B = U_l I_l \cos(\varphi + 30°).$$

Si $\varphi > 60°$, on a $\varphi + 30° > 90°$ et $P_2 < 0$. L'aiguille du deuxième wattmètre pour $\varphi > 60°$ devient à fond à gauche. Dans ce cas pour mesurer la valeur de P_2 il faut intervertir les extrémités de l'enroulement parallèle et prendre la puissance mesurée avec le signe —.

Ecrivons la différence et la somme des indications des wattmètres

$$P_1 - P_2 = U_l I_l \sin\varphi;$$

$$P_1 + P_2 = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos\varphi.$$

D'où, divisant membre à membre:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}. \qquad (7.13)$$

§ 144. Mesure de la puissance réactive pour une charge symétrique des phases. Démontrons que les indications du wattmètre du schéma de la fig. 171 pour une charge symétrique sont proportionnelles à la puissance réactive de l'ensemble du système. Le wattmètre mesure la valeur

$$\overline{U}_{BC}\overline{I}_A = U_{BC} I_A \cos(\dot{U}_{BC}\,\hat{}\,\dot{I}_A).$$

L'angle entre $\dot{U}_{BC}$ et $\dot{I}_A$ est égal à $90° - \varphi$ (fig. 170). Par conséquent, le wattmètre indique

$$\sqrt{3}\, U_{ph} I_{ph} \sin\varphi.$$

De ce fait, la puissance réactive du système (voir l'équation 7.12) est égale à l'indication du wattmètre multipliée par $\sqrt{3}$.

E x e m p l e 80. Trouver les indications des wattmètres du schéma de la fig. 172 et comparer la somme de leurs indications avec la puissance active du système calculé comme

$$\Sigma I^2 R; \qquad R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 76\Omega.$$

S o l u t i o n. Pour simplifier les écritures désignons $\frac{1}{R}=y$, alors les admittances des phases sont:

$$Y_A=\frac{1}{R}=y;\quad Y_B=\frac{1}{j\omega L}=\frac{-j}{\omega L}=\frac{-j}{R}=-jy;\quad Y_C=\frac{1}{\frac{1}{j\omega C}}=j\omega C=jy.$$

Suivant la méthode des deux nœuds

$$\dot{U}_{O'O}=\dot{E}_A\frac{Y_A+a^2Y_B+aY_C}{Y_A+Y_B+Y_C}=\dot{E}_A\frac{1-ja^2+ja}{1-j+j}=\dot{E}_A(1-\sqrt{3})=$$
$$=-0{,}73\cdot 220=-160\,V$$

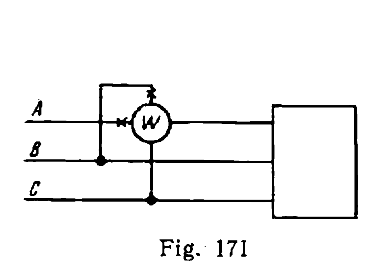


Fig. 171

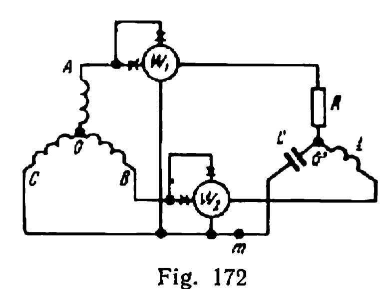


Fig. 172

La tension aux bornes de la phase A de la charge $\dot{U}_{AO'}=\dot{E}_A-U_{O'O}=$ $=220-(-160)=380\ V$. Le courant de la phase $A\,I_A=\frac{380}{76}=5\ A$. Il est en phase avec $\dot{U}_{AO'}$ (voir diagramme vectoriel de la fig. 173). La tension aux bornes de la phase B de la charge $\dot{U}_{BO'}=\dot{E}_B-\dot{U}_{O'O}=50-j\,191$. Le module de la tension $\dot{U}_{BO'}$ est égal à 197 V. Le module de la tension $\dot{U}_{CO'}$ est de même égal à 197 V. Les courants $I_B=I_C=\frac{197}{76}=$ $=2{,}6\ A$. L'angle entre le courant $\dot{I}_A$ et la tension $\dot{U}_{AC}$ est egal à 30°. L'angle entre le courant $\dot{I}_B$ et la tension $\dot{U}_{BC}$ est égal à 76°. Indication du premier wattmètre

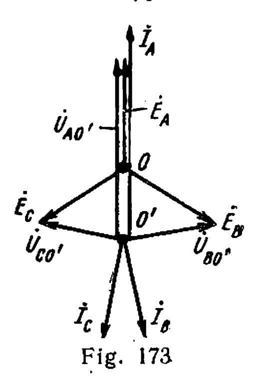


Fig. 173

$$P_1=U_{AC}I_A\cos(\dot{U}_{AC}\,\hat{}\,\dot{I}_A)=380\cdot 5\cos 30^\circ\doteq 1650\ W_1.$$

Indication du deuxième wattmètre

$$P_2=U_{BC}I_B\cos(\dot{U}_{BC}\,\hat{}\,\dot{I}_B)=380\cdot 5\cdot\cos 76^\circ=253\ W_2.$$

Puissance globale

$$P_1+P_2=1903\ W.$$

L'exactitude de ce chiffre est confirmée par le calcul de la puissance du système à l'aide de l'expression

$$\Sigma I^2 R.$$

Du fait qu'une résistance active n'existe que dans la phase A, on a

$$\Sigma I^2 R = I_A^2 R = 5^2 \cdot 76 = 1900\ W.$$

Ce résultat concorde avec la somme des indications des wattmètres, aux erreurs d'une règle à calcul près.

Exemple 81. Quelles seront les indications des wattmètres du schéma de la fig. 172 en cas de rupture du conducteur de ligne C au point m, se trouvant à l'entrée de la phase C du récepteur.

Solution. Par suite de la rupture du conducteur au point m, le circuit cesse d'être un circuit triphasé et devient un circuit monophasé. La résistance R et l'inductance L se trouvent branchées en série sous la tension de ligne $\dot{U}_{AB}$

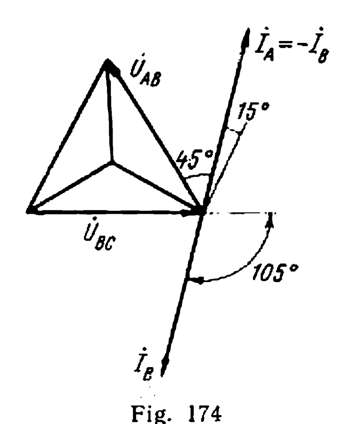


Fig. 174

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{AB}}{R + j\omega L} = \frac{380e^{j30^\circ}}{76 + j76} = 3{,}54e^{-j15^\circ}.$$

Le diagramme vectoriel correspondant est représenté sur la fig. 174. Indication du premier wattmètre :

$$P_1 = \overline{U}_{AC}\overline{I}_A = 380 \cdot 3{,}54 \cos 15^\circ = 1295\ W.$$

Indication du deuxième wattmètre

$$P_2 = \overline{U}_{BC}\overline{I}_B = 380 \cdot 3{,}54 \cos 105^\circ = -345\ W.$$

$$P_1 + P_2 = 950\ W.$$

Vérification :

$$I_A^2 R_A = 3{,}54^2 \cdot 76 \approx 950\ W.$$

Exemple 82. Soit $P_1 = 766\ W$ et $P_2 = -174\ W$ les indications des wattmètres du schéma de la fig. 169 en cas de charge inductive symétrique des phases. Calculer l'angle φ de la charge, ainsi que les puissances réactive et apparente du système.

Solution. Conformément à l'équation (7.13)

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}\, \frac{766 - (-174)}{766 - 174} = 2{,}65\,; \quad \varphi \approx 69^\circ 20'\,;$$

$$\frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi\,; \quad Q = P \operatorname{tg} \varphi = (766 - 174) \cdot 2{,}65 = 1600\ VAr;$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1716\ VA.$$

§ 145. Diagrammes circulaires et linéaires des circuits triphasés. Lorsque le module de l'impédance d'une des phases d'un circuit triphasé varie, le lieu géométrique des extrémités du vecteur tension ou courant d'une quelconque des phases du circuit est soit une circonférence soit une ligne droite.

A titre d'exemple, examinons le problème du diagramme circulaire de tension du schéma de la fig. 175, *a* pour $Z_B = Z_C = r =$ const, le module de l'impédance Z_A de la phase A étant seul variable.

Utilisons à cette fin la méthode de marche à vide et de court-circuit. Lorsque la phase A est en marche à vide, les deux impédances $Z_B = Z_C = r$ des phases B et C sont couplées en série sous la tension de ligne U_{BC}. Les chutes de tension dans ces impédances sont les mêmes et égales à la moitié de la tension U_{BC}. Par conséquent, le point neutre du récepteur, à savoir le point O', se trouvant dans ce schéma entre les deux résistances lorsque la phase A est en marche à vide, est situé au milieu du BC (au point désigné par m sur la fig. 175, *b*).

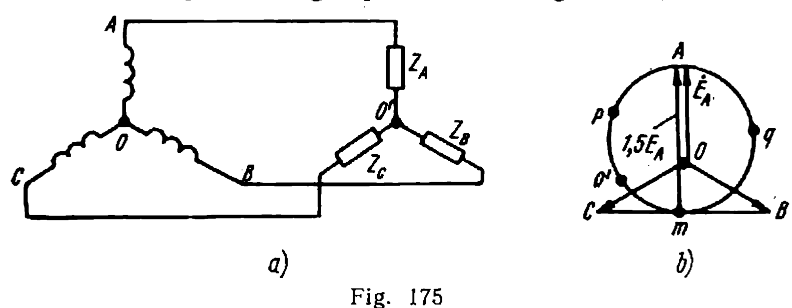


Fig. 175

La tension à vide entre les points A et O' du schéma de la fig. 175, *a* ($\dot{U}_{AO'mv}$) est égale à la différence des potentiels des points A et O' (ce dernier se trouve, comme nous l'avons déjà dit, au point m en cas de marche à vide. Il découle du diagramme vectoriel de la fig. 175, *b* que cette tension est une fois et demie plus grande que la F.E.M. de phase $\dot{E}_A$ et est en phase avec cette dernière.

Le schéma équivalent à utiliser pour le calcul du courant dans l'impédance Z_A par la méthode de marche à vide et de court-circuit est représenté sur la fig. 176. Il découle de ce schéma que

$$\dot{I}_A = \frac{1,5\dot{E}_A}{Z_{ent} + Z_A}; \tag{7.14}$$

ici Z_{ent} — impédance d'entrée du schéma de la fig. 175, *a* par rapport aux bornes AO'. Il résulte de la fig. 177 que

$$Z_{ent} = \frac{r}{2}.$$

La tension

$$\dot{U}_{O'm} = \dot{I}_A Z_{ent} = \frac{1,5\dot{E}_A}{1 + \frac{z_A}{z_{ent}} e^{j(\varphi_A - \varphi_{ent})}}. \tag{7.14'}$$

Pour $Z_A = O\dot{U}_{O'm} = 1,5\ \dot{E}_A$ et le point O' coïncide avec le point A de la fig. 175, *b*. Pour $Z_A = \infty$, $\dot{U}_{O'm} = 0$ et le point O' coïncide avec le point m de la fig. 175, *b*.

Ces deux positions limites du point O' sur le diagramme circulaire de la fig. 175, *b* (pour $Z_A = 0$ et pour $Z_A = \infty$) ne dépendent pas du caractère de l'impédance de la phase A.

En ce qui concerne les positions du point O' (lieu géométrique de ce point) pour les valeurs de Z_A, se trouvant dans l'intervalle compris entre 0 et ∞, elles dépendent non seulement du module de l'impédance Z_A, mais également du caractère de cette impédance (c.-à-d. de l'angle φ_A).

Si l'impédance Z_A est purement active et est égale à R, on a $\varphi_A = 0$, $\varphi_A - \varphi_{ent} = 0$ et

$$\dot{U}_{O'm} = \frac{1{,}5\dot{E}_A}{1+\frac{2R}{r}}.$$

Le lieu géométrique des extrémités du vecteur $\dot{U}_{O'm}$ dans ce cas est la droite Am de la fig. 175, *b*. Pour $R = r$ $\dot{U}_{O'm} = 0{,}5\ \dot{E}_A$.

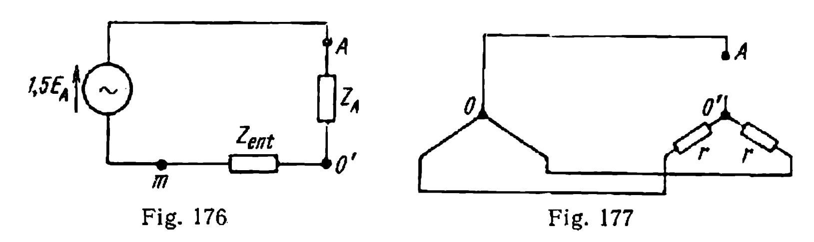


Fig. 176 Fig. 177

Si l'impédance Z_A est purement capacitive, on a $\varphi_A = -90°$, $\varphi_A - \varphi_{ent} = -90°$ et le lieu géométrique des extrémités du vecteur $\dot{U}_{O'm}$ est la demi-circonférence mpA. Pour

$$\frac{1}{\omega C} = r, \quad \dot{U}_{O'm} = \frac{1{,}5\dot{E}_A}{1-2j} = 0{,}67\dot{E}_A e^{j63°25'}.$$

En ce régime $\left(\text{pour } \frac{1}{\omega C} = r\right)$ la position du point O' est représentée sur la fig. 175, *b*. Si l'impédance Z_A est purement inductive ($Z_A = j\omega L$), on a $\varphi_A - \varphi_{ent} = 90°$, et le lieu géométrique des extrémités du vecteur $\dot{U}_{O'm}$ est la demi-circonférence mqA.

Ainsi, lorsque l'impédance de la phase A du schéma de la fig. 175, *a* varie, le point neutre du récepteur se déplace le long de la demi-circonférence mpA de la fig. 175, *b* si Z_A a un caractère capacitif ; il se déplace le long de la droite mOA, si Z_A est une résistance purement active, et le long de la demi-circonférence mqA, si Z_A est une réactance purement inductive.

La tension entre le point neutre du récepteur (point O') et le point neutre de l'alternateur (point O), c'est-à-dire $\dot{U}_{O'O}$ est représentée sur la fig. 175, *b* par le vecteur allant du point O au point mobile O'.

§ 146. Indicateur de l'ordre des phases. L'ordre ou la séquence des phases dans un système symétrique triphasé de F.E.M. ou de tensions est déterminé à l'aide d'un dispositif appelé indicateur de l'ordre des phases. Cet indicateur est constitué par deux lampes à incandescence identiques et une capacité C (fig. 178). La valeur de la capacité C est choisie de sorte que la réactance capacitive $\frac{1}{\omega C}$ soit égale à la résistance r de chaque lampe.

Si les trois bornes de l'indicateur de phase sont branchées aux trois sorties d'un système triphasé symétrique de F.E.M., le potentiel du point neutre du schéma de la fig. 178 est déterminé par la position du point O' sur le diagramme vectoriel de la fig. 175, *b*.

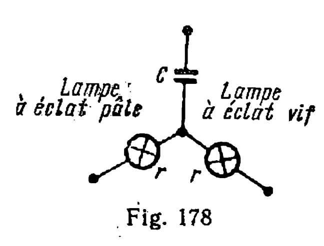


Fig. 178

On voit sur ce diagramme que la tension aux bornes des lampes à incandescence n'est pas la même. Aux bornes de la lampe intercalée dans la phase B, elle est donnée par le vecteur $\dot{U}_{BO'}$, tandis qu'aux bornes de la lampe branchée dans la phase C elle est donnée par le vecteur $\dot{U}_{CO'}$. Du fait que $\dot{U}_{BO'} > \dot{U}_{CO'}$ la lampe de la phase B aura un éclat plus vif que celui de la phase C. Par conséquent, *si la phase d'un système triphasé de F.E.M. à laquelle est branchée la sortie de la capacité est considérée comme phase A, la phase à laquelle est branchée la lampe à éclat vif est la phase B et la phase comprenant la lampe à éclat pâle est la phase C.*

L'une des propriétés les plus importantes des courants polyphasés, et des courants triphasés en particulier, est leur propriété de créer un champ magnétique circulaire tournant.

§ 147. Définition d'un champ magnétique circulaire tournant. Un champ magnétique circulaire tournant est un champ magnétique dont le vecteur d'induction magnétique résultante a une grandeur constante et tourne avec une vitesse angulaire constante ω.

Fig. 179.

§ 148. Champ magnétique d'une bobine parcourue par un courant sinusoïdal. Commençons par nous assurer que le champ magnétique d'une bobine unique parcourue par un courant sinusoïdal est un champ magnétique pulsatoire * et non un champ magnétique tournant. A cette fin rapportons-nous à la fig. 179. La bobine représentée sur cette figure est parcourue par le courant sinusoïdal, $i = I_m \sin \omega t$. Un champ magnétique est caractérisé par le vecteur d'induction magnétique B. La direction de B dépend du sens de l'enroulement de la bobine et du sens du

* On appelle champ pulsatoire un champ dans lequel le vecteur de l'induction magnétique varie (pulse) le long de l'axe de la bobine parcourue par le courant ayant engendré ce champ magnétique.

courant circulant dans cette bobine à l'instant considéré. Désignons par E l'entrée et par S la sortie de la bobine sur la fig. 179. Le vecteur d'induction magnétique est dirigé vers le haut, si le courant entre par la borne E et sort par la borne S (ce sens de courant est considéré comme positif; il correspond à l'intervalle de temps compris entre 0 et π). Au cours de l'alternance suivante, lorsque le courant est négatif, le vecteur B est dirigé vers le bas. Ainsi, le lieu géométrique des extrémités du vecteur B est l'axe même de la bobine.

§ 149. Production d'un champ magnétique circulaire tournant. Plaçons trois bobines identiques de manière que leurs axes soient décalés de

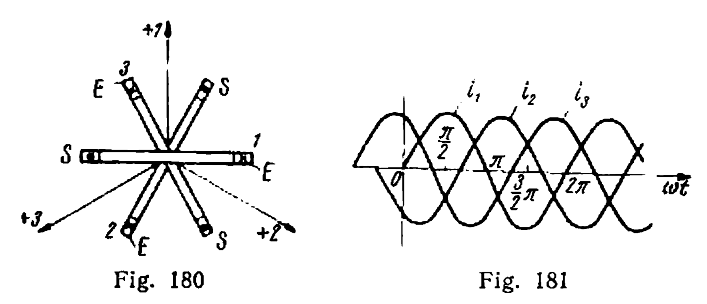


Fig. 180 Fig. 181

120° l'un par rapport à l'autre (fig. 180). Raccordons les bobines à un système de F.E.M. triphasé symétrique. Admettons que les courants entrent par les bornes d'entrée des bobines et qu'ils varient de la manière suivante:

$$i_1 = I_m \sin \omega t\,;$$
$$i_2 = I_m \sin (\omega t - 120°)\,;$$
$$i_3 = I_m \sin (\omega t + 120°).$$

Leurs courbes sont représentées sur la fig. 181. Chacun de ces courants va créer un champ pulsatoire, dirigé le long de l'axe de sa propre bobine. Désignons par $+1$ le sens positif de l'axe de la première bobine, par $+2$ celui de la deuxième bobine et par $+3$ celui de la troisième. Désignons par B_1 l'induction de la première bobine, par B_2 l'induction de la deuxième et par B_3 celle de la troisième.

Représentons sur la fig. 182 les valeurs instantanées B_1, B_2 et B_3, ainsi que l'induction résultante aux instants $\omega t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$. Le premier croquis de la fig. 182 est construit pour $\omega t = 0$, le deuxième pour $\omega t = \frac{\pi}{2}$, etc.

Lorsque le temps augmente, le vecteur de l'induction magnétique résultante, tout en conservant constante sa valeur de 1,5 B_m, tourne avec une vitesse angulaire ω dans le sens dirigé de l'entrée de la première bobine parcourue par le courant $I_m \sin \omega t$ vers l'entrée de la deuxième bobine à courant $I_m \sin (\omega t - 120°)$.

On peut donc dire que le vecteur d'induction magnétique résultante tourne dans le sens de la bobine dont le courant est en retard.

Si on fait circuler un courant I_m sin ($\omega t - 120°$) dans la troisième bobine et un courant I_m sin ($\omega t + 120°$) dans la deuxième, le sens de la rotation du champ s'inverse.

Nous avons déjà signalé au § 53 que pour un circuit magnétique exécuté entièrement ou partiellement en matériau ferromagnétique, le

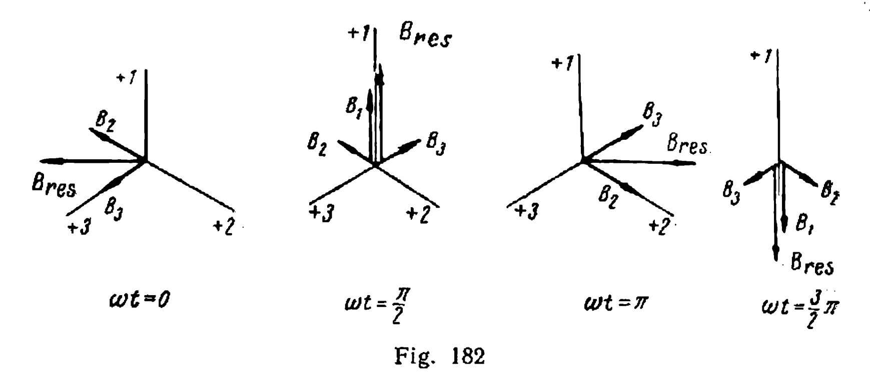


Fig. 182

flux magnétique dans ce circuit est nettement plus grand, que le flux magnétique qui y aurait existé en l'absence de tout matériau ferromagnétique.

Pour intensifier un champ magnétique tournant, on place à l'intérieur des bobines (fig. 180) un cylindre creux ou massif en matériau ferromagnétique et on enferme les côtés des bobines dans les encoches d'un cylindre ferromagnétique extérieur (fig. 183).

Les champs magnétiques tournants sont utilisés dans les moteurs électriques.

§ 150. Principe de fonctionnement d'un moteur asynchrone. Le type de moteur à courant alternatif le plus répandu dans l'industrie est un moteur asynchrone triphasé. Il est constitué par une partie fixe, appelée stator, dans les encoches duquel sont placées trois bobines produisant un champ magnétique circulaire tournant et une partie mobile, appelée rotor, dans les encoches duquel se trouvent trois bobines formées sur elles-mêmes ou sur une résistance extérieure (fig. 183).

Fig. 183

Afin de rendre la fig. 183 plus facilement lisible, les bobines y sont représentées en coupe, les faces des bobines ne sont pas figurées du tout et chacune d'elles n'occupe qu'une faible partie de la circonférence du stator (ou du rotor).

En réalité chacune des bobines (ses conducteurs d'aller ou de retour) occupe un tiers de la circonférence de l'alésage du stator (ou de la circonférence du rotor).

L'arbre du rotor du moteur est couplé à l'arbre de la machine à entraîner.

Supposons qu'au début le rotor soit au repos. Dans ce cas le champ magnétique tournant, créé par les enroulements statoriques, coupe les conducteurs des bobines du rotor, immobile à cet instant, à une vitesse angulaire ω et y induit des F.E.M. Ces F.E.M. engendreront des courants dans les bobines rotoriques. Conformément à la loi de Lenz, ces courants tendent à affaiblir par leur champ magnétique propre le champ magnétique qui les a engendrés.

L'interaction mécanique des courants rotoriques et du champ magnétique tournant oblige le rotor à commencer à tourner dans le même sens que le champ magnétique tournant (on peut s'en assurer en utilisant la règle de la main gauche).

En régime établi la vitesse de rotation du rotor ω_{rot} est égale à $(0,98 \div 0,95)\ \omega$. Ce moteur est justement appelé asynchrone parce que son rotor ne tourne pas rigoureusement en synchronisme avec le champ tournant; ω_{rot} ne peut être en principe égal à la vitesse angulaire du champ tournant. Ceci est évident puisque pour $\omega_{rot} = \omega$ le champ tournant ne coupe plus les conducteurs des enroulements rotoriques, aucun courant n'y circule et le rotor n'est plus soumis à un couple moteur.

Dans ce cours d'électrotechnique théorique nous nous bornerons à un examen qualitatif des notions essentielles caractérisant le principe de fonctionnement d'un moteur asynchrone. Ces problèmes sont examinés plus en détail dans le cours des machines électriques.

APPENDICE A

GRAPHES DIRECTIONNELS (DE TRANSFERT) ET NON DIRECTIONNELS

§ 151. **Introduction.** On àppelle graphe un ensemble des nœuds et des branches qui les réunissent. Chaque graphe est caractérisé par sa topologie, c.-à-d. par l'information qu'il donne sur les branches reliant les uns aux autres les divers nœuds du graphe et sur les transmittances de ces branches.

Cette information peut être fournie soit sous forme analytique, par un système d'équations, soit sous forme graphique par un schéma, sur lequel sont figurés les nœuds, les branches qui les raccordent, et est donnée l'information sur la transmittance de chaque branche.

Dans la théorie des graphes on traite les propriétés topologiques générales des graphes et les méthodes de calcul qui en découlent.

Cette théorie présente un grand intérêt pour les électriciens, les spécialistes de radio-électricité, les personnes travaillant dans le domaine de l'automatique et de la télémécanique, de la cybernétique et de la théorie d'information. Elle est également utilisée dans d'autres branches de la technique, telles, par exemple, que l'analyse de la capacité du transport d'un réseau ferroviaire ramifié et complexe.

Du fait que l'information sur un graphe peut être exprimée de deux manières différentes, la théorie des graphes s'est développée suivant deux voies relativement indépendantes, quoique liées l'une à l'autre et se complétant mutuellement.

Dans la première de ces voies on part de l'information sur le graphe, donnée sous forme d'un système d'équations.

La deuxième voie utilise l'information sur le graphe, exprimée sous forme d'une certaine image géométrique ou, en d'autres termes, sous forme de squelette d'un certain circuit électrique ou de son équivalent, sur lequel sont représentés les nœuds et les branches seulement (et parfois le sens du transmission pour chaque branche).

Dans la première voie les propriétés des graphes sont étudiées à l'aide des propriétés générales des matrices et des déterminants *.

Dans la deuxième voie **, les propriétés des circuits sont étudiées soit en utilisant un certain nombre de règles de transformation de graphes, soit, et ceci est particulièrement important, les règles de Mason.

A son tour, la deuxième voie d'étude de la théorie des graphes s'est développée dans deux directions différentes. La première d'entre elles est la théorie des graphes directionnels (§ 152—156) et la deuxième est la théorie des graphes non directionnels (§ 157—160).

I. GRAPHES DIRECTIONNELS (DE TRANSFERT)

§ 152. **Définitions fondamentales, concernant les graphes directionnels.** On appelle graphe directionnel ou de transfert (graphe d'un signal, diagramme de circulation du signal), l'ensemble des nœuds et des branches qui les relient, les flèches figurant sur ces dernières indiquent le sens de la transmission du signal (de l'action) d'un nœud sur l'autre.

Les nœuds dans les graphes directionnels sont habituellement constitués par les courants et les tensions des circuits électriques étudiés et non pas par les points

---

* Louis P. A. Robichaud, Maurice Boisvert, Jean Robert. « Graphes de fluence. Québec, Canada, Presses de l'Université Laval, 1961.

** Samuel J. Mason and Henry J. Zimmerman. « Electronic circuits, signal and system », N. Y. Willey, 1960; Sundaram Seshu and Myril B. Reed. « Linear graphs and Electrical Networks », N. Y. Willey, 1961.

nodaux de ces circuits, comme ceci a lieu dans les graphes non directionnels (§ 157—160). Chaque branche du graphe est caractérisée par sa transmittance. On appelle ici transmittance de la branche le rapport de la valeur d'entrée à celle de sortie. Ainsi, par exemple, la valeur de sortie x_2 d'une branche (fig. 184, *a*) est égale au produit de la valeur d'entrée (du signal d'entrée) x_1 par la transmittance a:

$$x_2 = ax_1.$$

La transmittance d'une branche peut avoir les dimensions d'une conductance (admittance), d'une résistance ou des dimensions nulles. Dans le cas le plus général plusieurs branches peuvent aboutir à tel ou tel nœud du graphe ou partir de ce dernier, sauf des nœuds d'entrée et de sortie. Sur la fig. 184, *b* nous avons

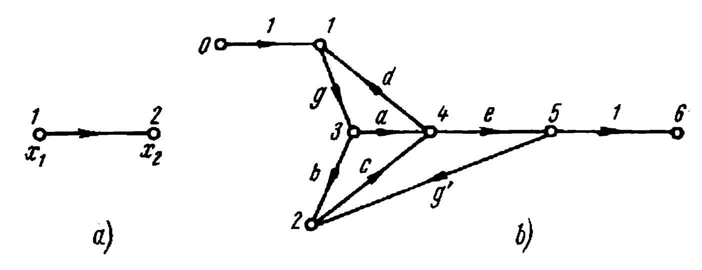


Fig. 184

représenté à titre d'exemple un certain graphe à nœuds *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5* et *6*. Les transmittances des branches de ce graphe sont désignées par les lettres *a*, *b*, *c*... Le sens de la transmittance est indiqué par des flèches.

On entend par x_1 le signal nodal du premier nœud, par x_2 le signal nodal du deuxième nœud, etc.

Le signal nodal du nœud *k* est égal à la somme des signaux arrivant au nœud *k*. Il y a lieu de souligner ici qu'en composant le signal nodal du nœud *k* on *ne tient pas compte des signaux partant de ce nœud*; on en tient compte par contre, en composant les signaux nodaux des nœuds auxquels ces signaux arrivent.

Ainsi, le signal nodal du premier nœud du graphe de la fig. 184, *b*: $x_1 = 1 \cdot x_0 + dx_4$. On a pour le deuxième nœud $x_2 = bx_3 + gx_5$; $x_3 = gx_1$, etc.

Le nœud du graphe exprimant la valeur considérée dans le système étudié comme valeur d'entrée, est représenté à gauche du schéma, et le nœud du graphe correspondant à la valeur de sortie est placé à droite.

Lorsqu'on dessine un graphe il est convenu de le représenter de manière qu'une seule branche parte du nœud d'entrée et qu'il n'existe pas de branches arrivant à ce nœud.

De même une seule branche doit arriver au nœud de sortie et il ne doit pas y avoir de branches qui en partent. Ceci peut toujours être réalisé en introduisant, s'il le faut, des nœuds et des branches complémentaires dans le graphe, les transmittances de ces branches étant égales à *1*. Ainsi, dans le graphe représenté sur la fig. 184, *b*, les nœuds complémentaires sont les nœuds *1* et *5*. Entre le nœud d'entrée *0* et le nœud complémentaire *1* il existe une branche à transmittance *1*. De même le nœud complémentaire *5* est raccordé au nœud d'entrée *6* par une branche à transmittance égale à *1*. On désigne souvent de la même manière les nœuds, la transmittance entre lesquels est égale à *1*. Ainsi, pour le schéma de la fig. 184, *b*, le nœud *0* peut être appelé nœud *1*, et alors il existe sur le schéma deux nœuds désignés par *1*.

§ 153. Passage du système étudié au graphe directionnel. Pour passer du système étudié, d'un circuit électrique, par exemple, au graphe directionnel correspondant, on peut adapter des méthodes différentes, du fait que les équations pour ces circuits peuvent être écrites soit suivant les lois de Kirchhoff, soit en utilisant la méthode des potentiels des nœuds, soit en faisant appel à la méthode des courants fictifs maillés, etc.

Le graphe directionnel contient la même information que le système d'équations dont on est parti. Mais cette information est donnée maintenant sous forme graphique.

Si en construisant le graphe on part des équations écrites directement à partir des lois de Kirchhoff, les nœuds du graphe seront constitués par les courants des branches et les tensions aux bornes des éléments du circuit.

Lorsqu'on part des équations écrites à partir de la méthode des potentiels des nœuds, les nœuds du graphe vont exprimer les potentiels des points nodaux du circuit et les courants (les tensions) cherchés.

Lorsqu'on a acquis une certaine expérience, le graphe peut être tracé, même sans écrire les équations sur lesquelles il repose. Examinons plusieurs exemples de construction de graphes.

E x e m p l e 83. A titre du premier exemple, construisons le graphe pour un cathodyne. Le schéma d'un cathodyne, établi pour de faibles accroissements est représenté sur la fig. 185, *a*. Il comporte une source de F.E.M. $E = \mu U_c$, où

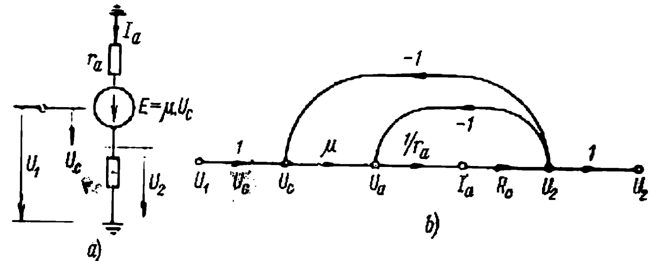


Fig. 185

U_c est l'accroissement de la tension à la grille du tube, μ — gain propre du tube. Désignons par r_a la résistance interne du tube. La tension de sortie U_2 est prélevée des bornes de la résistance cathodique R_c.

La tension d'entrée est désignée par U_1 et l'accroissement du courant anodique par I_a. Pour construire le graphe on part des équations suivantes:

$$U_c = U_1 - U_2;\quad U_a = \mu U_c - U_2;$$

$$I_a = \frac{U_a}{r_a};\quad U_2 = R_c I_a.$$

Le graphe correspondant à ce système d'équations est représenté sur la fig. 185, *b*. Dans ce graphe le nœud à l'extrême droite U_2 est raccordé au nœud qui le précède U_2 par une branche, dont la transmittance est *1*. Ceci a été fait conformément au § 152, afin qu'une seule branche arrive au nœud de sortie.

E x e m p l e 84. A titre de deuxième exemple, construisons deux graphes pour le schéma échelonné de la fig. 186, *a*, en prenant comme grandeur d'entrée la F.E.M. E_1 et comme grandeur de sortie le courant I_5. Le graphe de la fig. 186, *b* est établi à partir des équations des courants fictifs maillés, écrites sous forme opérationnelle

$$I_{11}(Z_0+Z_1) - I_{22}Z_1 = E_1;$$

$$-I_{11}Z_1 + I_{22}(Z_1+Z_2+Z_3) - I_{33}Z_3 = 0;$$

$$-I_{22}Z_3 + I_{33}(Z_3+Z_4+Z_5) = 0.$$

Les transmittances des branches de la fig. 186, *b* sont désignées par les lettres *m*, *n*, *p*, *q* et *r* respectivement où

$$m = \frac{1}{Z_0+Z_1};\quad n = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2+Z_3};$$

$$p = \frac{Z_3}{Z_3+Z_4+Z_5};\quad q = \frac{Z_1}{Z_0+Z_1};$$

$$r = \frac{Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}.$$

Le graphe de la fig. 186, c est formé à partir des équations des potentiels des nœuds :

$$\varphi_a\left(\frac{1}{Z_0}+\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)+\varphi_b\left(-\frac{1}{Z_2}\right)=E_1\cdot\frac{1}{Z_0};$$

$$\varphi_a\left(-\frac{1}{Z_2}\right)+\varphi_b\left(\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4+Z_5}\right)=0;$$

$$I_5=\varphi_b\cdot\frac{1}{Z_4+Z_5}$$

Les désignations utilisées sur la fig. 186, c sont :

$$a=\frac{\frac{1}{Z_0}}{\frac{1}{Z_0}+\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}};\quad b=\frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_0}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_1}};$$

$$c=\frac{1}{Z_4+Z_5};\quad d=\frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4+Z_5}}.$$

Supposons qu'aucun des dénominateurs des expressions m, n, p, q, r et a, b, c, d n'est nul pour les valeurs des paramètres du schéma, se trouvant dans la plage d'utilisation.

L'ordre de disposition des nœuds sur le schéma en général, peut être quelconque (sauf pour les nœuds d'entrée et de sortie dont nous avons déjà parlés). Cependant il est recommandé de disposer tous les nœuds de manière qu'en parcourant le graphe de gauche à droite on rencontre les nœuds autant que possible, dans l'ordre de circulation du signal (de l'information) de l'entrée vers la sortie.

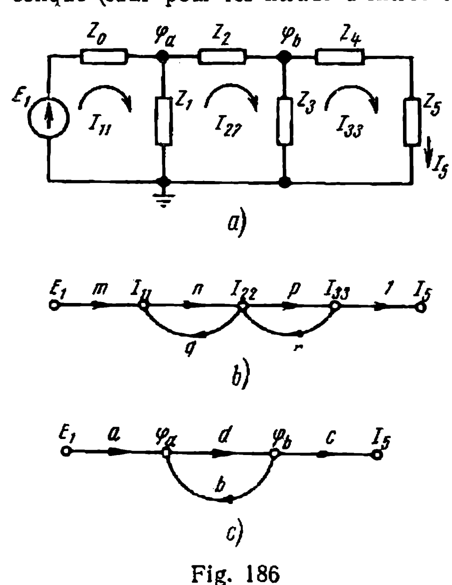


Fig. 186

La structure et la complexité du graphe peuvent être différentes pour un seul et même schéma, en fonction des grandeurs, choisies pour servir de nœuds. Notons que s'il existe plusieurs sources de signaux (plusieurs sources de courant ou de F.E.M.) dans un circuit, on doit utiliser le principe de superposition ; pour cela on commence par déterminer la valeur de sortie d'un graphe dans lequel le signal est dû à la première source et on calcule ensuite la valeur de sortie pour le graphe parcouru par un signal provenant de la deuxième source, etc. Ensuite, on additionne les expressions, obtenues pour les valeurs de sortie ainsi trouvées.

Après que le graphe a été construit, on l'utilise pour calculer la transmittance du signal entre la source et la sortie. La transmittance du graphe peut être calculée par les deux méthodes suivantes :

1. par sa simplification successive à l'aide des règles exposées au § 154 ;
2. en utilisant l'expression générale pour le calcul de la transmittance d'un graphe directionnel (la règle de Mason), voir § 156. On peut également utiliser

une voie intermédiaire, dans laquelle on commence par simplifier partiellement le graphe et on applique la règle de Mason ensuite.

§ 154. **Règles utilisées pour simplifier les graphes directionnels.** Exposons les opérations de simplification des graphes.

1. La transmittance des branches couplées en série (fig. 187, *a*) est égale au produit des transmittances de ses branches (fig. 187, *b*). En effet $x_2 = ax_1$;

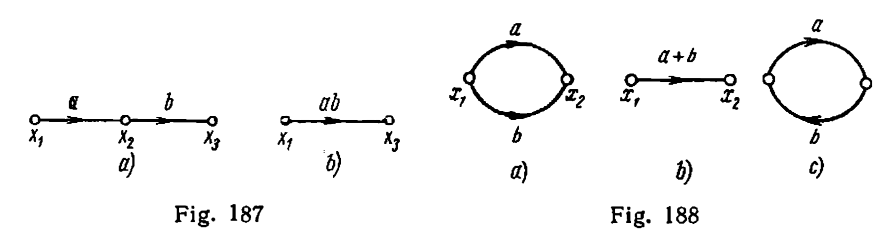


Fig. 187 Fig. 188

$x_3 = bx_2$. Substituons à x_2 dans cette dernière expression son équivalent, tiré de l'expression précédente. Nous obtenons ainsi $x_3 = abx_1$.

2. La transmittance de deux branches couplées en parallèle et dirigées identiquement est égale à la somme des transmittances de ces branches (fig. 188, *a*, *b*).

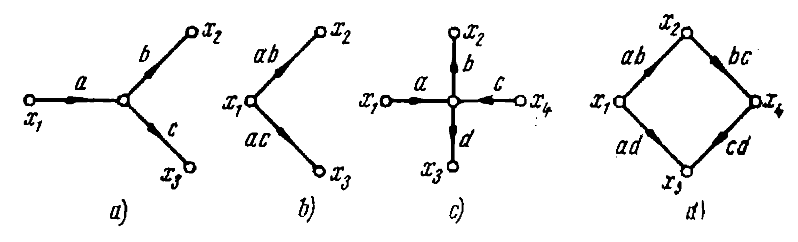


Fig. 189

Cette dernière transformation ne peut être appliquée aux branches, couplées en parallèles mais dont les flèches ne sont pas dirigées dans le même sens. Ainsi, cette transformation n'est pas applicable à la fig. 188, *c*.

3. Elimination d'un point nodal simple.

On appelle, par convention, point nodal simple d'un graphe, le point auquel arrive et dont partent dans le cas le plus général, plusieurs branches, mais qui ne fait pas partie d'une boucle de réaction. Les points nodaux simples de la fig. 189, *a* et *c* sont respectivement les points 4 et 5. On a pour le graphe de la fig. 189, *a*

$$x_4 = ax_1;\ x_2 = bx_4;\ x_3 = cx_4.$$

Par conséquent,

$$x_2 = abx_1;\ x_3 = acx_1. \tag{A.1}$$

Le graphe de la fig. 190, *b* est équivalent au graphe de la fig. 189, *a*. On a pour le graphe de la fig. 189, *c*

$$x_5 = ax_1 + cx_4;$$
$$x_2 = bx_5 = abx_1 + bcx_4;$$
$$x_3 = dx_5 = a\,dx_1 + dcx_4.$$

Le graphe de la fig. 189, *d* est équivalent au graphe de la fig. 189, *c*.

4. Elimination d'une maille, se trouvant sur le chemin de parcours.

Le graphe de la fig. 190, *a* comprend une branche à réaction à transmittance *c* entre les nœuds *3* et *2*. Appelons la maille fermée constituée par les branches *b* et *c*, maille trouvant sur le chemin de parcours ou maille de parcours. A l'aide de

transformations simples, cette maille peut être éliminée et le graphe réduit à celui de la fig. 190, *b*. Nous avons pour le graphe de la fig. 190, *a*:

$$x_2 = ax_1 + cx_3; \quad x_3 = bx_2.$$

Par conséquent,

$$x_3 = abx_1 + bcx_3. \tag{A.2}$$

La branche, partant d'un certain nœud et se terminant au même nœud est appelée *boucle*.

La boucle bc, de la fig. 190, *b* correspond au terme bcx_3 du second membre de l'égalité (A.2).

5. Elimination d'une boucle.

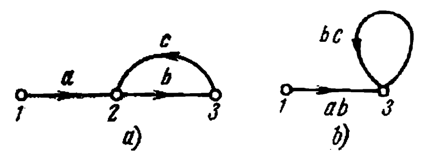


Fig. 190

Le graphe de la fig. 191, *a* comprend une boucle à transmittance *c*. Cette boucle peut être éliminée et le graphe réduit à celui représenté sur la fig. 191, *b*. En effet, on peut écrire pour le graphe de la fig. 191, *a*

$$x_2 = ax_1 + cx_2 \text{ et } x_3 = bx_2.$$

Trouvons à partir de la première équation $x_2 = \frac{ax_1}{1-e}$ et substituons cette expression dans la deuxième. Nous avons alors

$$x_3 = \frac{ab}{1-c} x_1. \tag{A.3}$$

On suppose que $|c| < 1$.

6. Remplacement de deux boucles et plus par une seule. Les boucles de la fig. 192, *a* à transmittances *b* et *c* peuvent être remplacées par une seule boucle

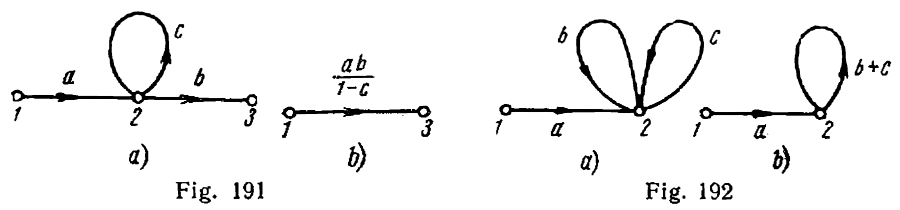


Fig. 191 Fig. 192

de la fig. 192, *b* à transmittance $b + c$. Ceci découle des transformations suivantes effectuées pour le schéma de la fig. 192, *a*:

$$x_2 = ax_1 + bx_2 + cx_2 = ax_1 + (b + c)\, x_2.$$

Le schéma de la fig. 192, *b* satisfait à cette ligne.

7. Allongement (extension) d'un nœud.

Dans certains cas il est utile dans les transformations des graphes d'allonger (d'étendre) un nœud. Supposons qu'on désire allonger le nœud *2* du graphe représenté sur la fig. 193, *a*. A cette fin:

a) subdivisons le nœud *2* en deux nœuds (fig. 193, *b*) dont le premier est le nœud déjà existant *2*, d'où *partent* les mêmes branches que dans le graphe initial, et le second est le nouveau nœud *2'*, auquel aboutissent les mêmes branches, qui arrivaient déjà au nœud *2* dans le graphe initial;

b) raccordons par une branche à transmittance 1 les nœuds $2'$ et 2.

Assurons-nous que cette transformation est correcte. A cette fin écrivons pour le graphe initial de la fig. 193, *a* le signal nodal au nœud *2*.

$$x_2 = ax_1 + cx_4.$$

Les signaux nodaux des nœuds $2'$ et 2 du graphe de la fig. 193, *b* sont:

$$x_2' = ax_1 + cx_4 \text{ et } x_2 = 1 \cdot x_2'.$$

Ainsi le signal nodal au nœud *2* n'a pas changé. Les signaux nodaux aux autres nœuds du graphe n'ont pas varié non plus.

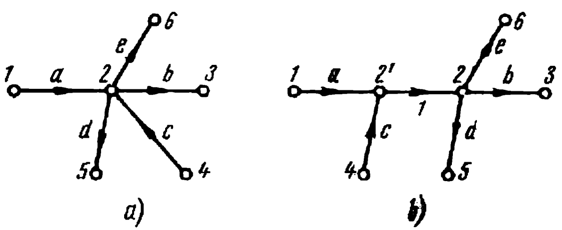


Fig. 193

8. Inversion du parcours.

Nous avons déjà signalé que l'information, contenue dans un graphe est équivalente à l'information donnée par un certain système d'équation. Supposons que nous ayons l'équation

$$x_3 = c(ax_1 + bx_2). \qquad \text{(A.3')}$$

Le graphe de la fig. 194, *a* correspond à cette équation. Dans ce graphe x_1 et x_2 sont les causes et x_3 est leur effet. On peut inverser la cause et l'effet en résolvant l'équation (A.3') par rapport à x_1 ou x_2. Ainsi, si on considère x_3 et x_2 comme cause et x_1 comme effet, on obtient

$$x_1 = \frac{1}{ac} x_3 + \left(-\frac{b}{a}\right) x_2.$$

Le graphe de la fig. 194, *b* correspond à cette dernière équation; on a réalisé dans ce graphe l'inversion du parcours par rapport au graphe initial de la fig. 194, *a*.

Pour passer du graphe initial au graphe inversé, il faut: a) inverser le sens des flèches des branches; b) inverser les transmittances des branches, se trouvant sur le parcours entre la nouvelle cause et le nouvel effet $\left(\text{c.-à-d. au lieu de } a \text{ et } c \text{ prendre respectivement } \frac{1}{a} \text{ et } \frac{1}{c}\right)$; c) transporter l'extrémité de la branche 24 à transmittance *b*, raccordant les nœuds ne jouant pas le rôle ni de cause ni d'effet, au nœud de sortie (au point 1) et considérer la transmittance de cette branche, comme égale à $-\frac{b}{a}$.

2 b 1 a 4 c 3

a)

$-\frac{b}{a}$ 2 1 4 3 1/a 1/c

b)

Fig. 194

Examinons un exemple, montrant l'utilité de l'inversion du parcours. Supposons qu'on doit trouver la transmittance d'un amplificateur à trois étages, dont le graphe est représenté sur la fig. 195, *a*. L'amplificateur comporte quatre boucles de réaction (*bf*, *cg*, *dh*, *bcde*). Le graphe inversé est représenté sur la fig. 195, *b*. Il n'y existe plus de boucles de réaction et la transmittance inverse pour ce graphe

est plus facile à trouver que pour le graphe initial

$$x_1=\frac{1}{e}\left[\left(\frac{1}{cd}-\frac{h}{c}\right)\left(\frac{1}{ab}-\frac{f}{a}\right)-\frac{g}{abd}-\frac{b}{a}\right]\cdot x_6.$$

Remarquons que l'extrémité de la branche g est transportée du nœud *3* au nœud *1* en passant par le nœud *4* et que le commencement de cette branche est transporté du nœud *4* au nœud *5*. Par conséquent, on trouve au dénominateur de la transmittance de la branche inversée — g/abd—le produit des transmittances des trois branches, à travers lesquelles on a transporté le commencement et la fin de la branche considérée.

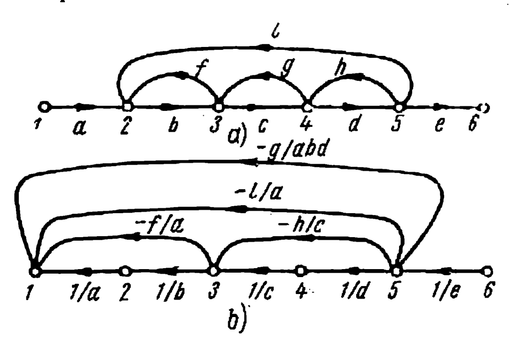


Fig. 195

9. Normalisation des graphes. La normalisation des graphes est une méthode de modification des transmittances des diverses branches d'un graphe, dans laquelle on considère que pour une partie des branches les transmittances sont égales à 1 (on les normalise) et que pour les autres branches on dirige les transmittances de manière, que pour un parcours quelconque allant de la source vers la sortie et pour une boucle de réaction quelconque, les transmittances résultantes ne varient pas. (Nous avons supposé, que pour l'un quelconque de ces parcours aucun nœud du graphe n'ait été parcouru deux fois). La normalisation est illustrée sur la fig. 196. La fig. 196, *a* représente le graphe d'un amplificateur à deux étages avant sa normalisation et la fig. 196, *b* représente le même graphe après normalisation.

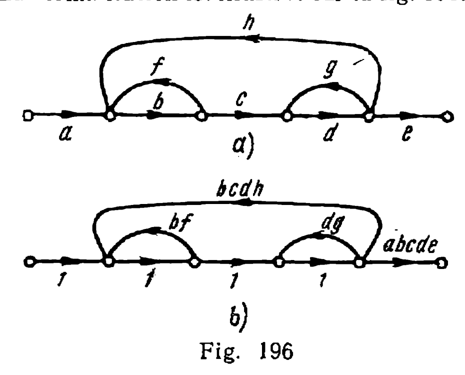


Fig. 196

Nous examinons plus loin deux exemples (fig. 197 et fig. 198) de calcul des transmittances des graphes par la méthode de simplifications successives. Dans chacun de ces exemples on a utilisé plusieurs fois les règles des points 5 et 7.

§ 155. Expression générale pour la transmittance d'un graphe. Mason a proposé une expression générale pour le calcul de la transmittance d'un graphe. C'est l'expression fondamentale de calcul des graphes. Avant de l'examiner introduisons plusieurs notions nouvelles.

Le parcours direct P est le parcours suivant les flèches de la source vers la sortie, le long duquel aucun nœud n'est parcouru plus d'une fois. La transmittance d'un parcours direct est égale au produit des transmittances des branches de ce parcours.

Il peut exister plusieurs parcours directs entre la source et la sortie d'un graphe. Ainsi, pour le schéma de la fig. 199, il existe deux parcours directs entre la source (nœud *1*) et la sortie (nœud *2*). Le premier parcours direct emprunte les branches à transmittances a et b. La transmittance de ce parcours $P_1 = ab$. Le deuxième parcours direct suit les branches à transmittances c, e, b. Sa transmittance est $P_2 = ceb$.

Aucun autre parcours entre le nœud *1* et le nœud *2* qu'on pourrait imaginer dans ce graphe, ne pourra appartenir à la catégorie des parcours directs. Ainsi, le parcours empruntant les branches c, f, g, e, b n'est pas un parcours direct,

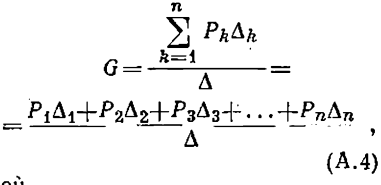
puisque on y rencontre deux fois le nœud 3. Dans l'expression générale examinée dans le paragraphe présent, il faut tenir compte également des transmittances des boucles de réaction.

Une boucle de réaction est un parcours fermé le long duquel chaque nœud ne peut être rencontré qu'une fois.

La transmittance d'une boucle de réaction, désignée par T, est pourvue d'un indice approprié, permettant de la distinguer des transmittances des autres boucles. La transmittance d'une boucle de réaction est égale au produit des transmittances des branches, constituant cette boucle.

Il existe dans le graphe de la fig. 199 trois boucles de réaction. Une première boucle à transmittance $T_1 = h$, une deuxième à transmittance $T_2 = fg$ et une troisième à transmittance $T_3 = ed$.

L'expression générale pour le calcul de la transmittance d'un graphe s'écrit de la manière suivante



$$G = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + \ldots + P_n\Delta_n}{\Delta}, \tag{A.4}$$

où

P_k — transmittance du parcours direct k de la source vers la sortie;

n — nombre des parcours directs

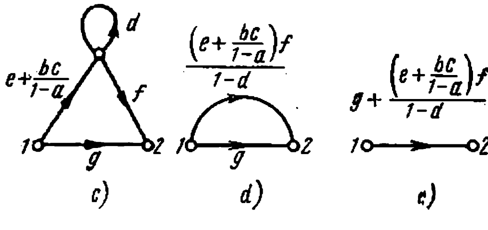


Fig. 197

$$\Delta = 1 - \sum M_{m1} + \sum M_{m2} - \sum M_{m3} + \ldots \tag{A.5}$$

M_{mr} — produit des transmittances de la combinaison possible m^e des transmittances de r boucles de réaction, ne se touchant pas;

Δ_k — valeur du Δ pour la partie du graphe, qui ne touche pas le parcours direct k^e.

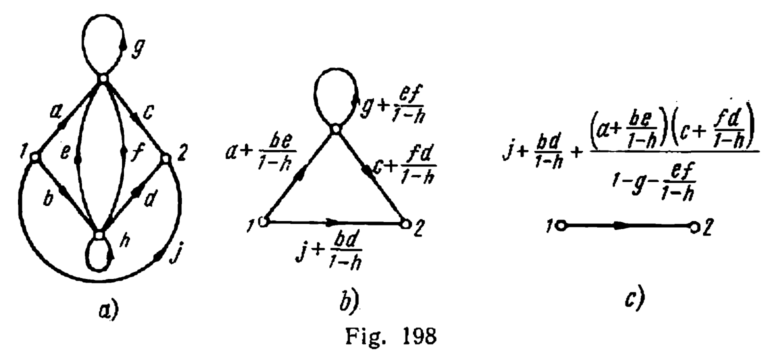


Fig. 198

Exemple 85. Appliquons à titre d'exemple l'expression (A.4) au graphe représenté sur la fig. 199. Pour le premier parcours direct à transmittance $P_1 = ab$ le facteur Δ_1 est égal à 1 moins la somme des transmittances des boucles de réaction, prises une à une et ne touchant pas ce parcours direct ($T_1 + T_2$), plus le produit deux par deux des transmittances des boucles à réaction, ne touchant pas l'une à l'autre, ni au parcours direct choisi. Il n'existe pas dans le graphe de la

fig. 199 des boucles qui ne se touchent pas réciproquement et qui en même temps ne touchent pas le premier parcours direct. Par conséquent, le terme à produit deux par deux des transmittances des boucles de réaction, prises trois par trois (ou plus) ne figure pas dans l'expression du Δ_1.

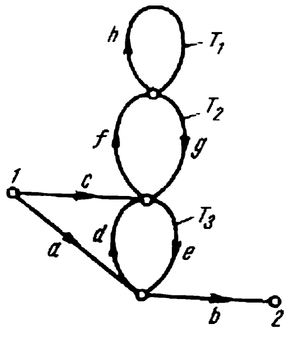


Fig. 199

$$\Delta_1 = 1 - (T_1 + T_2) \quad (T_1 = h;\ T_2 = fg).$$

Pour le deuxième parcours direct

$$P_2 = ceb, \quad \Delta_2 = 1 - T_1.$$

Le dénominateur

$$\Delta = 1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3 \quad (T_3 = ed).$$

Le produit des transmittances T_1 et T_3 de deux boucles du graphe, ne touchant pas l'une à l'autre, figure dans l'expression de Δ.

Ainsi

$$G = \frac{ab(1 - T_1 - T_2) + ceb(1 - T_1)}{1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3}.$$

§ 156. Etablissement de l'expression pour calculer les transmittances d'un graphe *.

Supposons que le graphe examiné comporte à n nœuds. Pour un nœud quelconque (k^e) l'équation suivante doit être satisfaite

$$x_k = f_k(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) \tag{A.6}$$

x_k — variable du graphe linéaire ou, autrement dit, la variable indépendante.

Désignons par t_{jk} les transmittances de la branche raccordant d'une manière arbitraire les nœuds choisis j et k. La matrice des transmittances des branches du graphe est de l'ordre n et doit être écrite de la manière suivante

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & \ldots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & \ldots & t_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

Les éléments de la matrice sont les dérivées

$$t_{jk} = \frac{df_k}{dx_y}. \tag{A.8}$$

Tous les éléments de la ligne k sont nuls, si x_k — variable indépendante.

Désignons par $[X]$ la matrice-colonne établie à partir des variables

$$x_1, x_2, \ldots x_n:$$

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

* On peut omettre le § 156 en première lecture.

Appelons $[U]$ la matrice unitaire d'ordre n

$$[U]=\begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1\ 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ 0 \ldots\ldots 1 \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

Désignons par $\varphi_k = x_k - f_k$ la matrice-colonne des variables indépendantes. Le système d'équation exprimé par ce-graphe s'écrit:

$$[U-T]\,[X]=[\varphi], \quad (A.11)$$

où

$$[U-T]=\begin{vmatrix} 1-t_{11} & -t_{21} \ldots & -t_{n1} \\ -t_{12} & 1-t_{22} \ldots & -t_{n2} \\ -t_{13} & -t_{23} \ldots & -t_{n3} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -t_{1n} & -t_{2n} \ldots & 1-t_{nn} \end{vmatrix} \quad (A.12)$$

Introduisons également un système d'équations, dont la matrice est $[A] = [U-T]$.

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix} \quad (A.13)$$

Il a été indiqué dans l'algèbre linéaire que le déterminant Δ de la matrice $[A]$ peut être écrit de la manière suivante:

$$\Delta=\sum(-1)^{I+I'}(a_{\alpha\alpha'},\ a_{\beta\beta'},\ a_{\gamma\gamma'} \ldots a_{nn'}). \quad (A.14)$$

Chaque terme de cette somme contient n facteurs. Chaque facteur est pourvu de deux indices. Le premier indice correspond à la ligne et le deuxième à la colonne.

I — nombre d'inversions des nombres 1, 2 . . . n, dans l'ordre de désignations α, β, γ . . . n pour le premier indice.

I' — nombre d'inversions des nombres 1, 2 . . . n, dans l'ordre α', β', γ' . . . n' pour le deuxième indice.

Précisons ce qu'on entend par inversion des indices. On dit qu'on a une inversion des indices rs donnés dans cet ordre si $r > s$. Lorsqu'on calcule le nombre total des inversions de l'indice considéré (du premier, par exemple) il faut additionner toutes les inversions, qui se forment lors du passage du chiffre initial de cet indice à tous les chiffres suivants. Ainsi, considérons la suite 4 6 1 3 5 2. Puisque après le chiffre 4 dans cette suite, on trouve les chiffres 1, 2, 3, inférieurs à 4, on obtient trois inversions. Après le chiffre 6 on trouve quatre chiffres 1, 3, 5, 2, inférieurs à 6, ce qui donne encore quatre inversions. Tous les chiffres se trouvant à droite de 1 sont supérieurs à 1 et, par conséquent, il n'y a pas d'inversions par rapport à l'indice 1. Le chiffre 3 se trouve après le chiffre 2, on a donc encore une inversion. Le chiffre 5 se trouve après 2 — encore une inversion par conséquent. Il s'ensuit que dans la suite 4 6 1 3 5 2 il existe $3+4+1+1=9$ inversions.

Rappelons également ce qu'on appelle suite fermée de deux indices. C'est une suite d'indices, dans laquelle le deuxième indice du dernier terme a la même valeur que le premier indice du premier terme.

Ecrivons toutes les combinaisons possibles d'alternances des indices, constituant des suites fermées

$$ij,\ jk,\ kl,\ lx,\ \ldots\ yp,\ pi\,; \qquad \text{(A.15)}$$

$$ij,\ ji\,;\ \ldots\ nm,\ mp,\ pn\,;\ \ldots\ qu,\ up. \qquad \text{(A.16)}$$

Dans la combinaison (A.15) la suite fermée est constituée par n facteurs. Le premier indice de cette suite a commencé à varier à partir de la valeur i et le deuxième à partir de la valeur j.

Cette suite est fermée car le deuxième indice du dernier terme a la valeur i, à partir de laquelle a commencé à varier l'indice du premier terme.

Comme nous l'avons déjà indiqué, I est le nombre d'inversions du premier indice, et I' est le nombre d'inversions du deuxième indice.

Pour la suite (A. 15) le nombre d'inversions du deuxième indice est plus grand de $(n - 1)$ que le nombre d'inversions du premier indice. En effet, le premier indice n'a pas d'inversions dans (A. 15), tandis que dans le deuxième indice il y a $(n - 1)$ inversions, puisque les indices des rangs supérieurs j, k, l, x... p (leur nombre total étant égal à $n - 1$) sont tous placés avant l'indice du rang inférieur i.

Par conséquent $I' - I = n - 1$.

Les facteurs dans la suite (A. 16) sont répartis en k groupes. Le premier groupe comprend $d_1 = 2$ facteurs. Le deuxième est constitué de $d_2 = 3$ facteurs. Le k^e et dernier groupe est à $k + 1$ facteurs. Le nombre de tous les facteurs (A. 16) est égal à l'ordre du déterminant, c.-à-d. à n. Par conséquent, $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_k = n$. L'expression $I' - I = d - 1$ est satisfaite pour chacun de ces groupes de facteurs. Trouvons la différence entre I' et I pour l'ensemble de la suite (A.16), comprenant k groupes:

$$I' = I = d_1 - 1 + d_2 - 1 + d_3 - 1 + \ldots + d_k - 1 = (d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_k) - k = n - k.$$

ou

$$I' = I + n - k. \qquad \text{(A.17)}$$

Un produit du type (A. 16) peut avoir des facteurs ayant deux indices identiques, comme, par exemple mm. Chacun de ces facteurs peut être considéré comme un groupe, à terme unique. Pour un tel groupe $d = 1$ et $I' = I = 0$. Autrement dit, pour ce groupe la condition $I' - I = d - 1$, de même que pour tout autre groupe de la suite (A. 16), est satisfaite.

Pour déterminer le signe de chaque terme dans (A. 14) il ne faut pas oublier que quel que soit le nombre k, $2k$ inversions n'influent pas sur le signe, puisque $(-1)^{2k} = 1$. Par conséquent, on peut ajouter $2k$ au second membre de (A. 17). On aura alors

$$I' = I + n + k. \qquad \text{(A.17')}$$

Etendons le résultat ainsi obtenu au déterminant de la matrice (A. 12). En développant ce déterminant, nous trouvons des produits des facteurs de deux types. Le premier type de facteurs est $1^n = 1$. Le deuxième type est le produit de n facteurs négatifs de la forme $(-t_{ij})$. Ainsi, pour la matrice (A. 12) le signe de chaque terme du déterminant dépend du signe du produit $(-1)^{I+I'} \cdot (-1)^n$. Autrement dit, le signe de chaque terme du deuxième type est déterminé par $I + I' + n$. Mais en tenant compte de (A. 17')

$$(-1)^{I+I'+n} = (-1)^{I+I+n+k+n} = (-1)^{2(I+n)+k} = (-1)^k. \qquad \text{(A.18)}$$

Par conséquent, le signe de chaque terme du deuxième type dépend du nombre k des groupes des suites fermées que ce terme comprend.

Les facteurs du deuxième type peuvent être de plusieurs espèces différentes. La première d'entre elles comprend les suites fermées du type (A. 16). Dans chacune de ces suites il n'existe qu'une seule alternance des indices ($k = 1$). Par conséquent, il faut placer devant chaque terme de cette espèce le signe —, conformément à l'expression (A. 18). La deuxième espèce comprend les produits des facteurs à deux suites fermées des indices ($k = 2$). Devant chaque terme de cette espèce il faut placer le signe +, puisque $(-1)^2 = 1$. La troisième espèce comprend les produits des facteurs à trois ($k = 3$) suites fermées, des indices, etc.

$$\Delta = 1 - \sum M_1 + \sum M_2 - \sum M_3 + \ldots .$$

Supposons que le signal de sortie soit le signal x_2 de sortie du deuxième nœud et que le signal d'entrée soit celui x_1 du premier nœud. Les actions exercées sur tous les autres nœuds sont nulles.

Pour trouver x_2 il faut écrire

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}. \tag{A.19}$$

Décomposons le numérateur de (A.19) en termes. Chacun de ces termes aura, après regroupement des facteurs, la forme suivante

$$x_1 t_{1k} t_{kj} t_{j2} \dots t_{rr} \dots t_{ps} t_{sq} t_{qp}$$

et, par conséquent, peut être écrit comme suit: $x_1 P_k \Delta_k$.

Ici x_1 — signal d'entrée,

P_k — un produit de facteurs dont les indices sont tels que le premier indice du premier facteur est 1 et le deuxième indice du dernier facteur est 2.

Par conséquent, P_k est la transmittance du parcours direct du nœud *1* au nœud *2*. Les Δ_k sont les facteurs dont les indices ne comprennent pas les chiffres 1 et 2 (les indices des nœuds d'entrée et de sortie), ainsi que tous les chiffres qui sont utilisés dans les indices des facteurs P_k.

Après avoir été regroupés, les facteurs Δ_k constituent des suites fermées, dont le premier indice du premier facteur et le deuxième indice du dernier facteur sont les mêmes.

Autrement dit tous les Δ_k représentent les transmittances des boucles fermées, ne touchant pas au parcours direct P_k entre les nœuds d'entrée et de sortie.

Nous aurons en définitive

$$x_2 = x_1 \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}. \tag{A.20}$$

L'expression (A.20) est souvent appelée dans les ouvrages spécialisés loi topologique de la transmittance.

II. GRAPHES NON DIRECTIONNELS

§ 157. Définitions et formule fondamentale.

Un graphe non directionnel est l'image topologique du circuit électrique lui-même. Les nœuds et les branches de ce graphe correspondent aux nœuds et aux branches du circuit électrique initial. Dans les graphes non directionnels, contrairement à ce qui a lieu dans les graphes directionnels, on ne fait pas figurer de flèches au-dessus des branches. Les propriétés des branches sont caractérisées par leur conductance. Les transmittances des branches, ayant les dimensions des conductances, seront désignées par la suite par les lettres *a*, *b*, *c*... Du fait qu'un certain circuit dual correspond à chaque circuit électrique considéré, un graphe dual peut correspondre à chaque graphe non directionnel.

L'expression (A.21) est l'expression fondamentale pour l'utilisation des graphes non directionnels. Par sa structure son second membre est tout à fait analogue à l'expression de Mason (A.4) pour les graphes directionnels

$$\frac{I}{B_{mn}} = \frac{1}{\Delta} \sum C_r \Delta_r. \tag{A.21}$$

B_{mn} — tension (ou courant) de la source d'alimentation du circuit, dont les bornes sont raccordées aux nœuds *m* et *n*;

C_r — produit des conductances des branches du parcours C_r, entre le nœud *m* et *n*, passant par la branche choisie

Δ_r — déterminant du système obtenu à partir du système initial lors qu'on court-circuite les branches du parcours C_r choisi.

Cette expression est utilisée pour calculer la résistance d'entrée (la conductance d'entrée), de la conductance mutuelle des branches ainsi qu'à d'autres fins encore *.

Dans cette expression on entend par I le courant circulant dans une certaine branche choisie du graphe; c'est par rapport à cette branche qu'on calcule la conductance d'entrée ou mutuelle.

Le nombre des termes $C_r\Delta_r$ dans le dénominateur de l'expression (A.21) est égal au nombre des parcours possibles entre les nœuds m et n du graphe. On ne comprend pas dans le nombre de ces parcours le parcours de m à n, passant par la source d'alimentation du circuit. Δ est le déterminant du circuit électrique initial. Ce déterminant aurait pu être obtenu comme déterminant de la matrice des conductances des branches d'un circuit, établi, par exemple, conformément à la méthode des potentiels dês nœuds.

Cependant cette méthode de calcul de Δ n'est pas utilisée en général, comme étant très compliquée et fastidieuse. En effet, en calculant Δ par développement du déterminant d'une matrice, on a affaire à un grand nombre de termes, dont une partie a les même valeurs absolues, avec des signes différents. (Ces termes correspondent aux restes de chaque ligne du déterminant.)

Afin d'éviter un travail inutile, on emploie d'autres méthodes perfectionnées (simplifiées) de calcul de Δ. La première d'entre elles est basée sur la décomposition du déterminant Δ suivant un certain nœud arbitraire du circuit. La deuxième repose sur la décomposition du déterminant suivant les parcours entre deux nœuds arbitraires.

§ 158. Développement du déterminant suivant un nœud. Supposons que n branches à conductances respectives a_1, a_2, a_3 ... a_n arrivent à un certain nœud S.

Le déterminant Δ est développé suivant ce nœud à l'aide de l'expression:

$$\Delta=\sum a_i\Delta_i+\sum a_ia_j\Delta_{ij}+\sum a_ia_ja_k\Delta_{ijk}+\ldots+a_ia_ja_k\ \ldots\ a_n\cdot 1. \quad \text{(A.22)}$$

Ici

$$\sum a_i\Delta_i=a_1\Delta_1+a_2\Delta_2+a_3\Delta_3+\ldots+a_n\Delta_n.$$

Δ_k — déterminant obtenu à partir du déterminant du circuit initial, en court-circuitant la branche a_k et en éliminant toutes les autres branches, aboutissant au nœud S (c.-à-d. lorsque toutes les autres branches de ce nœud fonctionnent à vide)

$$\sum a_ia_j\Delta_{ij}=a_1a_2\Delta_{12}+a_1a_3\Delta_{13}+a_2a_3\Delta_{23}+\ldots$$

Δ_{kr} — déterminant obtenu à partir du déterminant du système initial lorsque les branches a_k et a_r sont court-circuitées simultanément et lorsque toutes les autres branches arrivant au nœud S sont éliminées du circuit (fonctionnent à vide)

$$\sum a_ia_ja_k\Delta_{ijk}=a_1a_2a_3\Delta_{123}+a_1a_2a_4\Delta_{124}+\ldots$$

Δ_{ijk} — déterminant obtenu à partir du déterminant du circuit initial, lorsqu'on court-circuite simultanément les branches i, j, k et lorsqu'on l'élimine du circuit (on fait fonctionner à vide) toutes les autres branches arrivant au nœud S, suivant lequel on effectue le développement. Le facteur I_y du dernier terme du second membre de l'expression (A.22) est le déterminant du circuit, lorsque toutes les branches arrivant au nœud S sont en court-circuit. Dans ce cas le circuit se ramène à un seul point (à un seul nœud S).

§ 159. Développement du déterminant suivant les parcours entre deux nœuds choisis arbitrairement.

Il faut choisir pour cela des nœuds, pour lesquels la symétrie géométrique du circuit est maximale. On simplifie ainsi les calculs. Le développement du déterminant Δ dans cette méthode se fait à l'aide de l'expression suivante:

$$\Delta=\sum P_k\Delta_k. \quad \text{(A.23)}$$

* Le produit $C_r\Delta_r$, figurant sous le signe de sommation dans l'expression (A.21), est souvent désigné autrement, par exemple par $Pk\Delta k$ (voir expression A.20), ou par $Pk'\Delta\acute{k}$. Si on désigne ce produit par $P_{k'}\Delta_{\acute{k}}$, les termes du déterminant du dénominateur de l'expression (A.21), c.-à-d. les termes de Δ, sont désignés par $P_k\Delta_k$.

Ici P_k — produit des conductances du parcours k entre les nœuds choisis;
Δ_k — mineur du parcours k, calculé pour un circuit obtenu à partir du circuit initial en court-circuitant les branches utilisées dans le parcours k.

Illustrons les deux modes de développement à l'aide d'un exemple concret.

Exemple 86. Calculons le déterminant Δ par les deux méthodes pour le même schéma en pont croisé de la fig. 200, a. Calculons d'abord Δ en effectuant

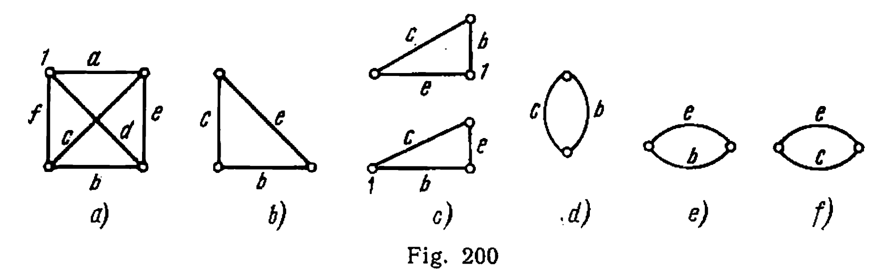


Fig. 200

un développement suivant le nœud 1. Trois branches a, d, f au lieu de a_1, a_2 et a_3 figurant dans l'expression (A.22) arrivent à ce nœud et, par conséquent,

$$\Delta = a\Delta_a + d\Delta_d + f\Delta_f + af\Delta_{af} + ad\Delta_{ad} + df\Delta_{df} + adf \cdot 1.$$

Trouvons Δ_a pour le sous-graphe de la fig. 200, b. Ce sous-graphe est obtenu à partir du graphe de la fig. 200, a en court-circuitant la branche a et en coupant

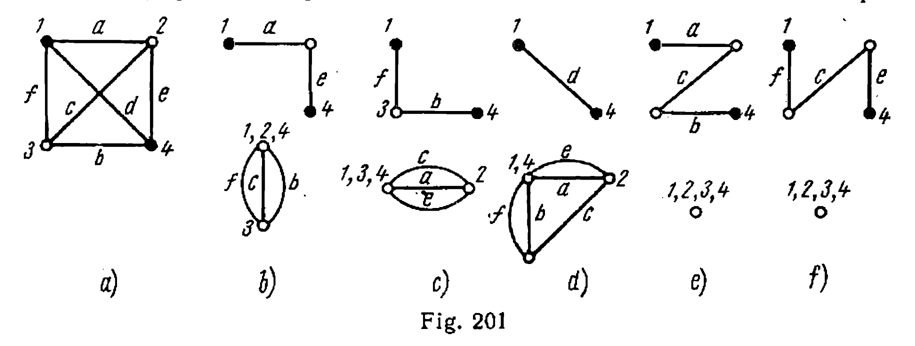


Fig. 201

les branches d et f. $\Delta_a = ce + cb + eb$ (produit deux par deux des conductances des branches — voir § 161). Pour calculer Δ_d on utilise la fig. 200, c et pour calculer Δ_f — la fig. 200, d.

$$\Delta_d = \Delta_f = \Delta_a.$$

Conformément aux fig. 200, g, e, f: $\Delta_{ad} = b + c$; $\Delta_{af} = b + e$; $\Delta_{df} = c + e$. Ainsi

$$\Delta = (a+d+f)(ce+cb+be) + ad(b+c) + af(b+e) + df(c+e) + adf. \quad \text{(a)}$$

Trouvons maintenant Δ pour le schéma de la fig. 201, a, en effectuant le développement suivant les parcours entre les nœuds 1 et 4 (points, figurés en noir sur la fig. 201, a). Sur les fig. 201, b, c, d, e et f on voit cinq parcours possibles entre les nœuds 1 et 4 et les sous-schémas (les sous-graphes) correspondants, à utiliser pour le calcul du Δ_k.

Pour le premier parcours, suivant les branches a et e, P_1 est égal au produit des conductances des branches de ce parcours $P_1 = ae$. Lorsqu'on court-circuite les branches a et e, le sous-graphe représente le couplage en parallèle des branches

f, c, b. Par conséquent $\Delta_1 = f + c + b$. Le deuxième parcours (fig. 201, c) est celui empruntant les branches f, b:

$$P_2 = fb\ ;\quad \Delta_2 = a + e + c.$$

Le troisième parcours suit la branche b (fig. 201, d):

$$P_3 = d\ ;\ \Delta_3 = (a+e)\,c + (a+e)\,(f+b) + c\,(f+b).$$

Le quatrième parcours emprunte les branches a, c, b (fig. 201, e): $P_4 = acb$; $\Delta_4 = 1$ (puisque lorsqu'on court-circuite les branches a, c, b, le graphe se réduit à un point). Le cinquième parcours emprunte les branches f, c, e (fig. 201, f)

$$P_5 = fce\ ;\quad \Delta_5 = 1.$$

Ainsi

$$\Delta = \sum P_k\Delta_k = ae\,(f+c+b) + fb\,(a+e+c) + \\ + d\,[(a+e)\,c + (a+e)\,(f+b) + (f+b)\,c] + acb + fce.$$

Ce résultat coïncide avec le résultat du calcul de Δ par d'autres méthodes.

§ 160. Utilisation de la formule fondamentale. Revenons à la formule (A.21). Comme nous avons déjà indiqué au § 157, cette formule est utilisée pour calculer les conductances d'entrée et mutuelle, pour déterminer les transmittances en courant, les transmittances en tension, ainsi qu'à d'autres fins.

Examinons maintenant la manière dont il faut l'utiliser. Commençons par désigner par m et n les nœuds du graphe auxquels est raccordée la branche comprenant la source d'alimentation du circuit. Supposons par la suite que la source d'alimentation soit une source de F.E.M., ou une source de courant, puisqu'on peut ramener à ces deux sources n'importe quelle source d'alimentation réelle. Supposons en outre que la source d'alimentation soit unique. Si, par contre, il existe plusieurs sources d'alimentation, il faudra faire appel au principe de superposition et calculer successivement la valeur cherchée comme si elle était due à chacune des sources séparément, en tenant compte dans les calculs des résistances internes de ces sources.

Le rôle de B_{mn} dans l'expression (A.21) est joué soit par la tension de la source d'alimentation, si on utilise comme source d'alimentation une source de F. E. M., soit par le courant I_{mn} de la source de courant, si on a pris comme source d'alimentation du circuit une source de courant. On prend comme courant I dans le numérateur du premier membre de l'expression (A.21), le courant circulant dans la branche, pour laquelle on calcule la valeur cherchée. Ainsi, s'il faut trouver la transmittance entre la source d'alimentation et une branche S quelconque, on entend par I le courant dans cette branche S.

Le nombre des termes dans le numérateur de l'expression (A. 21) est égal au nombre des parcours possibles entre les nœuds m et n, chacun d'eux devant passer par la branche S choisie (comme nous l'avons déjà indiqué, on ne tient pas compte du parcours passant par la source d'alimentation).

Une partie des termes peut figurer dans la somme $\Sigma C_r\Delta_r$ avec le signe $+$ et une autre partie avec le signe $-$, du fait que C_r peut être affectée du signe $+$, ou du signe $-$. Pour savoir quel est le signe de C_r on choisit arbitrairement le sens positif le long de la branche S (on trace une flèche au-dessus de cette branche). Si, en suivant le parcours C_r on se déplace le long de la branche S conformément au sens positif pour cette branche (suivant la flèche au-dessus de la branche S) C_r doit être prise avec le signe $+$ et dans le sens contraire, elle est prise avec le signe $-$.

En calculant le déterminant Δ du système, il faut tenir compte de la résistance interne de la source d'alimentation du circuit. Lorsque le circuit est alimenté à partir d'une source de F.E.M., Δ est calculé pour les nœuds mn se trouvant en court-circuit (la résistance interne de la source de F.E.M. étant nulle). Lorsque le circuit est alimenté par une source de courant, la branche mn, dans laquelle est intercalée cette source, est considérée comme coupée lors du calcul de Δ.

Examinons plusieurs exemples d'utilisation de l'expression (A. 21).

Exemple 87. Calculons la conductance mutuelle de la branche comportant la source de F.E.M. (branchée au nœud mn) et de la branche à conductance e (fig. 202, a). Pour connaître le signe de C_r, prenons comme sens positif de la branche e celui indiqué par la flèche.

$$\frac{I_e}{E_{ent}}=\frac{\sum C_r\Delta_r}{\Delta}.$$

Il existe dans le graphe deux parcours entre les nœuds m, n passant par la branche e. Le premier parcours est représenté sur la fig. 202, a: $C_1 = aeb$. Ce parcours est pris avec le signe $+$, puisqu'en l'effectuant le long de la branche e, nous nous déplaçons conformément à la direction de la flèche de cette branche. Du fait que le graphe est réduit à un point lorsqu'on court-circuite les branches a, e, b (les branches de ce parcours) on a $\Delta_1 = 1$.

Le deuxième parcours C_2 suit les branches d, e, c (fig. 202, c). Puisqu'en effectuant ce parcours le long de la branche e, nous nous déplaçons à l'encontre de la flèche de cette branche (comparons les fig. 202, a et c) on a $C_2 = -dec$. En

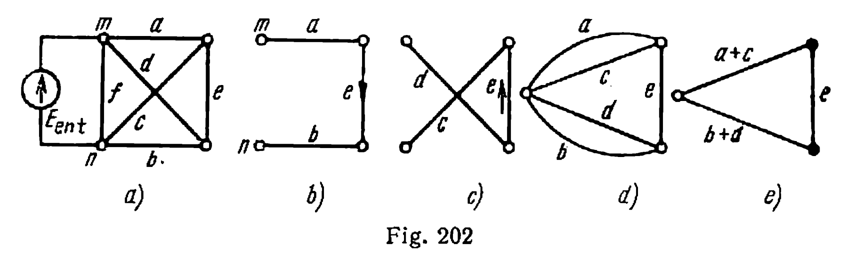


Fig. 202

court-circuitant les branches d, e, c, le graphe est réduit à un point et, par conséquent, $\Delta_2 = 1$. Pour trouver le déterminant du système court-circuitons les nœuds m, n (le circuit est alimenté par une source de F.E.M.) et obtenons ainsi le graphe de la fig. 202 d. En partant de ce dernier, traçons le graphe de la fig. 202, e.

En calculant le Δ du graphe de la fig. 202, e, décomposons-le suivant les parcours entre les points figurés en gros traits. Il existe deux parcours entre ces points. Le premier emprunte la branche e, et le deuxième, les branches $(a + c)$, $(b + d)$; par conséquent,

$$\Delta=e\,(a+c+b+d)+(a+c)\,(b+d)\cdot 1.$$

Ainsi

$$\frac{I_{sor}}{I_{ent}}=\frac{C_1\Delta_1+C_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{aeb-dec}{e\,(a+c+b+d)+(a+c)\,(b+d)}\,. \qquad \text{(A.24)}$$

Pour trouver le coefficient de transmittance en tensions du schéma de la fig. 202, a entre la branche d'entrée (celle à source de F.E.M. située entre les nœuds m et n) et la branche de sortie e, utilisons le fait que la tension de sortie aux bornes de la branche e est égale au courant I_{sor} de la branche même e, divisé par la conductance de cette branche.

Par conséquent,

$$\frac{U_{sor}}{E_{ent}}=k_u=\frac{\frac{I_{sor}}{e}}{E_{ent}}=\frac{ab-dc}{e\,(a+b+c+d)+(a+c)\,(b+d)}\,.$$

Examinons maintenant les modifications qui se produiraient dans les calculs, si ce circuit était alimenté non pas par une source de F.E.M., mais par une source de courant (fig. 203) et si on voulait trouver la transmittance en courant vers cette branche et le rapport de la tension de sortie (aux bornes de la bran-

che e), au courant de sortie. La branche e reste comme auparavant la branche de sortie et elle est parcourue par le courant I_{sor}. Le sens positif pour parcourir cette branche est le même que dans l'exemple précédent (voir flèche).

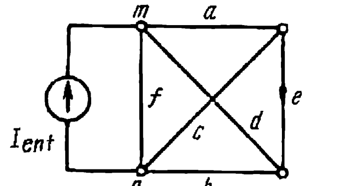


Fig. 203

Contrairement à l'exemple précédent, la grandeur d'entrée est maintenant le courant d'entrée I_{ent}. Par conséquent

$$\frac{I_{sor}}{I_{ent}}=\frac{\sum C_r\Delta_r}{\Delta}. \qquad (A.25)$$

Le numérateur de l'expression du second membre de cette dernière ligne est exactement le même, que le numérateur du second membre de l'expression (A. 24). En ce qui concerne le déterminant Δ de l'expression (A. 25), ce dernier diffère du déterminant Δ de l'expression (A.24) du fait que dans cette dernière il était calculé pour l'alimentation du circuit par une source de F.E.M., tandis que dans le cas considéré il doit être calculé pour l'alimentation du circuit par une source de courant. Pour calculer dans ces conditions, la branche comportant la source de courant, doit

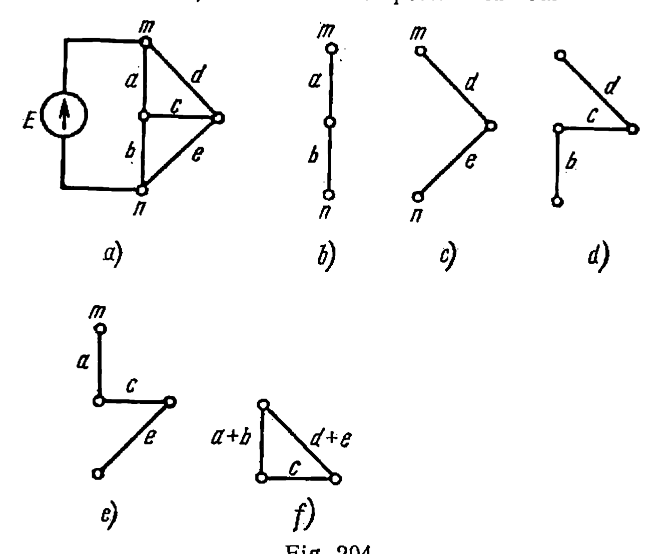


Fig. 204

être considérée comme coupée. Mais le déterminant Δ a été déjà calculé pour un cas analogue auparavant (voir expression (a) au § 159). Par conséquent,

$$\frac{I_{sor}}{I_{ent}}=\frac{aeb-dec}{(a+d+f)(ce+cb+be)+ad(b+c)+af(b+e)+df(c+e)}.$$

Le rapport de la tension de sortie aux bornes de la branche e au courant d'entrée:

$$\frac{U_{sor}}{I_{ent}}=\frac{\frac{I_{sor}}{e}}{I_{ent}}=\frac{ab-dc}{(a+d+f)(ce+cb+be)+ad(b+c)+af(b+e)+df(c+b)}.$$

Pour calculer la transmittance d'entrée du circuit, alimenté par une source de F.E.M., le numérateur de l'expression (A.21) doit comprendre tous les parcours

possibles entre les nœuds m et n (le parcours passant par la source de F.E.M. étant exclu). Ainsi, pour calculer la transmittance d'entrée du schéma de la fig. 204, a on doit faire figurer dans le numérateur de l'expression (A.21) quatre termes, puisqu'il existe quatre parcours possibles entre les nœuds m et n (fig. 204, b, c, d et e)

$$\frac{I_{sor}}{I_{ent}}=\frac{\sum C_r\Delta_r}{\Delta}=\frac{ab\,(d+c+e)+de\,(a+c+b)+dcb\cdot 1+ace\cdot 1}{(a+b)\,(d+e)+(a+b)\,c+(d+e)\,c}.$$

Tous les C_r figurant au numérateur sont pris avec le signe $+$, puisque les sens des quatre parcours ont été choisis, suivant les aiguilles d'une montre, dans le même sens que le courant d'entrée. Le déterminant Δ (le circuit étant alimenté par une source de F.E.M.) est calculé conformément à la fig. 204, f.

E x e m p l e 88. A titre de dernier exemple, calculons la transmittance en courant dans un pont double, en T, représenté sur la fig. 205, a. Ce circuit est

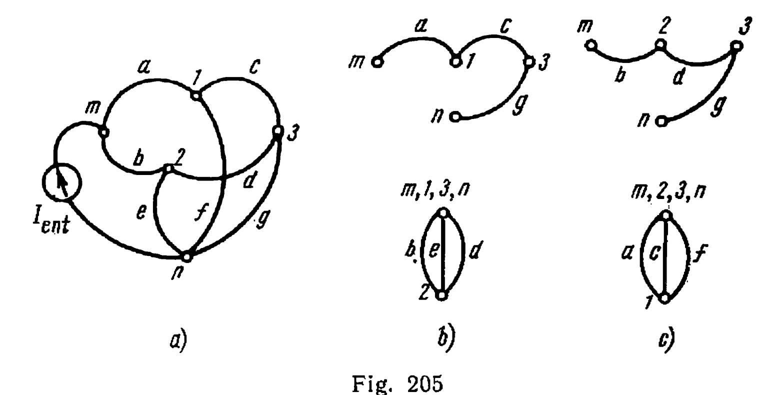


Fig. 205

alimenté par la source de courant I_{ent}. La branche g est la branche de sortie. Elle est parcourue par le courant I_{sor}. Le sens positif, choisi pour cette branche, est indiqué par une flèche.

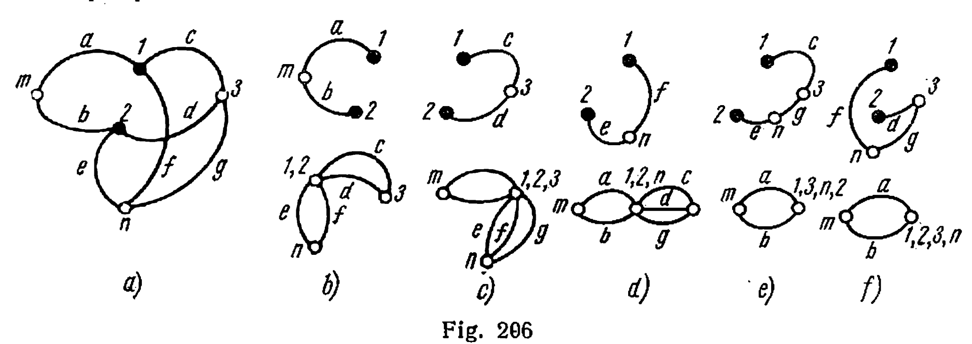


Fig. 206

Deux parcours C_1 et C_2 à transmittances $C_1 = acg$ et $C_2 = bdg$ et les sous-graphes correspondants à utiliser, pour les calculs des mineurs $\Delta_1 = b + e + d$ et $\Delta_2 = a + c + f$, sont représentés sur les fig. 205, b et c.

Le déterminant Δ du graphe de la fig. 206, a est trouvé par la méthode de sa décomposition suivant les branches entre les nœuds 1 et 2 (ces nœuds étant figurés en noir). Il existe cinq parcours entre ces nœuds, conformément aux fig. 206, b, c, d, e et f.

Les sous-graphes de ces parcours sont représentés sur les mêmes schémas. Nous obtenons en définitive

$$\frac{I_{sor}}{I_{ent}} = \frac{C_1\Delta_1 + C_2\Delta_2}{\Delta} = acg\,(b+e+d) + b\,dg\,(a+c+f)/ab\,[(e+f)\,g + (e+f)(c+d) + (c+d)\,g] + cd\,(a+b)\,(e+f+g) + ef\,(a+b)\,(c+d+g) + cge\,(a+b) + fgd\,(a+b).$$

§ 161. Notions sur l'arbre et sur la grandeur de cet arbre. Quelques observations de caractère général. On utilise en topologie des termes que nous n'avons pas mentionné jusqu'ici, à savoir arbre et grandeur de l'arbre. On appelle *arbre* l'ensemble des branches qui touchent à tous les nœuds, mais ne forment aucune maille. On peut former plusieurs arbres en partant du même graphe. Ainsi, les arbres, formés à partir du graphe le plus simple de la fig. 207, *a*, sont représentés sur les fig. 207, *b*, *c*, *d*. On appelle *grandeur de l'arbre* le produit des transmittances des

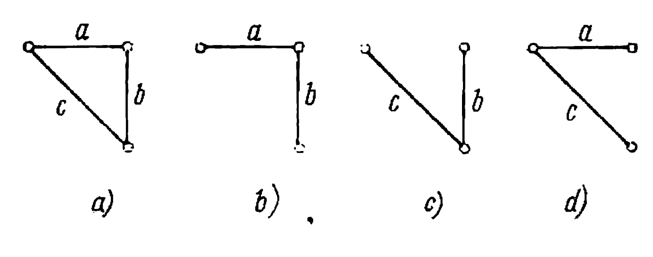


Fig. 207

branches de cet arbre. La grandeur de l'arbre de la fig. 207, *b* est égale à *ab*, la grandeur de l'arbre de la fig. 207, *c* est *bc*, celle de l'arbre de la fig. 207, *d* est *ac*. La somme des grandeurs de tous les arbres posssibles pour le graphe considéré, est égale au déterminant Δ de ce graphe.

Ainsi, pour le schéma de la fig. 207, *a* $\Delta = ab + bc + ac$. En conclusion de l'appendice A, énumérons tous les avantages du calcul des circuits électriques à l'aide de graphes.

1. L'ensemble du calcul se divise en opérations simples et claires, pour lesquelles il existe peu de chances de commettre des erreurs.

2. Le calcul du déterminant Δ du système est effectué avec une dépense moindre de temps et de travail que le calcul de Δ comme déterminant d'une matrice indéterminée des transmittances (ainsi qu'il a été indiqué au § 157). Ces avantages se manifestent d'autant plus nettement que le nombre de nœuds dans les graphes est important.

APPENDICE B

CIRCUITS DUAUX

§ 162. Définition des circuits électriques duaux. Deux circuits électriques sont appelés duaux si la loi de variation des courants fictifs maillés dans l'un des circuits est similaire à la loi de variation des potentiels des nœuds de l'autre circuit.

A titre d'exemple le plus simple, nous avons représenté sur la fig. 208 deux schémas duaux.

Le schéma de la fig. 208, *a* comprend une source de F.E.M. $\dot{E}$, une résistance active et des réactances inductive et capacitive (*R*, *L*, *C*) couplées en série avec

cette source. Le circuit de la fig. 208, *b* est constitué par une source de courant $\dot{I}_e$ et trois branches couplées en parallèle.

La première branche contient une conductance active g_e, la deuxième, une capacité C_e et la troisième, une inductance I_e.

Pour montrer quelle est la correlation qui existe dans les circuits duaux, écrivons pour le schéma de la fig. 208, *a* une équation suivant la méthode des

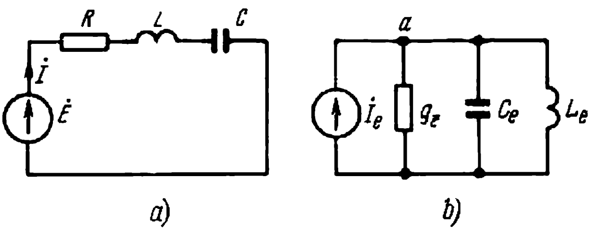


Fig. 208

courants fictifs maillés et pour le schéma de la fig. 208, *b*, une équation suivant celle des potentiels des nœuds. Nous avons ainsi pour le schéma 208, *a*

$$\dot{I}\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)=\dot{E}. \tag{B.1}$$

Désignons pour le schéma de la fig. 208, *b* le potentiel du point *a* par $\dot{\varphi}_a$ et écrivons l'équation d'après la méthode des potentiels des nœuds *:

$$\dot{\varphi}_a\left(g_e+\frac{1}{j\omega L_e}+j\omega C_e\right)=\dot{I}_e. \tag{B.2}$$

Si on assure la corrélation des paramètres du schéma de la fig. 208, *b* (c'est-à-dire de g_e, L_e et C_e) et des paramètres du schéma de la fig. 208, *b* (c'est-à-dire de R, L et C) de manière que

$$\frac{R}{g_e}=\frac{L}{C_e}=\frac{L_e}{C}=k, \tag{B.3}$$

où *k* certain nombre arbitraire ayant les dimensions de Ω^2, on a

$$g_e+\frac{1}{j\omega L_e}+j\omega C_e=\frac{R}{k}+\frac{1}{kj\omega C}+\frac{j\omega L}{k}=\frac{1}{k}\left(R+\frac{1}{j\omega C}+j\omega L\right).$$

En tenant compte de la dernière ligne récrivons l'équation (B.2) de la manière suivante:

$$\dot{\varphi}_a\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)=k\dot{I}_e. \tag{B.4}$$

Comparons les équations (B.4) et (B.1). Il résulte de cette comparaison que si le courant $\dot{I}_e$ de la source de courant figurant dans le schéma de la fig. 208, *b* varie à la même fréquence angulaire que la F.E.M. $\dot{E}$ dans le schéma de la fig. 208, *a* et si les paramètres des deux circuits sont en corrélation, conformément à l'équation (B.3), la loi de variation dans le temps du potentiel $\dot{\varphi}_a$ du circuit de la fig. 208, *b* est la même que la loi de variation dans le temps du courant $\dot{I}$ du circuit de la fig. 208, *a*.

* Le potentiel du deuxième nœud du schéma de la fig. 208, *b* est considéré comme nul.

Si les propriétés d'un circuit quelconque sont connues, elles peuvent être transportées entièrement dans un circuit dual au circuit en question.

§ 163. Eléments duaux de deux circuits. A chaque élément du circuit initial (circuits à source de F.E.M. E et à paramètres R, L, C) correspond un élément approprié du circuit équivalent dual (d'un circuit à source de courant I_e et à paramètres g_e, C_e et L_e).

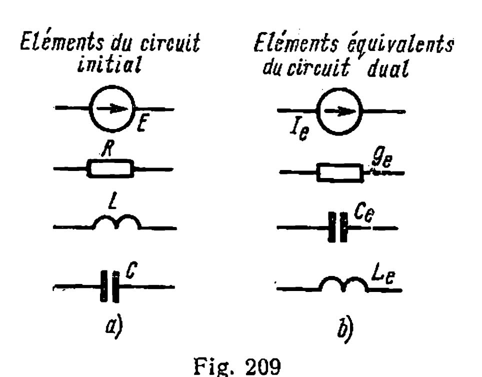


Fig. 209

Ainsi à la source de la F.E.M. E du circuit initial correspond dans un circuit dual la source de courant I_e (fig. 209) ; à la résistance active R du circuit initial, la conductance g_e ; à l'inductance L, la capacité C_e ; à la capacité C, l'inductance L_e.

§ 164. Comment transformer un circuit en son circuit dual ? A Chaque maille indépendante du circuit initial (ainsi qu'à la région considérée, comme extérieure par rapport au circuit) correspond un nœud approprié du circuit dual.

Si dans une branche quelconque du circuit initial, commune à deux mailles de ce circuit, il existe n éléments couplés en série, cette branche est représentée dans le circuit dual par n branches couplées en parallèle, raccordant les nœuds du circuit dual, correspondant à ces mailles. A chaque élément du circuit initial ($\dot{E}$, R, L, C) correspondent dans le circuit dual leurs éléments équivalents ($\dot{I}_e$, g_e, C_e, L_e).

Pour transformer un circuit en son dual on procède de la manière suivante.

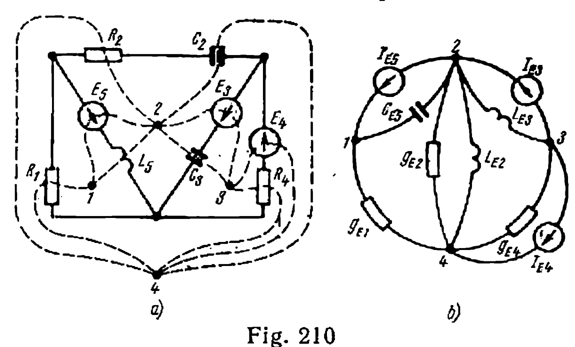


Fig. 210

On met à l'intérieur de chaque maille indépendante du circuit initial (et dans sa région extérieure) un point et on note ces points. Ces points seront les nœuds du circuit dual équivalent.

Le schéma de la fig. 210, *a* comprend trois mailles indépendantes; on indiquera donc à l'intérieur de ces mailles les points *1*, *2*, *3* (le point *1* correspond à la première maille, le point *2* à la deuxième, etc.).

Indiquons le point *4* dans la région extérieure par rapport au circuit. Réunissons les quatre nœuds ainsi obtenus par des lignes en pointillé, jouant le rôle des branches du circuit dual. Faisons passer ces lignes par tous les éléments du circuit initial (autrement dit par R, L, C, $\dot{E}$) et intercalons dans le circuit dual de la fig. 210, *b* des éléments équivalents appropriés.

Ainsi le nœud *1* de la fig. 210, *a* est raccordé au nœud *4* par une seule ligne en pointillé, puisque dans la branche commune aux première et deuxième mailles

du circuit initial il ne se trouve qu'une seule résistance (la résistance active R_1). La conductance g_{e1} est intercalée de ce fait par le nœud *1* et le nœud *4* du circuit de la fig. 210, *b*.

Le nœud *1* et le nœud *2* de la fig. 210, *a* sont raccordés par deux lignes en pointillé (l'une d'elles passe par la source de la F.E.M. $\dot{E}_5$ et l'autre par l'inductance L_5), du fait que dans la branche commune à la première et la deuxième maille, les deux éléments du circuit (E_5 et L_5) sont couplés en série. Le nœud *1* et le nœd *2* du circuit de la fig. 210, *b* sont raccordés par deux branches. L'une d'elles comprend la source de courant $\dot{I}_{e5}$ et l'autre, la capacité C_{e5} (ce sont des éléments corrélatifs à $\dot{E}_5$ et à L_5).

Les sens positifs des courants des sources de courant doivent coïncider avec les sens positifs des F.E.M. des sources de F.E.M.

Si lorsqu'on parcourt la maille k dans le sens des aiguilles d'une montre, une F.E.M. quelconque de cette maille a le même sens que celui du parcours de la maille, le courant de la source de courant qui lui est équivalente doit être dirigé vers le nœud k.

APPENDICE C

UTILISATION DES MATRICES EN ÉLECTROTECHNIQUE

§ **165. Propriétés principales des matrices.** Une matrice est un ensemble de grandeurs, disposées sous forme d'un tableau rectangulaire. Pour qu'on puisse distinguer la matrice par son aspect extérieur d'un déterminant, on la place entre crochets [ ] ou entre des traits verticaux doubles || ||. Chaque élément d'une matrice est habituellement muni de deux indices. Le premier correspond au numéro de la ligne et le deuxième au numéro de la colonne.

La matrice est carrée si le nombre de ses lignes est égal au nombre de ses colonnes. Exemple de matrice carrée

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

La matrice d'aspect $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ est dite diagonale. La matrice dont les éléments disposés suivant sa diagonale principale sont égaux à l'unité et dont les autres éléments sont nuls, est appelée matrice unitaire. Exemple:

$$[E]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On appelle indéfinie une matrice dans laquelle la somme des éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconques est nulle.

Deux matrices sont égales si les éléments correspondants de ces matrices sont égaux. Ainsi, par exemple, la matrice $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ est égale à la matrice

$$[B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ si } a_{11}=b_{11};\ a_{12}=b_{12};\ a_{21}=b_{21};\ a_{22}=b_{22}.$$

Les déterminants des matrices égales sont égaux. Ainsi dans l'exemple examiné précédemment $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}$; cependant il ne découle pas

de l'égalité des déterminants de deux matrices que ces deux matrices sont elles-mêmes égales.

En effectuant l'addition (la soustraction) des matrices il faut additionner (soustraire) les éléments correspondants de ces matrices.

Illustrons-le sur l'exemple suivant:

$$[A]+[C]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} \end{bmatrix}.$$

La multiplication de deux matrices (le nombre des colonnes de la première d'entre elles devant être égal pour cela au nombre des lignes de la deuxième) se fait d'après la règle suivante: « La ligne i de la première matrice est multipliée par la colonne k de la deuxième ».

Pour illustrer cette règle, multiplions deux matrices, dont les éléments sont constitués par les nombres suivants

$$[A][B]=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8 \\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8 \end{bmatrix}.$$

En s'inspirant de la règle mentionnée, il est facile de s'assurer que $[A].[B] \neq [B][A]$, c'est-à-dire que la matrice résultante dépend de l'ordre des matrices données.

On peut composer par rapport à la matrice $[A]$ la matrice inverse $[A]^{-1}$. Pour cela il faut: a) remplacer chaque élément de la matrice initiale $[A]$ par son complément algébrique; b) transposer la matrice ainsi obtenue, c'est-à-dire écrire ses lignes à la place des colonnes; c) diviser la matrice ainsi transposée par le déterminant de la matrice initiale $[A]$.

Examinons un exemple. Soit $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, cherchons $[A]^{-1}$. En remplaçant les éléments de la matrice $[A]$ par leurs compléments algébriques nous obtenons ainsi la matrice $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$. Après sa transposition nous aurons $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Par conséquent,

$$[A]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

Le produit $[A][A]^{-1}=[1]=1$.

Pour résoudre l'équation $[A][B]=[C]$ par rapport à la matrice $[B]$, il faut multiplier les deux termes de cette équation par $[A]^{-1}$: $[A]^{-1}\cdot[A][B]=[A]^{-1}\cdot[C]$, en tenant compte que $[A]^{-1}\cdot[A]=1$. Nous obtenons $[B]=[A]^{-1}\cdot[C]$.

§ 166. Utilisation des matrices en électrotechnique. Les matrices sont employées:

a) pour simplifier l'écriture d'un système d'équation;

b) pour une certaine rationalisation de la résolution des systèmes d'équations;

c) pour l'étude des propriétés topologiques des circuits électriques dans la théorie des graphes et lors de la synthèse des circuits.

La simplification de l'écriture à l'aide des matrices peut être illustrée à l'aide de l'exemple suivant. Supposons que pour un certain circuit nous ayons écrit un système d'équations suivant la méthode des courants fictifs maillés

$$\begin{aligned} Z_{11}\dot{I}_1+Z_{12}\dot{I}_2+Z_{13}\dot{I}_3&=\dot{E}_1,\\ Z_{21}\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2+Z_{23}\dot{I}_3&=\dot{E}_2,\\ Z_{31}\dot{I}_1+Z_{32}\dot{I}_2+Z_{33}\dot{I}_3&=\dot{E}_3. \end{aligned} \qquad (a)$$

Compte tenu de la règle de multiplication des matrices, ce système peut être écrit sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{bmatrix}. \qquad \text{(b)}$$

Si on désigne

$$[Z] = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}; \quad [\dot{I}] = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} \text{ et } [\dot{E}] = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{bmatrix},$$

le système (a) peut être remplacé par une seule équation matricielle

$$[Z]\,[\dot{I}] = [\dot{E}].$$

Une certaine rationalisation de la solution d'un système d'équations, obtenue à l'aide de matrices, peut être illustrée sur l'exemple d'un quadripôle composé de deux quadripôles couplés en série. Cherchons les matrices $[A_1]$ et $[A_2]$ de deux quadripôles *1* et *2* de la fig. 211 et la matrice $[A]$ d'un quadripôle équivalent à ces derniers.

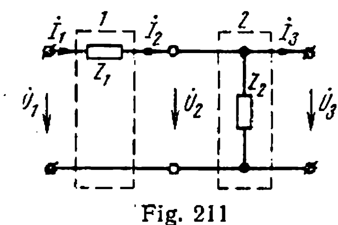


Fig. 211

Nous avons pour le premier

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + Z_1\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2$$

et par conséquent,

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [A_1] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)}$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour le deuxième quadripôle $\dot{U}_2 = \dot{U}_3$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_3}{Z_2} + \dot{I}_3, \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [A_2] \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(d)}$$

où

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans le second membre de l'équation (c) remplaçons $\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$ par son équivalent (d).

Nous obtenons ainsi $\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [A_1][A_2] \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}.$

La matrice des deux quadripôles couplés en série:

$$[A]=[A_1][A_2]=\begin{bmatrix}1 & Z_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{Z_2} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{Z_1+Z_2}{Z_2} & Z_1\\ \frac{1}{Z_2} & 1\end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\dot{U}_1=\frac{Z_1+Z_2}{Z_2}\dot{U}_3+Z_1\dot{I}_3 \quad \text{et} \quad \dot{I}_1=\frac{1}{Z_2}\dot{U}_3+1\cdot\dot{I}_3.$$

APPENDICE D

ETUDE DES PROCESSUS SE DÉROULANT DANS LES SYSTÈMES NON ÉLECTRIQUES À L'AIDE DES MODÈLES ANALOGIQUES ÉLECTRIQUES

L'étude des processus se déroulant dans des systèmes non électriques (mécaniques, acoustiques, thermiques, hydrauliques, etc) ou dans des systèmes partiellement non électriques (par exemple électromécaniques) se fait souvent à l'aide des modèles électriques analogiques.

L'utilisation à cette fin des modèles électriques s'explique facilement, car 1) on peut faire varier les paramètres électriques facilement et dans de larges limites; 2) les courants et les tensions peuvent être mesurés avec une grande précision; 3) il est facile d'enregistrer les courants et les tensions sur un oscillographe. Pour fixer les idées, nous examinerons comme système non électrique des systèmes mécaniques.

Les systèmes mécaniques peuvent être subdivisés en systèmes à mouvement de translation, de rotation et de translation-rotation. Chacun de ces systèmes peut comprendre des éléments actifs et passifs. On considère comme éléments actifs les sources de force f et les sources de vitesses v pour les systèmes à mouvement de translation et les sources de couple moteur M et de vitesse angulaire ω pour les systèmes à mouvement de rotation.

On considère comme éléments passifs les éléments d'élasticité, de frottement et de masse. De même que dans l'étude des circuits électriques, ces éléments sont souvent idéalisés en considérant, par exemple, qu'un ressort parfait ne possède qu'une élasticité et ne possède pas de masse.

Pour un système mécanique donné, on commence par établir un schéma équivalent et ensuite, en utilisant l'analogie entre les grandeurs mécaniques et électriques, dont il sera question plus bas, on dresse un schéma analogue électrique qu'on soumet à des investigations (expérimentales ou théoriques).

Avant de construire un schéma équivalent à un système mécanique, il faut:

1. Choisir le système de référence pour les forces et les vitesses (ou pour les couples moteurs et les vitesses angulaires respectivement).
2. Relier entre eux les nœuds de même vitesse ou de même déplacement.
3. Rassembler tous les nœuds fixes en un seul.
4. Représenter sur le schéma équivalent, entre les nœuds appropriés, les éléments actifs et passifs, existant dans le système étudié.

Examinons l'exemple le plus simple.

Soit un système mécanique de la fig. 212, *a* constitué par un corps matériel de masse m reposant sur un ressort à élasticité S ($S=\frac{1}{e}$ où e — souplesse). Une force extérieure $f(t)$, fonction du temps t, agit sur ce corps. Lorsque le corps se déplace verticalement, il se produit un frottement visqueux avec l'ambiance. La

force du frottement visqueux est proportionnelle à la vitesse v du déplacement du corps. Ce système est représenté par un schéma à deux nœuds seulement : un nœud mobile a et un nœud fixe b.

Choisissons un sens positif pour mesurer la valeur du déplacement du corps x, en prenant comme point de départ la position du corps en l'absence de la force $f(t)$. Choisissons comme sens positif de la vitesse v le sens dirigé vers le bas, comme ceci est représenté sur la fig. 212, a. Le schéma équivalent est représenté sur la fig. 212, b. Il comprend quatre branches. La source de la force $f(t)$ est intercalée dans la première branche, la masse m dans la deuxième, le ressort idéal à élasticité S dans la troisième et la résistance au frottement r_{fr} dans la quatrième.

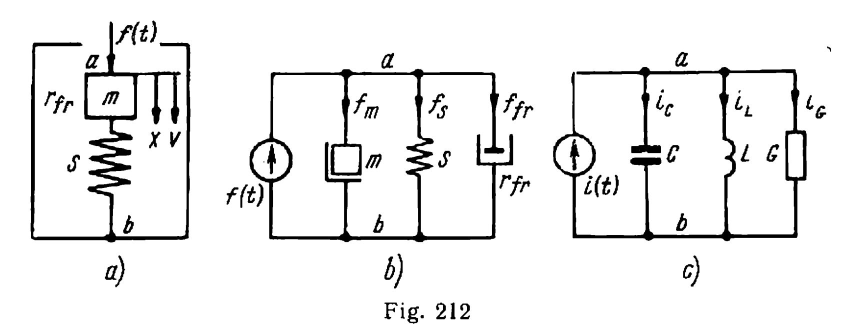


Fig. 212

Ecrivons pour le schéma équivalent une équation suivant la première loi de la mécanique. Conformément à cette loi, la somme des forces extérieures agissant en un certain nœud doit être égale à la somme de réactions au même nœud. Trois forces de réaction agissent au nœud a:

$f_m = m\frac{dv}{dt}$ — réaction du système, due à la force de frottement,

$f_s = \frac{1}{e}\int v\,dt$ — réaction du système, due à la déformation du ressort,

$f_{fr} = f_{fr}v$ — réaction du système, due au frottement.

Suivant la première loi de la mécanique

$$f_m + f_S + f_{fr} = f(t)$$

ou

$$m\frac{dv}{dt} + r_{fr}v + \frac{1}{e}\int v\,dt = f(t).$$

Une analogie de deux types différents peut exister entre les divers éléments d'un système mécanique et les éléments du modèle (système) électrique correspondant; ceci est dû au fait qu'un dual correspond à chaque circuit électrique.

Dans l'analogie du premier type les grandeurs corrélatives sont·
force f — tension u,
vitesse v — courant i,
masse m — inductance L,
souplesse du ressort e — capacité C,
résistance de frottement r_{fr} — résistance électrique R.

Dans les analogies du deuxième type les grandeurs corrélatives sont:
force f — courant i,
vitesse v — tension u,
masse m — capacité C,
souplesse du ressort e — inductance L,
résistance de frottement r_{fr} — conductance électrique G.

La fig. 212, *c* représente un schéma électrique établi suivant le deuxième type d'analogies, correspondant au schéma équivalent du système mécanique de la fig. 212, *b*.

Pour le schéma de la fig. 212, *c* on a

$$i_C + i_L + i_G = i(t)$$

ou

$$C\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}\int u\,dt + Gu = i(t).$$

Ici u — tension entre les nœuds a et b.

La loi de variation de la tension u en fonction du temps, dans le système de la fig. 212, *c* correspond à la loi de la variation de la vitesse v dans le système de la fig. 212, *a*, si les paramètres du circuit électrique ont été convenablement choisis.

IIe PARTIE

CHAPITRE VIII

COURANTS PÉRIODIQUES NON SINUSOÏDAUX DANS LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES LINÉAIRES

§ 167. Définition des courants et des tensions périodiques non sinusoïdaux. On appelle courants et tensions périodiques non sinusoïdaux les courants et les tensions qui varient en fonction du temps suivant une loi périodique non sinusoïdale.

Ces courants et ces tensions peuvent prendre naissance dans quatre régimes de fonctionnement de circuits électriques, essentiellement différents. Dans le premier d'entre eux, la source de F.E.M. ou la source de courant crée une F.E.M. non sinusoïdale ou, respectivement, un courant non sinusoïdal, tandis que les éléments du circuit, à savoir les résistances actives, les inductances et les capacités sont linéaires, c'est-à-dire indépendants du courant.

En deuxième régime de fonctionnement, la source de F.E.M. ou la source de courant crée une F.E.M. sinusoïdale ou un courant sinusoïdal, mais un ou plusieurs éléments du circuit ne sont pas linéaires.

En troisième régime de fonctionnement la source de F.E.M. ou la source de courant crée une F.E.M. non sinusoïdale ou un courant non sinusoïdal, et le circuit électrique comprend une ou plusieurs résistances non linéaires.

En quatrième régime de fonctionnement, la source de F.E.M. crée une F.E.M. continue ou sinusoïdale, tandis qu'un ou plusieurs éléments du circuit varient périodiquement en fonction du temps.

Nous examinerons dans le présent chapitre la méthode de calcul et les particularités de fonctionnement des circuits électriques linéaires, soumis à l'action des F.E.M. et des courants non sinusoïdaux, autrement dit, le premier des régimes de fonctionnement énumérés. Le deuxième et, partiellement, le troisième régimes de fonctionnement sont discutés au chapitre IX. Le quatrième régime de fonctionnement est examiné dans l'appendice A.

§ 168. Représentation des courants et des tensions non sinusoïdaux à l'aide des séries de Fourier. Il a été indiqué dans le cours de mathématiques qu'une fonction périodique quelconque $f(x)$ de période 2π, qui satisfait, aux conditions de Dirichlet * peut être développée en une série de Fourier.

La variable indépendante x est liée au temps t par l'expression

$$x = \omega t = 2\pi \frac{t}{T},$$

où: T — période de la fonction dans le temps.

Ainsi la période de la fonction suivant x est égale à 2π et la période de la même fonction suivant le temps est égale à T.

La série de Fourier s'écrit ainsi:

$$f(x) = A_0 + A_1' \sin x + A_2' \sin 2x + A_3' \sin 3x + A_4' \sin 4x + \ldots$$
$$+ A_1'' \cos x + A_2'' \cos 2x + A_3'' \cos 3x + A_4'' \cos 4x + \ldots \quad (8.1)$$

Ici A_0 — la composante continue, A_1' — amplitude de la composante sinusoïdale (variant suivant la loi sinusoïdale) du premier harmonique, A_1'' — amplitude de la composante cosinusoïdale du premier harmonique, A_2' — amplitude de la composante sinusoïdale du deuxième harmonique, etc.

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx; \quad (8.2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} A_1' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x\, dx; & A_1'' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx; \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_k' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi 2} f(x) \sin kx\, dx; & A_k'' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx. \end{array}\right\} \quad (8.3)$$

Puisque

$$A_k' \sin kx + A_k'' \cos kx = A_k \sin (kx + \psi_k),$$

où

$A_k = \sqrt{(A_k')^2 + (A_k'')^2}$ et tg $\psi_k = \frac{A_k''}{A_k'}$, la série de Fourier (8.1) peut être écrite également sous une forme différente:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin (x + \psi_1) + A_2 \sin (2x + \psi_2) + \ldots =$$
$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin (kx + \psi_k), \quad (8.4)$$

---

* Toutes les fonctions périodiques qu'on rencontre en électrotechnique satisfont aux conditions de Dirichlet. Par conséquent, on peut se dispenser de la vérification de la conformité à ces conditions.

où A_k — amplitude de l'harmonique de rang k de la série de Fourier.

Les harmoniques pour lesquels k est un nombre impair sont appelés harmoniques impairs; les harmoniques pour lesquels k est un nombre pair sont des harmoniques pairs.

§ 169. Certaines propriétés des courbes périodiques symétriques. Trois courbes ayant certaines propriétés spécifiques sont représentées sur les fig. 213—215.

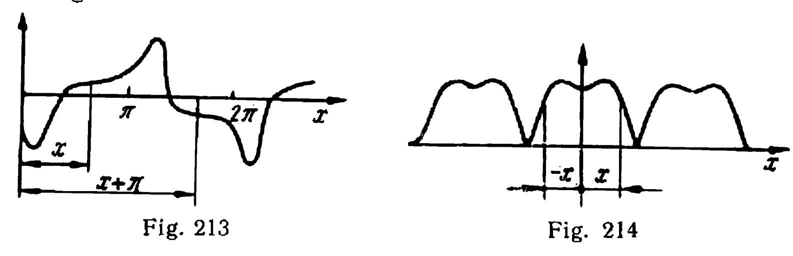


Fig. 213 Fig. 214

La courbe de la fig. 213 satisfait à la condition

$$-f(x+\pi)=f(x).$$

Les courbes qui satisfont à cette condition, sont appelées courbes symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Si on déplace la courbe de la fig. 213 suivant l'axe x d'une alternance et si on trace son image symétrique par rapport à l'axe x, la courbe ainsi obtenue coïncide avec la courbe $f(x)$.

Lorsque ces courbes sont développées en série de Fourier, cette série ne comporte pas de composante continue ni d'harmoniques pairs; autrement dit, les coefficients suivants sont nuls:

$$A_0=A_2'=A_2''=A_4'=A_4''=\ldots=0.$$

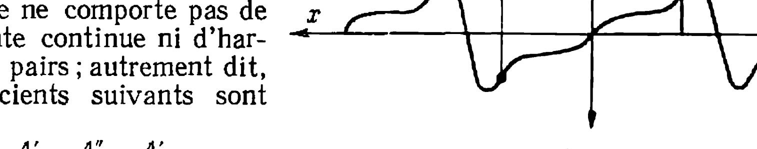


Fig. 215

Par conséquent, les courbes du type de celle représentée sur la fig. 213 peuvent être développées en série de la forme:

$$f(x)=A_1'\sin x+A_1''\cos x+A_3'\sin 3x+A_3''\cos 3x+\ldots$$

Chaque terme de cette série satisfait à la condition $-f(x+\pi)=f(x)$. Ainsi, par exemple, $-\sin(x+\pi)=\sin x$.

Une courbe, similaire à celle de la fig. 214, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La condition suivante est satisfaite pour cette courbe:

$$f(-x)=f(x).$$

Si on prend l'image symétrique de la courbe située à gauche de l'axe des ordonnées, par rapport à cet axe, elle se confond avec la courbe située à droite de l'axe des ordonnées. Lorsqu'on développe ces courbes

en série de Fourier, les composantes sinusoïdales (c'est-à-dire $A'_1 = A'_2 = A'_3 = \ldots = 0$) ne figurent pas dans cette série et on n'y trouve que les composantes cosinusoïdales et la composante continue.

Ainsi les courbes du type de celle de la fig. 214 sont développées en série ci-après:

$$f(x) = A_0 + A''_1 \cos x + A''_2 \cos 2x + A''_3 \cos 3x + \ldots$$

Les courbes du type de celle de la fig. 215 sont caractérisées par la propriété $-f(-x) = f(x)$. Elles s'appellent courbes symétriques par rapport à l'origine des coordonnés. Leur développement en série de Fourier a la forme suivante:

$$f(x) = A'_1 \sin x + A'_2 \sin 2x + A'_3 \sin 3x + \ldots$$

§ 170. Sur le développement en série de Fourier des courbes de forme géométrique régulière et des courbes de forme géométrique irrégulière. Les courbes périodiques qu'on rencontre en électrotechnique peuvent être réparties en deux groupes. Le premier groupe comprend les courbes périodiques de forme géométrique régulière, comme par exemple, les courbes de forme trapézoïdale, triangulaire, rectangulaire, etc. Leur développement en série de Fourier est donné au tableau (p. 231). On y a remplacé x par ωt.

Le deuixème groupe de courbes comprend les courbes de forme arbitraire (géométriquement irrégulière). Le plus souvent les courbes périodiques du deuxième groupe sont données par leurs graphiques. Leur développement en série de Fourier se fait par la méthode graphique (grapho-analytique).

§ 171. Détermination des harmoniques de la série de Fourier par la méthode graphique (grapho-analytique). La méthode graphique de la détermination des harmoniques de la série de Fourier repose sur le remplacement d'une intégrale définie par une somme d'un nombre fini de termes. A cette fin on divise la période de la fonction $f(x)$, égale à 2π, en n parties égales Δx

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}$$

et on remplace les intégrales par ces sommes.

Par définition la composante continue est

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{p=n} f_p(x)\,\Delta x = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{n} f_p(x) \frac{2\pi}{n}$$

ou

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} f_p(x), \tag{8.5}$$

où p — indice courant; il prend successivement toutes les valeurs de 1 à n; $f_p(x)$ — valeur de la fonction $f(x)$ pour $x = p\Delta x$.

a_m, α, α, π, 2π, ωt	$f(\omega t)=\frac{4a_m}{\alpha\pi}\left(\sin\alpha\sin\omega t+\frac{1}{9}\sin 3\alpha\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\alpha\sin 5\omega t+\ldots\right)$
a_m, π, 2π, ωt	$f(\omega t)=\frac{8a_m}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t-\frac{1}{49}\sin 7\omega t+\ldots\right)$
a_m, π, 2π, ωt	$f(\omega t)=\frac{4a_m}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\frac{1}{7}\sin 7\omega t+\ldots\right)$
a_m, π, 2π, $\alpha\pi$, ωt	$f(\omega t)=\frac{4a_m}{\pi}\left(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cos\omega t+\frac{1}{3}\sin\frac{3\alpha\pi}{2}\cos 3\omega t+\frac{1}{5}\sin\frac{5\alpha\pi}{2}\cos 5\omega t+\ldots\right)$
a_m, π, 2π, ωt	$f(\omega t)=\frac{2a_m}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\cos\omega t+\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t-\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t+\frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t-\ldots\right)$
a_m, π, 2π, ωt	$f(\omega t)=\frac{4a_m}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t-\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t+\frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t-\ldots\right)$
$\frac{2}{3}\pi$, a_m, π, 2π, ωt	$f(\omega t)=\frac{3\sqrt{3}a_m}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}\cos 3\omega t-\frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t+\frac{1}{8\cdot 10}\cos 9\omega t-\ldots\right)$
$\pi/3$, a_m, π, 2π, ωt	$f(\omega t)=\frac{3a_m}{\pi}\left(1+\frac{2\cos 6\omega t}{5\cdot 7}-\frac{2\cos 12\omega t}{11\cdot 13}+\frac{2\cos 18\omega t}{17\cdot 19}-\ldots\right)$

L'amplitude de la composante sinusoïdale de l'harmonique du rang k:

$$A'_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \approx \cdot 2\frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{n} f_p(x)\frac{2\pi}{n}\sin_p kx,$$

ou

$$A'_k = \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n} f_p(x)\sin_p kx. \qquad (8.6)$$

L'amplitude de composante cosinusoïdale de l'harmonique k

$$A''_k = \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n} f_p(x)\cos_p kx. \qquad (8.7)$$

Ici $\sin_p kx$ et $\cos_p kx$ — valeurs des fonctions sin kx et cos kx respectivement pour $x = p\Delta x$.

Lorsqu'on utilise pour les calculs les expressions (8.5)—(8.7) il suffit en générale de décomposer la période en n = 24 ou 18 parties et, dans un certain nombre de cas, même en un nombre de parties inférieur.

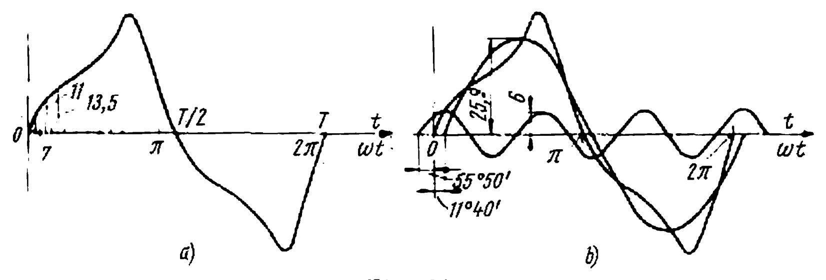


Fig. 216

Avant de procéder à un développement graphique en série, il faut se rendre compte si la fonction à développer est ou n'est pas symétrique par rapport aux axes des coordonnées (voir § 169). La présence d'une symétrie d'une telle ou autre espèce, permet de prévoir à l'avance la nature des harmoniques qu'on y trouvera. Ainsi, si la courbe $f(x)$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, la composante continue A_0 et tous les harmoniques pairs sont absents et lors du calcul des termes A'_k et A''_k pour les valeurs impairs de k, il ne faut pas oublier que la valeur de la somme $\sum f_p(x)\sin kx$ pendant la première alternance est égale à la valeur de la somme $\sum f_p(x)\sin_p kx$ au cours de la deuxiéme alternance.

Le signe des angles ψ_k dans l'expression (8.4) dépend des signes de A'_k et A''_k. Lorspu'on trace les harmoniques sur un diagramme commun, il ne faut pas oublier que l'échelle en abscisses pour l'harmonique k doit être de k fois plus grande que celle utilisée pour le premier harmonique.

Ainsi, par exemple, si un certain tronçon, pris sur l'axe des abscisses, représente pour le premier harmonique l'angle $\frac{\pi}{3}$, le même tronçon représente pour le troisième harmonique un angle trois fois plus grand, c'est-à-dire $3\frac{\pi}{3} = \pi$.

E x e m p l e 89. Trouver les premier et troisième harmoniques de la fonction $f(x)$ représentée sur la fig. 216, *a*. En divisant la période en 24 parties on obtient les valeurs suivantes des ordonnées de la fonction $f_p(x)$ pour la première alternance:

$p=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_p(x)=$	7	11	13,5	15,4	17,4	20,5	25,4	32,5	27,7	19,2	10	0

S o l u t i o n. Puisque cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, $A_0 = 0$ et la série qui la caractérise ne comprend que les harmoniques impairs.

Amplitude de la composante sinusoïdale du premier harmonique

$$A_1' = \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n} f_p(x)\sin_p x = \frac{4}{n}\sum_{p=1}^{n/2} f_p(x)\sin_p x;$$

$$A_1' = \frac{4}{24}(7\sin 15^\circ + 11\sin 30^\circ + 13{,}5\sin 45^\circ + 15{,}4\sin 60^\circ + 17{,}4\sin 75^\circ + 20{,}5\sin 90^\circ + 25{,}4\sin 105^\circ + 32{,}5\sin 120^\circ + 27{,}7\sin 135^\circ + 19{,}2\sin 150^\circ + 10\sin 165^\circ) = 25{,}3.$$

Amplitude de la composante cosinusoïdale du premier harmonique

$$A_1'' = \frac{4}{n}\sum_{p=1}^{n/2} f_p(x)\cos_p x;$$

$$A_1'' = \frac{4}{24}(7\cos 15^\circ + 11\cos 30^\circ + 13{,}5\cos 45^\circ + 15{,}4\cos 60^\circ + 17{,}4\cos 75^\circ + 20{,}5\cos 90^\circ + 25{,}4\cos 105^\circ + 32{,}5\cos 120^\circ + 27{,}7\cos 135^\circ + 19{,}2\cos 150^\circ + 10\cos 165^\circ) = -5{,}23.$$

Amplitude de la composante sinusoïdale du troisième harmonique

$$A_3' = \frac{4}{24}\sum_{p=1}^{12} f_p(x)\sin_p 3x = \frac{1}{6}(7\sin 45^\circ + 11\sin 90^\circ + 13{,}5\sin 135^\circ + 15{,}4\sin 180^\circ + 17{,}4\sin 225^\circ + 20{,}5\sin 270^\circ + 25{,}4\sin 315^\circ + 32{,}5\sin 360^\circ + 27{,}7\sin 45^\circ + 19{,}2\sin 90^\circ + 10\sin 135^\circ) = 3{,}47.$$

Amplitude de la composante cosinusoïdale du troisième harmonique

$$A_3'' = \frac{1}{6}\sum_{p=1}^{12} f_p(x)\cos_p 3x = \frac{1}{6}(7\cos 45^\circ + 11\cos 90^\circ + 13{,}5\cos 135^\circ +$$
$$+ 15{,}4\cos 180^\circ + 17{,}4\cos 225^\circ + 20{,}5\cos 270^\circ + 25{,}4\cos 315^\circ +$$
$$+ 32{,}5\cos 360^\circ + 27{,}7\cos 45^\circ + 19{,}2\cos 90^\circ + 10\cos 135^\circ) = 5{,}1.$$

Amplitude du premier harmonique de la série $A_1 = \sqrt{(A_1')^2 + (A_1'')^2} =$ 25,9.

La tangente de l'angle ψ_1, dont l'origine du premier harmonique est déphasé par rapport à l'origine de la courbe $f(x)$,

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{A_1''}{A_1'} = \frac{-5{,}23}{25{,}3} = -0{,}206\,;\quad \psi_1 = -11^\circ 40'.$$

Amplitude du troisième harmonique $A_3 = \sqrt{(A_3')^2 + (A_3'')^2} = 6$.

$$\operatorname{tg}\psi_3 = \frac{A_3''}{A_3'} = 1{,}47\,;\quad \psi_3 = 55^\circ 50'.$$

Par conséquent, en se limitant au troisième harmonique, on a

$$f(\omega t) = 25{,}9\sin(\omega t - 11^\circ 40') + 6\sin(3\omega t + 55^\circ 50').$$

Les premier et troisième harmoniques de la série ainsi obtenue, ainsi que la courbe résultante (globale), sont représentés sur la fig. 216, *b*. Il est intéressant de comparer cette dernière à la courbe de la fig. 216, *a*.

En terminant l'examen du problème du développement de la courbe $f(x)$ en série de Fourier, il y a lieu de dire qu'on peut obtenir des résultats quelque peu plus précis si on considère que $f_p(x)$, $\sin_p kx$, $\cos_p kx$ dans les expressions (8.5)—(8.7) sont les valeurs des fonctions énumérées non pas à la fin, mais au milieu de l'intervalle p, c'est-à-dire non pas pour $x = p\Delta x$, mais pour $x = (p - 0{,}5)\,\Delta x$.

§ 172. Calcul des courants et des tensions pour des F.E.M. non sinusoïdales. Avant d'aborder le calcul, on doit développer la F.E.M. en série de Fourier.

Conformément au principe de la superposition, la valeur instantanée du courant dans une branche quelconque du circuit est égale à la somme des valeurs instantanées des courants de ses divers harmoniques. De même, la valeur instantanée de la tension aux bornes d'un tronçon quelconque du circuit est égale à la somme des valeurs instantanées des tensions de divers harmoniques dans ce tronçon. Le calcul doit être fait pour chaque harmonique séparément à l'aide des méthodes exposées dans la première partie de ce cours.

On commence par calculer les courants et les tensions dus à la composante continue de la F.E.M. Après ceci on calcule les courants et les tensions créés par le premier harmonique de la F.E.M., ensuite ceux créés par le deuxième harmonique de la F.E.M., par le troisième, etc.

Lorsqu'on calcule les courants et les tensions créés par la composante continue de la F.E.M. il ne faut pas perdre de vue que la chute

de tension dans l'inductance L due au courant continu est nulle et ne pas oublier non plus que le courant continu ne peut pas passer par la capacité C.

Il faut tenir également compte dans le calcul que la réactance inductive croît en raison directe de la fréquence et, par conséquent, la réactance inductive pour l'harmonique k, X_{Lk}, est de k fois plus grande que la réactance inductive X_{L1} pour le premier harmonique:

$$\left.\begin{aligned} X_{Lk} &= k\omega L = kX_{L1}, \\ X_{L1} &= \omega L. \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

La réactance capacitive diminue avec l'accroissement de la fréquence et, par conséquent, la réactance capacitive X_{Ck} pour l'harmonique k est de k fois inférieure à la réactance capacitive X_{C1} pour le premier harmonique:

$$\left.\begin{aligned} X_{Ck} &= \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_{C1}}{k}, \\ X_{C1} &= \frac{1}{\omega C}. \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

On peut construire un diagramme vectoriel propre à chacun des harmoniques. Cependant, il ne faut pas oublier qu'il est inadmissible de représenter sur un diagramme vectoriel des courants et des chutes de tension de différentes fréquences et, à fortiori, de faire la somme vectorielle de courants de fréquences différentes ou de chutes de tension de fréquences différentes; en effet, les vitesses angulaires de rotation des vecteurs de fréquences différentes ne sont pas les mêmes.

On admet que les résistances actives ne dépendent pas des fréquences, si ces dernières ne sont pas très élevées *.

Exemple 90. La force électromotrice dans le circuit de la fig. 217, *a* varie suivant la loi ci-après

$$e(t) = E_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + E_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3);$$
$$E_{1m} = 25{,}9V; \ E_{3m} = 6V; \ \psi_1 = -11°40'; \ \psi_3 = 55°50';$$
$$R = 10\Omega; \ \frac{1}{\omega C} = 9\Omega; \ \omega L = 6.$$

On demande d'écrire les expressions pour les valeurs instantanées des courants dans les diverses branches et celle du courant dans la partie non ramifiée du circuit.

Solution. Désignons les courants conformément à la fig. 217, *a*. Le premier harmonique du courant i_I

$$\frac{E_{1m}}{R}\sin(\omega t + \psi_1) = 2{,}59\sin(\omega t - 11°40').$$

* Rigoureusement parlant la valeur de la résistance active dépend de la fréquence par suite de l'effet pelliculaire. Nous n'avons pas tenu compte ici de l'effet pelliculaire (voir troisième partie de ce cours).

Troisième harmonique du courant i_I

$$\frac{E_{3m}}{R}\sin(3\omega t+\psi_3)=0{,}6\sin(3\omega t+55°50').$$

Courant total de la première branche

$$i_I=2{,}59\sin(\omega t-11°40')+0{,}6\sin(3\omega t+55°50').$$

Premier harmonique du courant i_{II}

$$\frac{E_{1m}}{\frac{1}{\omega C}}\sin(\omega t+\psi_1+90°)=2{,}87\sin(\omega t+78°20').$$

Troisième harmonique du courant i_{II}

$$\frac{E_{3m}}{\frac{1}{3\omega C}}\sin(3\omega t+\psi_3+90°)=2\sin(3\omega t+145°50').$$

Courant total de la deuxième branche

$$i_{II}=2{,}87\sin(\omega t+78°20')+2\sin(3\omega t+145°50').$$

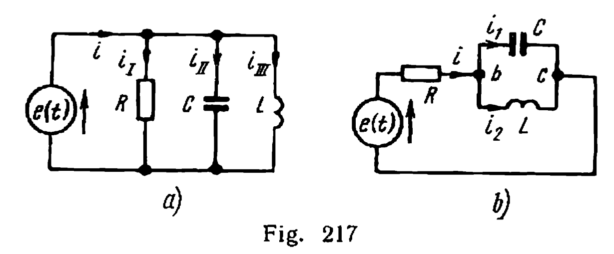


Fig. 217

Premier harmonique du courant i_{III}

$$\frac{E_{1m}}{\omega L}\sin(\omega t+\psi_1-90°)=4{,}32\sin(\omega t-101°40').$$

Troisième harmonique du courant i_{III}

$$\frac{E_{3m}}{3\omega L}\sin(3\omega t+\psi_3-90°)=0{,}33\sin(3\omega t-34°10').$$

Courant total de la troisième branche

$$i_{III}=4{,}32\sin(\omega t-101°40')+0{,}33\sin(3\omega t-34°10').$$

Courant dans la partie non ramifiée du circuit

$$i=i_I+i_{II}+i_{III}.$$

Le premier harmonique du courant i est égal à la somme des premiers harmoniques des courants de diverses branches *. De même le troisième

* Chaque harmonique est exprimé par une quantité complexe. L'addition des harmoniques du même rang se fait par l'addition des quantités complexes ou par addition des vecteurs dans le plan complexe, c'est-à-dire de la manière indiquée dans la première partie de ce cours.

harmonique du courant i est égal à la somme des troisièmes harmoniques des courants de diverses branches. On obtient en définitive

$$i = 3 \sin(\omega t - 40^\circ) + 1{,}8 \sin(3\omega t + 125^\circ)\ A.$$

Exemple 91. Calculer les valeurs instantanées des courants et des tensions dans le circuit de la fig. 217, b, à caractéristiques suivantes : $e(t) = 100 + 80 \sin(\omega t + 30^\circ) + 60 \sin(3\omega t + 20^\circ) + 50 \sin(5\omega t + 45^\circ)\ V$; $R = 3\Omega$; $\omega L = 3\Omega$; $\frac{1}{\omega C} = 27\Omega$.

Solution. Calculons la quantité complexe de l'impédance du tronçon bc du circuit pour le premier, troisième et cinquième harmoniques :

$$Z_{bc1} = \frac{3j(-27j)}{-27j + 3j} = 3{,}38j;$$

$$Z_{bc3} = \frac{9j(-9j)}{9j - 9j} = \infty;$$

$$Z_{bc5} = \frac{15j(-5{,}4j)}{15j - 5{,}4j} = -8{,}5j\Omega.$$

Impédance du circuit pour le premier harmonique

$$Z_1 = R + Z_{bc1} = 3 + 3{,}38j = 4{,}5e^{j48^\circ 30'}\Omega.$$

Impédance du circuit pour le troisième harmonique

$$Z_3 = \infty.$$

Impédance pour le cinquième harmonique

$$Z_5 = 3 - 8{,}5j = 9e^{-j70^\circ 30'}\Omega.$$

La résistance opposée par le circuit à la composante continue du courant est égale à 3Ω (dans le tronçon bc, le courant continu circule dans l'inductance L, dont la résistance active est considérée comme nulle).

Calculons maintenant les composantes du courant dans la partie non ramifiée du circuit.

Composante continue du courant $\frac{100}{3} = 33{,}3\ A$. La quantité complexe du premier harmonique de courant

$$\frac{80e^{j30^\circ}}{4{,}5e^{j48^\circ 30'}} = 17{,}8e^{-j18^\circ 30'}\ A.$$

Une résonance des courants a lieu pour le troisième harmonique. Par conséquent, le courant i ne comporte pas de troisième harmonique, mais cet harmonique est présent dans les courants i_1 et i_2. La quantité complexe du cinquième harmonique du courant i :

$$\frac{50e^{j45^\circ}}{9e^{-j70^\circ 30'}} = 5{,}55e^{j115^\circ 30'}\ A.$$

Calculons maintenant la chute de tension, due à chaque harmonique, dans le tronçon bc. La chute de tension, due à la composante continue, est nulle dans le tronçon bc.

L'amplitude complexe du premier harmonique du courant (indice 1)

$$\dot{U}_{bc\,1m} = 17{,}8e^{-j18^\circ 30'} \cdot 3{,}38j = 60{,}2e^{j71^\circ 30'}.$$

De même

$$\dot{U}_{bc3m} = 60e^{j20^\circ}; \quad \dot{U}_{bc5m} = 5{,}55e^{j115^\circ 30'} \cdot 8{,}5e^{-j90^\circ} = 47{,}1e^{j25^\circ 30'}.$$

Valeur instantanée de la tension u_{bc}:

$$u_{bc} = 60{,}2 \sin(\omega t + 71^\circ 30') + 60 \sin(3\omega t + 20^\circ) + 47{,}1 \sin(5\omega t + 25^\circ 30')\ V.$$

Calculons maintenant les amplitudes complexes des courants des premier, troisième et cinquième harmoniques circulant dans la capacité:

premier harmonique

$$\frac{60{,}2e^{j71^\circ 30'}}{-27j} = 2{,}23e^{j161^\circ 30'};$$

troisième harmonique

$$\frac{60e^{j20^\circ}}{-9j} = 6{,}67e^{j110^\circ};$$

cinquième harmonique

$$\frac{47{,}1e^{j25^\circ 30'}}{5{,}4e^{-j90^\circ}} = 8{,}72e^{j115^\circ 10'}.$$

La valeur instantanée du courant dans la capacité

$$i_1 = 2{,}23 \sin(\omega t + 161^\circ 30') + 6{,}67 \sin(3\omega t + 110^\circ) + \\ + 8{,}72 \sin(5\omega t + 115^\circ 30')\ A.$$

Calculons de même les composantes du courant circulant dans l'inductance:

la composante continue est égale à 33,3 A;

premier harmonique

$$\frac{60{,}2e^{j71^\circ 30'}}{3j} \approx 20{,}1e^{-j18^\circ 30'};$$

troisième harmonique

$$\frac{60e^{j20^\circ}}{9j} = 6{,}67e^{-j70^\circ};$$

cinquième harmonique

$$\frac{47{,}1e^{j25^\circ 30'}}{15j} = 3{,}13e^{-j64^\circ 30'};$$

$$i_2 = 33{,}3 + 20{,}1 \sin(\omega t - 18^\circ 30') + 6{,}67 \sin(3\omega t - 70^\circ) + \\ + 3{,}13 \sin(5\omega t - 64^\circ 30').$$

Courant dans la partie non ramifiée du circuit

$$i = 33{,}3 + 17{,}8 \sin(\omega t - 18^\circ 30') + 5{,}55 \sin(5\omega t + 115^\circ 30')\ A.$$

§ 173. Phénomènes de résonance pour les courants non sinusoïdaux. Nous avons indiqué dans la première partie de ce cours qu'on appelle régime de résonance d'un circuit électrique, comprenant une ou plusieurs inductances ou une ou plusieurs capacités, un régime pour lequel le courant à l'entrée de ce circuit est en phase avec la F.E.M. appliquée à son entrée.

Si la F.E.M. agissant dans un circuit n'est pas sinusoïdale, des régimes de résonance (résonance des courants ou résonance des tensions) peuvent prendre naissance dans ce circuit non seulement pour le premier harmonique, mais également pour les harmoniques supérieurs.

Appelons résonance pour l'harmonique d'ordre k un régime pour lequel le courant d'harmonique k à l'entrée du circuit est en phase avec l'harmonique k de la F.E.M. appliquée à l'entrée de ce circuit (tandis que les courants des autres harmoniques ne sont pas en phase avec les F.E.M. auxquelles ils sont dus).

Si on tient compte des résistances actives des bobines d'inductance, la condition d'apparition de résonance pour un harmonique d'ordre quelconque est l'annulation de la composante réactive de l'impédance d'entrée pour cet harmonique.

Dans l'étude des phénomènes de résonance pour des courants non sinusoïdaux on suppose habituellement que les résistances actives des bobines d'inductance soient nulles.

Dans ce dernier cas l'impédance d'entrée pour une résonance de courant est égale à l'infini, tandis que pour une résonance des tensions elle est nulle.

Il y a lieu de signaler que pour un régime de résonance ou un régime proche de ce dernier pour un harmonique supérieur d'ordre quelconque, les courants et/ou les tensions de cet harmonique peuvent être supérieurs aux courants et aux tensions du premier harmonique dans les mêmes tronçons du circuit; ceci peut avoir lieu même si l'amplitude de l'harmonique supérieur en question de la F.E.M. à l'entrée du circuit est plusieurs fois plus petite que l'amplitude du premier harmonique de la F.E.M.

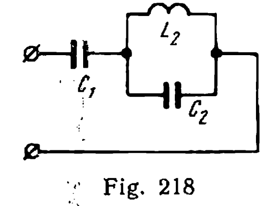


Fig. 218

Exemple 92. Soit L_2 l'inductance du schéma de la fig. 218. En supposant que la résistance active de la bobine d'inductance soit nulle, trouver les valeurs des capacités C_1 et C_2, pour lesquelles l'impédance d'entrée du circuit devient nulle pour le premier harmonique et est égale à l'infini pour le neuvième harmonique.

Solution. Ecrivons l'équation de l'impédance d'entrée du circuit pour le premier harmonique et égalons-la à zéro:

$$Z_1 = \frac{-j}{\omega C_1} + \frac{j\omega L_2 \left(\frac{-j}{\omega C_2}\right)}{j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = 0.$$

Ecrivons ensuite que l'impédance d'entrée pour le neuvième harmonique est égale à l'infini:

$$Z_9 = \frac{-j}{9\omega C_1} + \frac{j9\omega L_2\left(\frac{-j}{9\omega C_2}\right)}{j\left(9\omega L_2 - \frac{1}{9\omega C_2}\right)} = \infty.$$

La solution en commun de ces équations donne:

$$\frac{1}{\omega C_2} = 81\omega L_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega C_1} = \frac{81}{80}\omega L_2.$$

§ 174. Valeur efficace d'un courant non sinusoïdal et valeur efficace d'une tension non sinusoïdale. Par définition (voir § 81) le carré de la valeur efficace du courant I est exprimé comme suit en fonction de la valeur instatanée du courant i:

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt.$$

Si le courant

$$i = I_0 + I_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2) + \ldots,$$

on a

$$i^2 = I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) + \sum_{\substack{p=0 \\ q=0\ p\neq q}}^{\infty} I_{pm} I_{qm} \sin \times$$

$$\times (p\omega t + \psi_p)\sin(q\omega t + \psi_q).$$

Mais

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T \sin^2(k\omega t + \psi_k)\, dt = \frac{T}{2}, \\ &\int_{\substack{0\\ p\neq q}}^T \sin(p\omega t + \psi_p)\sin(q\omega t + \psi_q)\, dt = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.10)$$

Par conséquent,

$$I^2 = I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \frac{I_{3m}^2}{2} + \ldots$$

ou

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \ldots}$$

Du fait que l'amplitude de l'harmonique d'ordre k du courant I_{km} est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la valeur efficace de I_k de l'harmonique d'ordre k, on a

$$\frac{I_{km}^2}{2}=\frac{I_{km}}{\sqrt{2}}\frac{I_{km}}{\sqrt{2}}=I_k^2$$

et

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+I_3^2+\ldots} \tag{8.11'}$$

Par conséquent, la valeur efficace d'un courant non sinusoïdal est égale au carré de la somme des carrés de la composante continue du courant et des valeurs efficaces des harmoniques de divers ordres. La valeur efficace ne dépend pas des déphasages ψ_k.

De même, la valeur efficace U d'une tension non sinusoïdale est égale à la racine carrée de la somme des carrés de la composante continue et des valeurs efficaces des harmoniques de divers ordres

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+U_3^2+\ldots} \tag{8.11}$$

Exemple 93. En partant des données de l'exemple 91, calculer la valeur efficace du courant i dans la partie non ramifiée du circuit, ainsi que la valeur efficace de la F.E.M. e.

Solution

$$I=\sqrt{33{,}3^2+\frac{17{,}87^2}{2}+\frac{5{,}59^2}{2}}=35{,}6\ A;$$

$$E=\sqrt{100^2+\frac{80^2}{2}+\frac{60^2}{2}+\frac{50^2}{2}}=127{,}1\ V.$$

§ 175. Valeur moyenne en module d'une fonction non sinusoïdale. On appelle valeur moyenne en module d'une fonction, sa valeur moyenne calculée de la manière suivante:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\omega t)\,d\omega t.\right. \tag{8.12}$$

Contrairement à la valeur efficace, elle dépend des angles de déphasage ψ_k.

Exemple 94. Si on prend comme origine des temps l'instant de passage par zéro du premier harmonique du courant et si on tient compte que l'origine de l'harmonique du courant k est décalée par rapport à l'origine du premier harmonique de 1 angle $(\psi_k - k\psi_1)$ (voir § 171), on obtient après intégration pour les courbes $f(\omega t)$, ne contenant pas de composante continue ni d'harmoniques pairs, l'expression suivante:

$$I_{\substack{moy\\ e\ module}}=\frac{2}{\pi}\left[I_{1m}+\cos\alpha+\sum_{k=3,5,7\ldots}\frac{1}{k}I_{km}\cos(\psi_k-k\psi_1)\right], \tag{8.13}$$

α — étant l'angle pour lequel $f(\omega t)$ s'annule (on suppose que cette expression ne change pas de signe au cours d'une alternance).

§ 176. Quelles sont les valeurs auxquelles réagissent les ampèremètres et les voltmètres des différents systèmes lorsque les courants qui les parcourent ne sont pas sinusoïdaux? Les courants et les tensions non sinu-

soïdaux peuvent être mesurés à l'aide d'instruments de différents systèmes.

Les appareils des systèmes électromagnétique, électrodynamique et thermique réagissent à la valeur efficace, les appareils magnéto-électriques à redresseur — à la valeur moyenne en module de la grandeur mesurée, les appareils magnéto-électriques sans redresseur — à sa composante continue, les voltmètres électroniques de crête — à la valeur maximale de la fonction mesurée *.

§ 177. Puissances active et apparente d'un courant non sinusoïdal. On appelle puissance active P d'un courant non sinusoïdal la valeur moyenne de la puissance instantanée pendant une période du premier harmonique:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui\,dt.$$

Si on exprime la tension u et le courant i par des séries de Fourier

$$u = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \ldots$$

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \ldots,$$

et si on substitue ces séries à l'expression figurant sous le signe somme, on obtient après intégration, compte tenu des relations (8.10):

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + U_3 I_3 \cos\varphi_3 + \ldots \tag{8.14}$$

Ainsi, la puissance active d'un courant non sinusoïdal est égale à la somme des puissances actives de ses divers harmoniques.

a) b) c) d) e)

Fig. 219

La puissance apparente S est égale au produit de la valeur efficace de la tension non sinusoïdale par la valeur efficace du courant non sinusoïdal:

$$S = UI, \tag{8.15}$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots};$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}$$

* Rappelons que tous les appareils de mesure portent sur leur face un symbole indiquant le système auquel cet appareil appartient. Ces symboles sont donnés sur la fig. 219: *a* — système magnéto-électrique; *b*—système électromagnétique; *c*—système électrodynamique; *d*—système thermique; *e*—système magnéto-électrique avec redresseur.

Exemple 95. Calculer P et S si

$u = 25,9 \sin(\omega t - 11°40') + 6 \sin(3\omega t + 53°50')\ V$;

$i = 3 \sin(\omega t - 40°) + 0,9\sqrt{2} \sin(3\omega t + 125°)\ A$.

Solution.

$$U_1 = \frac{25,9}{\sqrt{2}} = 18,3\ V;\ U_3 = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,26\ V;$$

$$I_1 = 2,13\ A;\ I_3 = 0,9\ A;$$

$$\varphi_1 = -11°40' - (-40°) = 28°20';\ \varphi_3 = -71°10';$$

$$P = 18,3 \cdot 2,13 \cos 28°20' + 4,26 \cdot 0,9 \cos(-71°10') = 35,5\ W.$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{18,3^2 + 4,26^2} = 18,55\ V;$$

$$I = \sqrt{2,13^2 + 0,9^2} = 2,31\ A;$$

$$S = UI = 18,55 \cdot 2,31 = 42,8\ VA.$$

§ 178. Substitution aux courants et tensions non sinusoïdaux par leurs équivalents sinusoïdaux. Lorsqu'on étudie certaines propriétés les plus simples des circuits électriques non linéaires (cette question sera traitée au chapitre IX), on substitue aux courants et aux tensions non sinusoïdaux leurs équivalents sinusoïdaux. Cette substitution doit être faite de manière que la valeur efficace du courant sinusoïdal substitué soit égale à la valeur efficace du courant non sinusoïdal donné et que la valeur efficace de la tension sinusoïdale soit égale à la valeur efficace de la tension non sinusoïdale.

L'angle de déphasage φ_e entre les sinusoïdes équivalentes de tension et de courant est pris de manière que la puissance active du courant sinusoïdal équivalent soit égale à la puissance active du courant non sinusoïdal :

$$\cos \varphi_e = \frac{P}{UI}. \tag{8.16}$$

Exemple 96. Substituer au courant et à la tension non sinusoïdaux de l'exmple 95 leurs équivalents sinusoïdaux et trouver l'angle de déphasage φ_e entre eux.

Solution. La valeur efficace de la tension sinusoïdale est $U = 18,55\ V$.

Valeur efficace du courant sinusoïdal $I = 2.31\ A$;

$$\cos \varphi_e = \frac{35,5}{18,55 \cdot 2,31} = 0,828;\ \varphi_e = 34°.$$

§ 179. Particularités du fonctionnement des systèmes triphasés du fait des harmoniques d'ordres multiples de 3. Les forces électromotrices de chaque phase d'un transformateur triphasé ou d'un alternateur triphasé sont souvent non sinusoïdales. Chacune des F.E.M. (e_A, e_B, e_C) reproduit la forme des deux autres, mais avec un déphasage d'un tiers

de période $\left(\frac{T}{3}\right)$ et peut être décomposée en harmoniques. En général il n'existe pas de composante continue.

Soit l'harmonique k de la F.E.M. de la phase A:

$$e_{kA} = E_{km} \sin (k\omega t + \psi_k).$$

Du fait que la F.E.M. de la phase B est en retard de $\frac{T}{3}$ sur la F.E.M. de la phase A, et que la F.E.M. de la phase C est en avance de $\frac{T}{3}$ sur la F.E.M. de la phase A, les harmoniques d'ordre k des F.E.M. des phases B et C sont respectivement:

$$e_{kB} = E_{km} \sin \left[k\omega \left(t - \frac{T}{3}\right) + \psi_k \right] = E_{km} \sin (k\omega t - 120°k + \psi_k);$$

$$e_{kC} = E_{km} \sin \left[k\omega \left(t + \frac{T}{3}\right) + \psi_k \right] = E_{km} \sin (k\omega t + 120°k + \psi_k);$$

$$k\omega \frac{T}{3} = k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{3} = k \frac{2\pi}{3} = 120°\, k.$$

Si k prend les valeurs 1, 4, 7, 10, l'harmonique d'ordre k de la F.E.M. de la phase B retarde de 120° sur l'harmonique k de la F.E.M. de la phase A. Par conséquent, les harmoniques d'ordre 1, 4, 7 et 10 forment un système polyphasé direct (voir § 154 pour la définition du système polyphasé direct).

Si $k = 2, 5, 8, 11$, l'harmonique d'ordre k de la F.E.M. de la phase B est en avance de 120° sur l'harmonique d'ordre k de la phase A. Par conséquent, les deuxième, cinquième, huitième harmoniques, etc. forment un système polyphasé inverse.

Les harmoniques d'ordres multiples de 3 ($k = 3, 6, 9, \ldots$) forment un système homopolaire, c'est-à-dire que les troisièmes harmoniques de toutes les trois phases sont en phase ($3 \cdot 120° = 360°$):

$$e_{3A} = e_{3B} = e_{3C} = E_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3);$$

les sixièmes harmoniques sont également en phase, etc.

Le fait que les troisièmes harmoniques de toutes les trois phases sont en phase est confirmé à l'aide de la fig. 220.

Sur cette figure, les F.E.M. e_A, e_B, e_C représentent les F.E.M. des trois phases d'un alternateur triphasé. Elles ont une forme rectangulaire et sont déphasées les unes par rapport aux autres d'un tiers de période de la fréquence fondamentale.

Les premier et troisième harmoniques de chaque F.E.M. sont représentés sur la même figure. On voit que les troisièmes harmoniques sont effectivement en phase.

Discutons maintenant les particularités du fonctionnement des systèmes triphasés, dues aux harmoniques multiples de 3.

1. Lorsque les enroulements d'un alternateur triphasé ou d'un transformateur triphasé sont couplés en triangle (fig. 221, a), ces enroule-

ments sont parcourus par des courants des harmoniques d'ordres multiples de 3, même en l'absence d'une charge extérieure.

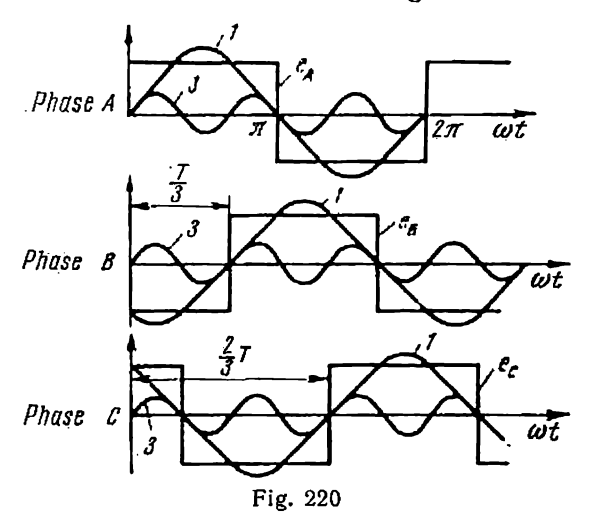


Fig. 220

La somme algébrique des troisièmes harmoniques des F.E.M. est égale à $3E_3$ pour un couplage en triangle *. Désignons par Z_3 l'impédance

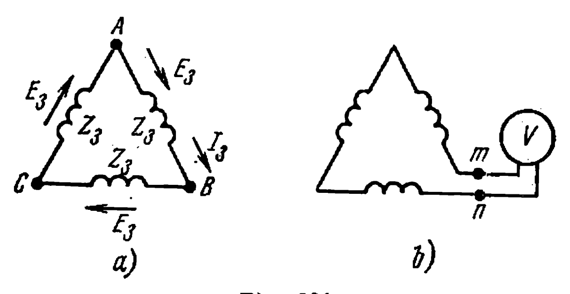


Fig. 221

de l'enroulement de chaque phase pour le troisième harmonique ; on peut écrire alors que le courant du troisième harmonique dans un triangle est

$$\dot{I}_3 = \frac{3\dot{E}_3}{3Z_3} = \frac{\dot{E}_3}{Z_3} ;$$

de même le courant pour le sixième harmonique

$$\dot{I}_6 = \frac{\dot{E}_6}{Z_6} ,$$

* Cependant la somme algébrique des premiers harmoniques des F.E.M., ainsi que de tous les harmoniques des F.E.M. non multiples de 3, est nulle et, par conséquent, aucun courant dû aux harmoniques énumérés ne circule dans un triangle fermé en l'absence de charge.

où E_6 — la valeur efficace du sixième harmonique de la F.E.M. de phase. Z_6 — impédance de la phase pour le sixième harmonique.

La valeur efficace du courant circulant dans un triangle fermé du circuit de la fig. 221, *a* est

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \ldots}$$

2. Si les enroulements d'un alternateur triphasé ou d'un transformateur triphasé sont couplés en triangle ouvert (fig. 221, *b*) et en présence dans les F.E.M. des phases des harmoniques multiples de 3, on

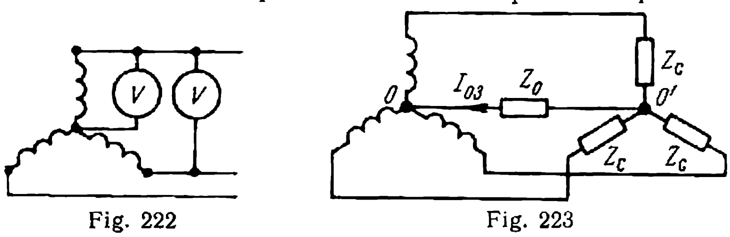


Fig. 222 Fig. 223

obtient aux bornes *mn* une tension égale à la somme des F.E.M. des harmoniques multiples de 3:

$$u_{mn} = 3E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + 3E_{6m} \sin(6\omega t + \psi_6) + \ldots$$

Un voltmètre branché au circuit de la fig. 221, *b* indique

$$U = 3\sqrt{E_3^2 + E_6^2 + \ldots}$$

3. Il n'existe pas d'harmoniques d'ordres multiples de 3 dans la tension de ligne, que les enroulements de l'alternateur ou du transformateur soient couplés en étoile ou en triangle.

Démontrons cette troisième propriété pour le cas de marche à vide d'un alternateur ou d'un transformateur, c'est-à-dire en l'absence d'une charge extérieure. Toutefois, cette propriété est vraie même en présence d'une charge.

Examinons d'abord un couplage en triangle (fig. 221, *a*). Désignons par $\dot{\varphi}_{A3}$ le potentiel du point *A* et par $\dot{\varphi}_{B3}$ le potentiel du point *B*, pour le troisième harmonique; nous avons alors

$$\dot{\varphi}_{A3} = \dot{\varphi}_{B3} - \dot{E}_3 + \dot{I}_3 Z_3.$$

Mais $\dot{E}_3 = \dot{I}_3 Z_3$ et, par conséquent, $\dot{\varphi}_{A3} = \dot{\varphi}_{B3}$.

Pour un couplage en étoile (fig. 222) la tension de ligne du troisième harmonique est égale à la différence des tensions de phase correspondantes. Du fait que les troisièmes harmoniques des tensions de phases sont en phase, il faut les déduire lorsqu'on calcule cette différence.

Toutes les harmoniques peuvent être présentes dans une tension de phase (mais il n'y existe pas habituellement de composante continue). Par conséquent, la valeur efficace d'une tension de phase est:

$$U_{ph} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \ldots}$$

Les harmoniques d'ordres multiples de 3 sont absents dans la tension de ligne de la fig. 222 et, par conséquent,

$$U_l = \sqrt{3}\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \ldots}$$

Le rapport $\frac{U_l}{U_{ph}} < \sqrt{3}$, s'il existe des harmoniques d'ordres multiples de 3.

4. Lorsque l'alternateur et une charge uniforme sont couplés en étoile et en l'absence du conducteur neutre, les courants homopolaires des harmoniques du troisième et d'autres ordres supérieurs ne peuvent circuler dans les conducteurs de ligne (ceci a été examiné en détail au § 152). Par conséquent, la tension suivante agira entre les points neutres du récepteur O' et de l'alternateur O (fig. 223 pour $Z_0 = \infty$)

$$u_{O'O} = E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + E_{6m} \sin(6\omega t + \psi_6) + \ldots$$

Sa valeur efficace est

$$U_{O'O} = \sqrt{\frac{E_{3m}^2}{2} + \frac{E_{6m}^2}{2} + \ldots}$$

5. Si pour un couplage étoile — étoile et pour une charge uniforme des phases on désigne par Z_{ch3} l'impédance de la charge pour le troisième harmonique et par Z_{03} l'impédance du conducteur neutre pour le troisième harmonique également (fig. 223), le courant du troisième harmonique circulant dans le conducteur neutre est:

$$\dot{I}_{03} = \frac{\dot{E}_3}{Z_{03} + \frac{Z_{ch3}}{3}}.$$

Chacun des trois conducteurs de ligne sera parcouru par un courant de troisième harmonique égal à $\frac{\dot{I}_{03}}{3}$.

On trouve d'une manière analogue les courants pour les autres harmoniques d'ordres multiples de 3.

Exemple 97. Soit la valeur instantanée de la tension de la phase A d'un alternateur triphasé:

$$u_A = 127 \sin(\omega t + 10^\circ) + 30 \sin(3\omega t + 20^\circ) + 20 \sin(11\omega t + 15^\circ)\ V.$$

On demande d'écrire la valeur instantanée de la tension de ligne u_{AB}, l'alternateur étant couplé en étoile.

Solution. Il n'y a pas de troisième harmonique dans la tension de ligne.

Les premiers harmoniques des phases A et B sont déphasés de 120°. Par conséquent, la tension de ligne $\dot{U}_{AB}$ du premier harmonique est de $\sqrt{3}$ fois plus grande que la tension de phase du premier harmonique $\dot{U}_A$ et elle est en avance de 30° sur ce dernier.

Le onzième harmonique (pour un ordre inverse de phase) de la tension de ligne est en retard de 30° sur le onzième harmonique de la tension de la phase A ; il est $\sqrt{3}$ fois plus grand que ce dernier

$$u_{AB} = 127\sqrt{3}\sin(\omega t + 40°) + 20\sqrt{3}\sin(11\omega t - 15°)\ V.$$

E x e m p l e 98. Soit la F.E.M. de la phase A du circuit de la fig. 224: $e_A = 170 \sin \omega t + 80 \cos 3\omega t + 34 \cos 9\omega t\ V$; $R = 9\Omega$; $\omega L = 2\Omega$.

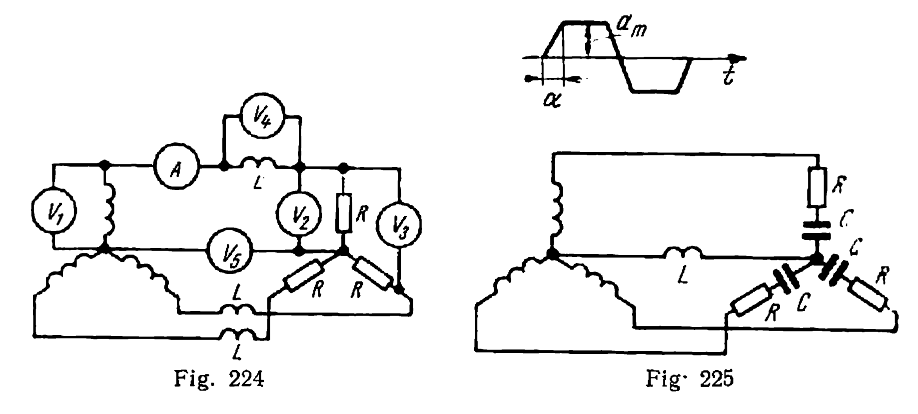


Fig. 224 Fig. 225

Calculer les valeurs indiquées par tous les appareils de mesure, qui sont tous du système électrodynamique.

S o l u t i o n. Valeur efficace de la F.E.M.

$$E_1 = \frac{170}{\sqrt{2}} = 121\ V;\ E_3 = 56{,}5\ V;\ E_9 = 24{,}2\ V.$$

Premier harmonique du courant circulant dans le conducteur de ligne

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{121}{9{,}2} = 13{,}2\ A.$$

Le voltmètre V_1 indique

$$\sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_9^2} = 136\ V.$$

Le voltmètre V_2 indique

$$I_1 R_1 = 13{,}2 \cdot 9 = 118{,}5\ V.$$

Le voltmètre V_3 indique

$$\sqrt{3} \cdot 118{,}5 = 205\ V.$$

Le voltmètre V_4 indique

$$I_1 \omega L = 26{,}4\ V.$$

Et, enfin, le voltmètre V_5 indique

$$\sqrt{E_3^2 + E_9^2} = 62{,}3\ V.$$

Exemple 99. La F.E.M. de chaque phase de l'alternateur (fig. 225) varie suivant une loi trapézoïdale: $a_m = 220\ V$, $\alpha = 10°$. La charge est uniforme; $R = 6\Omega$; $\omega L = 0{,}5\Omega$; $\frac{1}{\omega C} = 12\Omega$.

Ecrire la valeur instantanée du courant dans le conducteur neutre, en négligeant les harmoniques du courant d'ordres supérieurs au septième.

Solution. En partant du tableau (voir p. 231) écrivons le développement en série d'une F.E.M. trapézoïdale

$$e_A = \frac{4a_m}{\alpha\pi}\left(\sin\alpha\sin\omega t + \frac{1}{9}\sin 3\alpha\sin 3\omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{25}\sin 5\alpha\sin 5\omega t + \frac{1}{49}\sin 7\alpha\sin 7\omega t\right),$$

ou

$$e_A = \frac{4\cdot 220}{\frac{\pi}{18}\cdot\pi}\left(\sin 10°\sin\omega t + \frac{1}{9}\sin 30°\sin 3\omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{25}\sin 50°\sin 5\omega t + \frac{1}{49}\sin 70°\sin 7\omega t\right).$$

Par conséquent,

$$e_A = 274\sin\omega t + 89{,}3\sin 3\omega t + 49{,}5\sin 5\omega t + 30{,}9\sin 7\omega t.$$

Seul le troisième harmonique du courant circule dans le conducteur neutre

$$\dot{I}_{03} = \frac{\dot{E}_3}{Z_{03} + \frac{Z_{ch3}}{3}};\quad E_3 = \frac{89{,}3}{\sqrt{2}} = 63{,}3\ V;$$

$$Z_{03} = 1{,}5j;\quad Z_{ch3} = 6 - 4j;\quad \frac{Z_{ch3}}{3} = 2 - j1{,}33;$$

$$I_{03} = \frac{63{,}3}{1{,}5j + 2 - j1{,}33} = 31{,}8e^{-j4°40'}\ A.$$

Valeur instantanée du courant $i_{03} = 44{,}8\sin(3\omega t - 4°40')\ A$.

§ 180. Battements. Le phénomène oscillatoire, résultant de l'addition de deux oscillations sinusoïdales de même amplitude A et de pulsations ω_1 et ω_2 peu différentes mais non égales, donne lieu à une oscillation, appelée battement.

Soit

$$f(t) = A\sin\omega_1 t + A\sin\omega_2 t.$$

Utilisons la transformation trigonométrique connue

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Par conséquent, $f(t)$ peut être écrit comme suit:

$$f(t) = 2A\cos\Omega t\sin\omega t,$$

où

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \text{ et } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\quad (\Omega\quad \omega).$$

La courbe de l'oscillation résultante est représentée sur la fig. 226. L'amplitude de cette oscillation varie suivant la loi $2A \cos \Omega t$. L'enveloppe des oscillations est représentée en pointillé.

Le phénomène de battements découlant de l'addition de deux oscillations sinusoïdales, à amplitudes égales et à fréquences peu différentes (mais non égales), est utilisé en pratique à plusieurs fins différentes, en particulier pour constater que les oscillations ajoutées n'ont pas les mêmes fréquences.

§ 181. Oscillations modulées. En téléphonie et en radiotechnique on utilise très largement des oscillations modulées. On appelle oscillation modulée $f(t) = A \sin(\omega t + \psi)$ une oscillation pour laquelle l'amplitude A, la fréquence ω et la phase ψ, ou toutes ces trois valeurs simultanément, varient dans le temps.

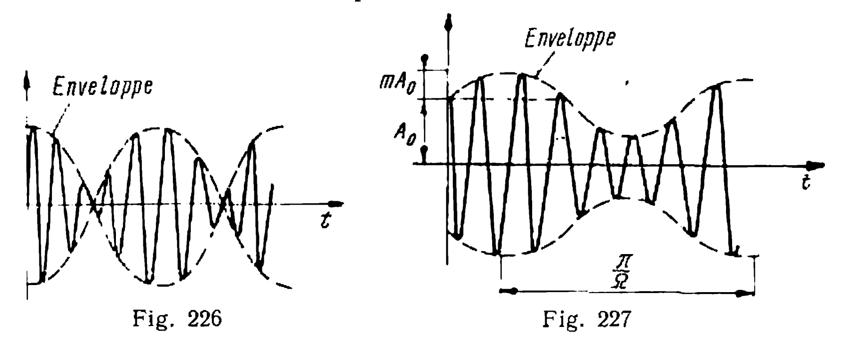


Fig. 226 Fig. 227

L'oscillation pour laquelle l'amplitude A varie seule, tandis que la fréquence angulaire ω et la phase ψ restent invariables, est appelée oscillation modulée en amplitude.

L'oscillation dont la fréquence angulaire ω varie seule, tandis que l'amplitude A et la phase ψ restent invariables, est appelée oscillation modulée en fréquence.

L'oscillation pour laquelle la phase ψ varie seule, tandis que l'amplitude A et la fréquence angulaire ω restent invariables, est appelée oscillation modulée en phase.

L'oscillation modulée en amplitude la plus simple est une oscillation dont l'amplitude est modulée suivant une loi sinusoïdale:

$$f(t) = A_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin(\omega t + \psi),$$

à $\Omega \ll \omega$; m — taux de la modulation; en général $m < 1$.

La courbe de ces oscillations est représentée sur la fig. 227. L'enveloppe de la courbe est tracée en pointillé.

Si on fait appel à l'identité, bien connue en trigonométrie, $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$, l'oscillation $A_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin(\omega t + \psi)$ peut être écrite sous la forme de somme des trois oscillations

$$f(t) = A_0 \sin(\omega t + \psi) + \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega - \Omega) t + \psi] - \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega + \Omega) t + \Omega].$$

La fréquence angulaire ω est appelée porteuse et les fréquences $(\omega - \Omega)$ et $(\omega + \Omega)$ sont appelées fréquences latérales.

Exemple 100. Décomposer la fonction $f(t) = 20\,(1 + 0{,}6 \sin 10^3 t) \sin 10^5 t$ en ses composantes.

Solution. $\omega - \Omega = 99 \cdot 10^3$; $\omega + \Omega = 101 \cdot 10^3$; $\frac{mA_0}{2} = 6$.

Par conséquent,

$$f(t) = 20 \sin 10^5 t + 6 \cos (99 \cdot 10^3 t) - 6 \cos (101 \cdot 10^3 t).$$

§ 182. Calcul des circuits linéaires, soumis à l'effet des oscillations modulées. Les courants et les tensions engendrés dans un circuit électrique linéaire sous l'effet des oscillations modulées sont calculés en décomposant les oscillations, en calculant les courants et les tensions dus à chaque composante séparément et en additionnant ensuite les courants et les tensions ainsi trouvés conformément au principe de la superposition.

CHAPITRE IX

CIRCUITS ÉLECTRIQUES NON LINÉAIRES À COURANT ALTERNATIF

§ 183. Définition des circuits électriques non linéaires à courant alternatif. On appelle circuits électriques non linéaires à courant alternatif les circuits électriques à courant alternatif, comprenant une ou plusieurs résistances non linéaires.

§ 184. Répartition des résistances non linéaires en trois groupes principaux. Il a été indiqué dans la première partie de ce cours que non seulement les résistances actives, mais également les inductances et les capacités s'opposent à la circulation du courant alternatif. Par conséquent, les résistances non linéaires en courant alternatif peuvent être subdivisées en trois groupes essentiels: groupe des résistances actives non linéaires, groupe des réactances inductives non linéaires et groupe des réactances capacitives non linéaires. Chacun de ces groupes peut être subdivisé à son tour en deux sous-groupes: résistances contrôlables et non contrôlables.

Les résistances non linéaires contrôlables sont en général celles qui possèdent une ou plusieurs électrodes (bornes) de commande ou enroulements de commande, intercalés dans le circuit ou les circuits de commande, en agissant sur le courant ou la tension desquels on peut contrôler la résistance intercalée dans le circuit principal. En l'absence d'électrodes ou d'enroulements spéciaux de commande, le courant ou la tension de commande peuvent agir sur la résistance non linéaire par l'intermédiaire des électrodes ou des enroulements du circuit principal.

§ 185. Généralités sur les résistances actives non linéaires. Les résistances actives non linéaires contrôlables les plus répandues sont les tubes à trois électrodes (et plus) et les triodes à cristal (les transistors). Les propriétés, le principe de fonctionnement, les caractéristiques et les applications de ces transistors seront examinés aux §§ 210 — 225.

Parmi les résistances actives non linéaires non contrôlables on peut citer l'arc, les redresseurs à oxyde de cuivre et au sélénium, les thyrites et les vilites, les thermistances, les barretters, les lampes à incandescence, etc. Leurs propriétés essentielles et leurs caractéristiques courant-tension ont été examinées au deuxième chapitre.

En plus de la classification des résistances actives non linéaires en résistances contrôlables et non contrôlables, elles peuvent être également classées suivant le taux d'influence de la température de leur échauffement, dû au courant circulant dans la résistance, sur la forme de la caractéristique courant-tension.

Du fait que les phénomènes thermiques (ceux d'échauffement et de refroidissement) sont des phénomènes ayant une certaine inertie, les résistances dont la non-linéarité des caractéristiques courant-tension dépend entièrement des variations de la température, provoquées par

l'échauffement par le courant circulant dans la résistance, sont appelées *résistances à grande inertie*.

Les résistances dont la non-linéarité des caractéristiques courant-tension dépend d'autres phénomènes (non thermiques) sont appelées *résistances sans inertie* *.

Les représentants les plus typiques de la catégorie des résistances à grande inertie sont les lampes à incandescence, les thermistances et les barretters. Parmi les résistances les plus typiques de la catégorie des résistances sans inertie on peut citer les tubes électroniques, ainsi que les diodes et les triodes à cristal (les transistors).

Si la constante du temps de l'échauffement d'une résistance à grande inertie est nettement plus grande que la période du courant alternatif, la valeur de la résistance au cours d'une période du courant alternatif reste pratiquement constante et dépend non pas de la valeur instantanée du courant alternatif, mais de sa valeur efficace. Si on applique à une résistance non linéaire à grande inertie une tension sinusoïdale (à condition que la constante du temps de l'échauffement de cette résistance soit nettement plus grande que la période de la tension sinusoïdale), le courant circulant dans cette résistance est pratiquement sinusoïdal.

On peut dire ainsi que les résistances non linéaires à grande inertie occupent une place intermédiaire entre les résistances linéaires et non linéaires. Elles se rapprochent des résistances non linéaires du fait que leur résistance est fonction de la valeur efficace du courant et elles se rapprochent des résistances linéaires parce qu'en régime permanent leur résistance aux différents instants à l'intérieur d'une période de la F.E.M., agissant sur le circuit dont elles font partie, reste pratiquement constante.

§ 186. Généralités sur les réactances inductives non linéaires. On appelle réactances inductives non linéaires ou, plus simplement, inductances non linéaires les bobines d'inductance enroulées sur des noyaux à circuit magnétique fermé en matériau ferromagnétique, pour lesquelles, le flux magnétique dans le noyau varie en fonction du courant circulant dans la bobine suivant une loi non linéaire. La réactance inductive opposée par ces bobines au passage d'un courant alternatif n'est pas constante; elle dépend de la valeur de ce courant alternatif.

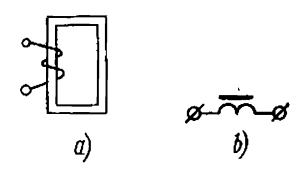


Fig. 228

Les inductances non linéaires sont classées en inductances contrôlables et non contrôlables; mais la classification en inductances sans inertie et en inductances à grande inertie ne s'applique pas dans ce cas, car leur non-linéarité dépend des propriétés du matériau ferromagnétique et non pas de l'effet thermique.

Dans un schéma électrique une inductance non linéaire est représentée soit sous forme d'un noyau fermé, portant un enroulement (fig. 228, *a*) , soit sous forme d'une inductance avec deux traits parallèles à côté (fig. 228, *b*).

Les noyaux des inductances non linéaires, utilisées pour des fréquences relativement basses, sont habituellement de deux types: noyaux en paquets ou ceux en spirale. Les noyaux en paquet sont constitués

* Il serait plus exact de les appeler résistances à très faible inertie.

par des plaques minces en matériau ferromagnétique de forme annulaire, en П ou en Ш.

Les noyaux en spirale sont constitués par un ruban ferromagnétique fin, enroulé en spires serrées. Leur forme rappelle celle d'un spiral de montre.

Les plaquettes d'un noyau en paquet et les diverses spires d'un noyau en spirale sont isolées les unes des autres par un vernis émail, du verre soluble ou toute autre substance isolante, et étuvées ensuite. Un tel isolement est nécessaire pour réduire les pertes d'énergie par courants de Foucault dans les noyaux (voir § 187).

Les pertes dans les tôles augmentent très rapidement avec l'élévation de la fréquence et, par conséquent, les noyaux appelés à fonctionner à haute fréquence sont habituellement exécutés en ferrite (pour les propriétés des ferrites voir § 48 de la première partie de ce cours).

§ 187. Pertes par courants de Foucault dans les noyaux des inductances non linéaires. Lorsqu'une bobine à noyau en fer est parcourue par un courant alternatif, un flux magnétique variable se trouve engendré dans ce noyau. Des courants de Foucault prennent naissance dans les tôles du noyau sous l'effet du flux magnétique variable. Une tôle d'un tel noyau est représenté sur la fig. 229. Supposons que le flux magnétique soit dirigé vers le haut lorsqu'il augmente (le long de la tôle). Conformément à la loi de l'induction électromagnétique, une F.E.M. se trouve induite dans la tôle dans le plan perpendiculaire au flux magnétique. Cette F.E.M. donne naissance à un courant appelé courant de Foucault. La maille du circuit le long de laquelle se ferme le courant de Foucault est représentée en pointillé sur la fig. 229. Suivant la loi de Lenz les courants de Foucault tendent à créer un flux opposé à celui qui les a engendrés.

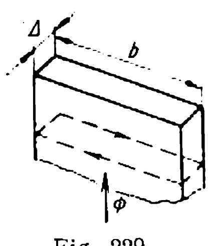


Fig. 229

Les pertes d'énergie par courants de Foucault dans une tôle sont proportionnelles au carré de la F.E.M. induite dans les circuits magnétiques en tôles et inversement proportionnelles à la résistance de ce circuit. Les forces électromotrices induites dans les circuits, le long desquels se ferment les courants de Foucault, sont proportionnelles à l'épaisseur Δ de la tôle lorsque cette épaisseur est constante, à l'amplitude de l'induction et à la fréquence. A son tour la résistance de chaque maille du circuit est proportionnelle à son périmètre et à la résistivité du matériau. Pour $b \gg \Delta$ le périmètre du circuit est pratiquement indépendant de l'épaisseur de la tôle. Par conséquent, les pertes d'énergie par courants de Foucault sont proportionnelles au carré de l'amplitude de l'induction, au carré de la fréquence et au carré de l'épaisseur de la tôle.

On peut donc réduire les pertes par courants de Foucault dans un noyau feuilleté de deux manières suivantes: 1) soit par l'exécution du noyau en tôles fines, isolées les unes des autres (comme ceci a été indiqué au § 186); 2) soit par addition au matériau ferromagnétique des impuretés favorables augmentant sa résistivité.

Pour une fréquence de 50 *Hz* l'épaisseur des tôles est habituellement comprise entre 0,35 et 0,5 *mm*; pour les hautes fréquences elle peut être ramenée à 0,005 *mm*.

En plus des pertes par courants de Foucault il existe également dans un noyau des pertes hystérétiques.

§ 188. Pertes hystérétiques. Il a été indiqué au § 46 de la première partie de ce cours qu'un phénomène d'hystérésis se manifeste dans un matériau ferromagnétique. La surface de la boucle d'hystérésis, exprimée en coordonnées B, H (B — induction, H — intensité du champ), caractérise l'énergie dégagée par unité de volume d'un matériau ferromagnétique pendant une période de courant alternatif (pendant une inversion du sens d'aimantation). Les pertes hystérétiques dans un noyau sont proportionnelles au volume de ce noyau, à la première puissance de la fréquence du courant et à la surface de la boucle d'hystérésis. Elles ne dépendent pas de l'épaisseur des tôles *.

§ 189. Schéma équivalent d'une inductance non linéaire. Pour les besoins de calcul on peut représenter l'inductance non linéaire de la fig. 228, *a* sous forme du schéma de la fig. 230, *a*. Sur ce schéma une

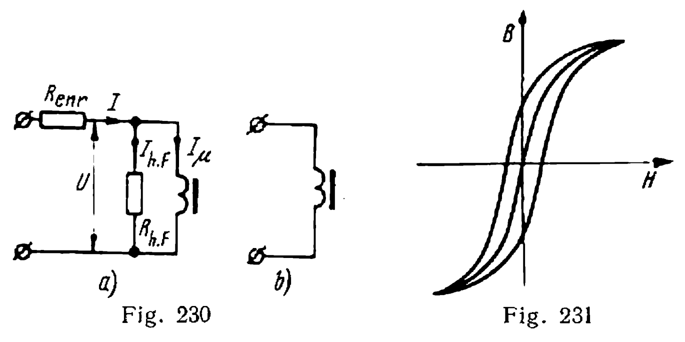


Fig. 230

Fig. 231

résistance $R_{h.F.}$ est branchée en parallèle à une inductance non linéaire idéalisée (sans pertes), les pertes dans cette résistance simulant les pertes hystérétiques d'énergie et les pertes par courants de Foucault; la résistance active de l'enroulement lui-même R_{enr} est branchée en série avec l'inductance; U — tension aux bornes de la résistance non linéaire.

Comme nous l'avons déjà dit, les pertes d'énergie par hystérésis et courants de Foucault $P_{h.F.}$ dépendent des propriétés du matériau ferromagnétique et de l'épaisseur des tôles du noyau.

Si le noyau est en matériau magnétique de mauvaise qualité les pertes dans ce noyau sont assez importantes, la résistance $R_{h.F.}$ est relativement faible et le courant $I_{h.F.} = \frac{U}{R_{h.F.}}$ peut être commensurable avec le courant I_μ circulant dans une inductance non linéaire idéalisée (sans pertes); il faut alors tenir compte dans les calculs, de la branche à résistance $R_{h.F.}$

* On ne tient pas compte du phénomène pelliculaire (voir troisième partie de ce cours).

Par contre, si le noyau est fabriqué en tôles fines d'un matériau magnétique doux de haute qualité, les pertes dans un tel noyau sont faibles, la résistance $R_{h.F.} = \frac{U^2}{P_{h.F.}}$ est grande et, par conséquent, on peut négliger la branche comportant cette résistance.

Souvent on admet une autre simplification encore, à savoir, on suppose que la résistance active de l'enroulement R_{enr} soit si faible qu'on peut négliger la chute de tension dans cette résistance. On a eu recours souvent à une simplification similaire lors du calcul des inductances linéaires. Sous ces réserves, la résistance d'une bobine à noyau d'acier devient purement inductive (le schéma équivalent approprié est représenté sur la fig. 230, *b*).

L'utilisation du schéma équivalent de la fig. 230, *b* à la place du schéma équivalent de la fig. 230, *a* s'explique par le désir de simplifier les calculs des circuits, en tenant compte seulement de l'effet fondamental utile non linéaire, à savoir de la dépendance non linéaire entre l'induction B et l'intensité du champ H et en négligeant l'effet secondaire nuisible, à savoir les pertes dans le noyau, dues à l'hystérésis et aux courants de Foucault.

Dans un phénomène périodique on tient compte de la non-linéarité entre B et H en utilisant pour les calculs une courbe dont les abscisses sont égales à la demi-somme des abscisses des branches ascendante et descendante de la boucle d'hystérésis limite (fig. 231).

§ 190. Généralités sur les condensateurs non linéaires. Dans les condensateurs ordinaires, les armatures sont séparées par des substances dont la permittivité est indépendante du champ électrique. Pour ces

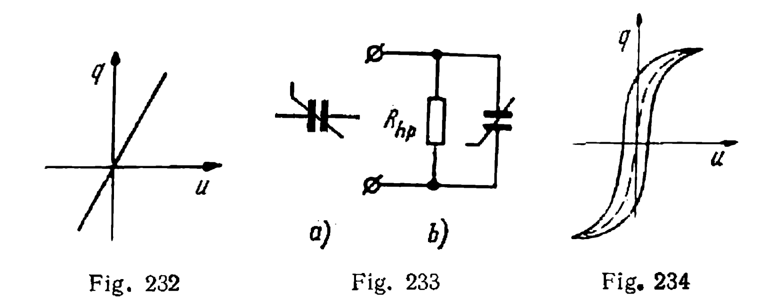


Fig. 232 Fig. 233 Fig. 234

substances la valeur instantanée de la charge à l'une des armatures en fonction de la valeur instantanée de la tension entre les armatures (la caractéristique charge-tension) est une droite (fig. 232), et leur capacité ne dépend pas de la tension u. Pour les condensateurs non linéaires la fonction $q = f(u)$ n'est pas linéaire (fig. 234).

On appelle parfois « varicondes » les condensateurs non linéaires.

L'espace entre les armatures d'un condensateur non linéaire est rempli de seignettodiélectrique. On appelle seignettodiélectriques les substances dont la permittivité est fonction du champ électrique. La

dénomination commune de seignettodiélectriques est affectée à ses substances parce que les propriétés en question ont été constatées pour la première fois pour les cristaux du sel de Seignette.

Dans les schémas électriques les varicondes sont représentés sous forme de condensateurs, pour lesquels l'espace entre les armatures est hachuré en biais (fig. 233, *a*).

Les seignettodiélectriques, de même que les substances ferromagnétiques sont sujettes à l'hystérésis. On appelle hystérésis électrique (diélectrique) le phénomène de retard de la variation du déplacement électrique D sur les variations du champ E. De même que ceci a lieu pour les substances ferromagnétiques, la surface de la boucle d'hystérésis en coordonnées D, E caractérise les pertes hystérétiques diélectriques par l'unité du volume du seignettodiélectrique pendant une période de variation de E.

En plus des pertes hystérétiques il existe également dans les varicondes des pertes dues au fait que la conductivité du seignettodiélectrique n'est pas nulle, ainsi qu'à certaines autres causes.

Le schéma équivalent d'un variconde (fig. 233, *b*) est tracé sous forme d'un variconde idéalisé (sans pertes) et d'une branche à résistance active $R_{\text{p. h}}$, couplés en parallèle; les pertes dans la résistance $R_{\text{p. h}}$ simulent pour les besoins du calcul les pertes actives dans le variconde.

L'existence des pertes dans les varicondes est un phénomène parasite nuisible. La boucle d'hystérésis correspondant est d'autant plus étroite et les pertes par boucle sont d'autant plus faibles, que les propriétés du seignettodiélectrique sont meilleures. Pour faciliter l'étude des propriétés des circuits électriques comprenant des varicondes, on néglige habituellement l'hystérésis et les pertes et on représente la fonction $q = f(u)$ sous forme de la courbe en pointillé de la fig. 234. Les abscisses de cette courbe sont égales à la demi-somme des abscisses des branches ascendante et descendante de la boucle d'hystérésis limite. Ce n'est que dans l'étude des circuits dont le fonctionnement même repose sur le phénomène d'hystérésis comme par exemple, lors de l'analyse du fonctionnement de certaines mémoires et calculatrices, qu'il faut tenir compte de l'hystérésis.

§ 191. Résistances non linéaires comme générateurs d'harmoniques supérieurs de courant et de tension. Si on branche une résistance non linéaire à un générateur de tension sinusoïdale, le courant circulant dans cette résistance a une forme non sinusoïdale et, par conséquent, la résistance non linéaire utilisée joue le rôle d'un générateur d'harmoniques supérieurs de courant. Pour s'en assurer, examinons la fig. 235. Sur cette figure la courbe *1* — caractéristique courant-tension de la résistance, la courbe *2* — tension sinusoïdale à ses bornes, et la courbe *3* — courant i, circulant dans la résistance.

Pour construire la courbe $i = f(\omega t)$ attribuons successivement à ωt les valeurs égales, par exemple, à 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, etc.; pour chacune de ses valeurs calculons la tension u, transportons la valeur de u, ainsi trouvée, sur la courbe $u = f(i)$ et à l'aide de cette courbe relevons le

courant i à l'instant considéré. Le courant i ainsi trouvé est porté sur la droite des ordonnées qui correspond à l'instant choisi.

Ces opérations sont indiquées par des flèches sur la fig. 235. On construit ainsi, point par point, la courbe *3*. Elle a une forme en pointe et peut être décomposée en harmoniques.

De même, si on fait circuler un courant sinusoïdal dans une résistance non linéaire, la tension aux bornes de cette résistance a une forme non sinusoïdale. Les courbes appropriées et la manière de les construire sont représentées sur la fig. 236. Par conséquent, une résistance non linéaire joue ici le rôle d'un générateur d'harmoniques supérieurs de tension.

Les amplitudes du premier harmonique de courant et des harmoniques supérieurs sont des fonctions non linéaires des amplitudes des harmoniques des tensions aux bornes des résistances non linéaires.

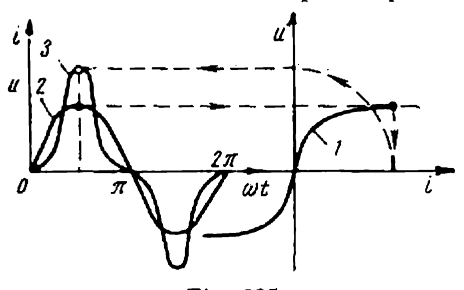


Fig. 235

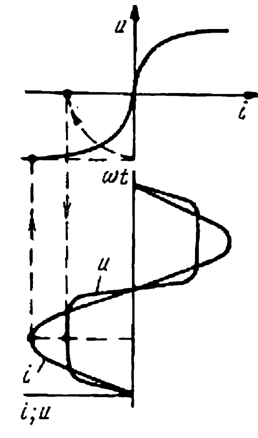


Fig. 236

Tout ceci gêne l'analyse et le calcul des circuits non linéaires, mais permet en même temps de réaliser à l'aide de ces circuits un certain nombre de transformations et conversions, importantes pour les besoins pratiques et irréalisables en principe à l'aide des circuits électriques linéaires.

§ 192. Transformations et conversions principales pouvant être réalisées à l'aide des circuits électriques non linéaires. La fig. 237, *a* représente schématiquement un quadripôle qui comprend une ou plusieurs résistances non linéaires. Appelons-le quadripôle non linéaire (QNL).

La fig. 237, *b* représente un hexapôle non linéaire (HNL). Par rapport au quadripôle il possède deux bornes (pôles) en plus, auxquelles on raccorde la source de la tension ou du courant de commande.

A l'aide des quadripôles ou des hexapôles non linéaires on peut réaliser un certain nombre des transformations et conversions très importantes, à savoir :

1. Convertir le courant alternatif en courant continu. Les dispositifs permettant de réaliser cette conversion sont appelés redresseurs (voir § 236).

2. Convertir le courant continu en courant alternatif. Cette conversion se fait à l'aide de dispositifs appelés autogénérateurs (voir § 239) et onduleurs.

3. Effectuer une multiplication de fréquences, c'est-à-dire obtenir à la sortie du quadripôle une tension dont la fréquence est plusieurs fois supérieure à la fréquence de la tension d'entrée. Les quadripôles à l'aide desquels on procède à la multiplication de fréquence sont appelés multiplicateurs de fréquence; les dispositifs doublant la fréquence sont appelés doubleurs de fréquence; ceux triplant la fréquence sont appelés tripleurs de fréquence, etc. Le principe de fonctionnement du tripleur de fréquence le plus simple est examiné au § 233.

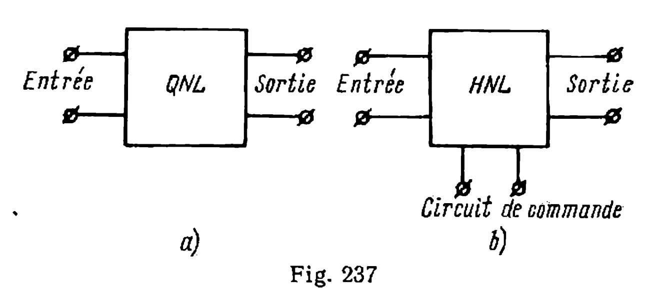


Fig. 237

4. Réaliser la division de la fréquence, c'est-à-dire effectuer une opération inverse à sa multiplication.

Les quadripôles permettant d'effectuer la division de la fréquence sont appelés diviseurs de fréquence. La théorie de leur fonctionnement ne sera pas examinée dans ce cours.

5. Stabiliser la tension ou le courant, c'est-à-dire obtenir à la sortie du quadripôle une tension ou un courant qui ne varient pratiquement pas même lorsque la variation de la tension d'entrée est importante. De tels quadripôles sont appelés stabilisateurs de tension (ou de courant). Les dispositifs permettant de réaliser la stabilisation de tension dans les circuits à courant continu ont été examinés au deuxième chapitre. La stabilisation de la tension à courant alternatif sera examinée au § 245.

6. Obtenir un effet de basculement. On appelle effet de basculement la variation brusque (par saut) de la valeur de sortie pour une faible variation de la valeur d'entrée. L'effet de basculement sera discuté aux §§ 241 et 244.

7. Comme ceci a déjà été indiqué au § 181, la modulation est un processus à l'aide duquel l'amplitude (la phase ou la fréquence) d'une oscillation à haute fréquence, délivrée à l'entrée du quadripôle, est transformée de manière que le caractère de ces variations reproduise le caractère des variations d'un signal de commande à basse fréquence.

On obtient ainsi une oscillation à haute fréquence, dont le caractère de variation de l'amplitude (de la phase ou de la fréquence) reproduit le caractère de variation du signal de commande à basse fréquence.

Les dispositifs permettant de réaliser la modulation sont appelés modulateurs. Le principe de fonctionnement d'un de ces modulateurs sera discuté au § 237.

8. Réaliser la démodulation. On entend par là le processus de rétablissement, à partir d'une oscillation modulée à haute fréquence, du signal de commande à basse fréquence, ayant servi à moduler cette oscillation.

Les dispositifs permettant de réaliser la démodulation sont appelés démodulateurs ou détecteurs.

Le dispositif détecteur le plus simple sera examiné au § 238.

9. Transformer à la demande la forme de la tension d'entrée. Ainsi, par exemple, lorsqu'une tension de forme sinusoïdale est appliquée à l'entrée d'un quadripôle non linéaire, on peut obtenir à sa sortie une tension de forme rectangulaire et triangulaire.

Certains dispositifs utilisés pour ces transformations ont été désignés suivant la forme de la tension ou du courant de sortie. Ainsi le transformateur de pointe est un dispositif permettant de transformer une tension sinusoïdale ou un courant sinusoïdal, appliqués à son entrée, en des impulsions (pointes) de courant ou de tension à sa sortie. Le principe de fonctionnement d'un de ces transformateurs de pointe sera examiné au § 234.

10. Obtenir une amplification de la tension (ou du courant).

On appelle amplification de tension le processus, grâce auquel on obtient à la sortie d'un dispositif non linéaire une tension nettement supérieure à la tension de commande appliquée à l'entrée de ce dispositif. La tension de commande peut être une tension continue ou alternative.

Les transformateurs ordinaires permettent également d'amplifier la tension; cependant, dans les amplificateurs de tension à résistances non linéaires, l'énergie consommée par le circuit de commande peut être cent, mille ou même plusieurs centaines de milliers de fois plus petite que l'énergie à la sortie de l'amplificateur; par contre, dans les transformateurs ordinaires ces énergies sont sensiblement égales.

En outre, les amplificateurs de tension à résistances non linéaires permettent d'amplifier non seulement une tension alternative, mais également une tension continue, et ceci avec une variation progressive du gain. L'amplificateur le plus simple d'une tension continue a été examiné au § 41.

11. Réaliser l'amplification de puissance. On appelle amplification de puissance le processus grâce auquel on obtient à la sortie d'un dispositif (dans sa charge) une puissance nettement plus grande que celle délivrée au circuit de commande.

Le dispositif permettant d'obtenir l'amplification de puissance est appelé amplificateur de puissance. L'amplificateur de puissance le plus simple sera examiné au § 246.

Le phénomène d'amplification de puissance demande quelques explications complémentaires. L'énergie délivrée à l'entrée d'un amplificateur de puissance (à l'entrée du quadripôle de la fig. 237, *a*), fournie par une source de signal se trouvant en dehors du quadripôle, est dépensée pour la commande du régime de fonctionnement de la résistance non linéaire faisant partie du quadripôle.

L'énergie dégagée dans la charge est fournie par une source toute différente, se trouvant soit à l'intérieur du quadripôle examiné, soit branchée à la sortie du quadripôle, en série avec la charge.

Lorsqu'on parle de l'amplification de puissance, on veut dire que l'accroissement de la pussance dégagée dans la charge est plus important que l'accroissement de la puissance utilisée pour modifier le régime de fonctionnement de la résistance non linéaire.

12. Réaliser une transformation exponentielle ou logarithmique de la tension et du courant d'entrée.

Les transformations non linéaires de cette nature ont été examinées au deuxième chapitre de ce cours (voir §§ 37 et 38).

En plus des transformations énumérées ci-dessus on peut réaliser à l'aide des circuits électriques non linéaires encore d'autres transformations non linéaires. On peut mentionner parmi elles, par exemple, le changement progressif de fréquence à l'aide de quadripôles et d'hexapôles non linéaires, ne comportant pas de pièces mobiles.

Les dispositifs non linéaires sont largement utilisés pour réaliser par voie électrique la multiplication de deux, trois fonctions ou plus (voir § 37 de la première partie de ce cours), ainsi que dans les calculatrices et mémoires électriques.

Pour certaines transformations énumérées dans le présent paragraphe (conversion du courant continu en courant alternatif et vice versa, modulation et démodulation, amplification du courant, de la tension et de la puissance) sont réalisées à l'aide de dispositifs non linéaires et sont appelées de ce fait transformations non linéaires; cependant, dans certaines conditions déterminées et dans une plage relativement restreinte des variations de la grandeur d'entrée, on peut obtenir une variation de l'amplitude (en valeur efficace ou moyenne) de la grandeur de sortie en fonction de l'amplitude (en valeur moyenne ou efficace) de la grandeur d'entrée suivant une loi pratiquement linéaire.

En dehors de cette plage, les variations de la grandeur de sortie en fonction de la grandeur d'entrée sont plus ou moins (et parfois très nettement) non linéaires.

Pour beaucoup d'autres types de convertisseurs (comme par exemple pour les convertisseurs logarithmiques ou exponentiels) la grandeur de sortie ne peut varier en fonction de la grandeur d'entrée suivant une loi linéaire, car ceci serait en contradiction avec la destination et le principe même de fonctionnement des convertisseurs de ce type.

Dans les cas où la grandeur de sortie est une fonction linéaire ou sensiblement linéaire de la grandeur d'entrée, on essaie en général de choisir un régime de fonctionnement du convertisseur de manière à utiliser justement le tronçon de caractéristique linéaire.

On agit ainsi, en particulier lorsqu'on utilise les amplificateurs électroniques, à cristaux ou magnétiques de courant, de tension ou de puissance.

§ 193. Certains phénomènes physiques, observés seulement dans les circuits non linéaires. Dans les circuits électriques à courant alternatif comprenant des inductances non linéaires et des capacités linéaires, ou des capacités non linéaires et des inductances linéaires, ou enfin des inductances non linéaires et des capacités non linéaires, on peut observer dans certaines conditions déterminées (mais non pas dans toutes les conditions) des phénomènes physiques qui ne peuvent avoir lieu dans les circuits linéaires *. Il existe beaucoup de phénomènes de cette nature.

---

* Nous avons en vue ici les circuits linéaires « ordinaires », dont les paramètres ne varient pas en fonction du temps.

Les circuits linéaires à paramètres variables en fonction du temps sont examinés dans l'appendice A.

Nous nous bornerons à un examen succinct des plus importants d'entre eux.

Parmi ces phénomènes on peut citer:

1. L'apparition dans un circuit d'oscillations intenses suivant un harmonique supérieur, lorsque cet harmonique n'existait pas dans la tension d'entrée.

Dans les circuits linéaires des oscillations intenses suivant un harmonique supérieur ne peuvent avoir lieu qu'en présence de cet harmonique dans la tension d'entrée et elles ne peuvent nullement se manifester si l'harmonique en question n'est pas présent dans la tension d'entrée.

2. Apparition des oscillations à harmoniques inférieurs.

On appelle harmonique inférieur ou partiel un harmonique dont la fréquence est un sous-multiple de la fréquence de la source de F.E.M.

Les oscillations à harmoniques inférieurs sont des oscillations à la fréquence de l'une de ces harmoniques. Elles ont lieu le plus souvent à des fréquences $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{5}$, etc. (ω — fréquence angulaire de la source de F.E.M.)

3. Apparition dans un circuit des oscillations à un harmonique, dont la fréquence est $\frac{m}{n}\omega$, où m et n — nombres entiers (ω — toujours la fréquence de la source de F.E.M.).

4. Dépendance du caractère du régime permanent dans un circuit non linéaire à courant alternatif de l'état du circuit, avant l'établissement de ce régime, ainsi que de la phase initiale de la source de F.E.M. alimentant ce circuit.

Ce phénomène peut être observé dans les circuits électriques non linéaires dans les zones de basculement, dont il a été question au paragraphe précédent. Du fait de ce phénomène l'un des deux régimes possibles peut s'établir dans un circuit non linéaire résonnant, lorsqu'on le branche à une source de F.E.M. L'apparition de l'un ou l'autre de ces deux régimes possibles dépend de la phase initiale du générateur et de l'état du circuit avant son branchement (voir § 241).

5. Apparition de l'automodulation.

L'automodulation est un phénomène de variation périodique ou quasi-périodique des amplitudes des courants et des tensions dans les circuits électriques non linéaires, sans que ces circuits subissent l'action d'un facteur extérieur de modulation quelconque autrement dit, sans qu'ils subissent l'action d'un signal à basse fréquence.

Les phénomènes physiques énumérés ci-dessus ont lieu dans les circuits résonants seulement dans une plage de variation des paramètres strictement déterminée pour chaque circuit.

Les plages de variation des paramètres sont en général telles, que ces phénomènes ne sont observés en pratique que très rarement.

§ 194. Classification des résistances non linéaires d'après la nature de symétrie de leurs caractéristiques par rapport aux axes des coordonnées. En plus de la classification des résistances non linéaires en résistances actives, inductives et capacitives, contrôlables et non contrôlables

(et la classification des résistances actives en résistances sans inertie et à grande inertie), les résistances non linéaires peuvent être également classées suivant une autre propriété encore, à savoir d'après la nature de la symétrie de leurs caractéristiques en tant que valeurs instantanées par rapport aux axes des coordonnées.

Soit x et y deux grandeurs caractérisant le régime de fonctionnement d'une résistance non linéaire. Désignons par x la grandeur portée en ordonnées d'un système cartésien de coordonnées et par y la grandeur portée en abscisses. Les caractéristiques, pour lesquelles la condition $-y(-x) = y(x)$ est satisfaite sont appelées caractéristiques symétriques; les caractéristiques qui ne satisfont pas à cette condition, sont appelées caractéristiques dissymétriques.

Les caractéristiques symétriques sont celles des inductances non linéaires et des capacités non linéaires, et parmi les résistances actives, les thyrites et les vilites de l'arc à électrodes homogènes et de certains autres types de résistances encore.

Cependant les résistances non linéaires actives les plus utilisées à savoir les tubes électroniques et les triodes à cristaux (les transistors) ont des caractéristiques dissymétriques.

Les notions essentielles sur les particularités de fonctionnement des résistances non linéaires à caractéristiques dissymétriques, à savoir des tubes électroniques et des transistors, sont exposées aux §§ 210—225.

§ 195. Approximation des caractéristiques des résistances non linéaires. Pour effectuer l'analyse mathématique des circuits non linéaires à courant alternatif et pour étudier leurs propriétés communes il est très commode d'exprimer analytiquement le lieu entre les valeurs instantanées de u et i pour une résistance active non linéaire, de B et H pour une inductance non linéaire et de q et u pour une capacité non linéaire. La description analytique approchée des caractéristiques des résistances non linéaires est habituellement appelée approximation des caractéristiques.

§ 196. Approximation des caractéristiques symétriques des valeurs instantanées à l'aide d'un sinus hyperbolique. Dans l'étude des propriétés des circuits électriques on peut en général négliger le phénomène d'hystérésis. Il faut en tenir compte seulement dans l'étude des circuits dont le fonctionnement repose sur ce phénomène (par exemple, dans l'étude du fonctionnement des mémoires magnétiques à boucle d'hystérésis rectangulaire).

La fig. 238, *a* représente une caractéristique symétrique typique

$$y = f(x).$$

Pour une inductance non linéaire x exprime la valeur instantanée de l'induction B; le rôle de y est joué par la valeur instantanée du champ H.

Pour une capacité non linéaire le rôle de y est joué par la tension u, et celui de x — par la charge q.

Pour les résistances actives non linéaires (comme par exemple des thyrites et des vilites) le rôle de x est joué par la tension et le rôle de y par le courant.

Il existe un grand nombre d'expressions analytiques convenant plus ou moins à la description analytique des caractéristiques des résistances non linéaires. Lorsqu'on choisit l'expression analytique la mieux appropriée pour la fonction $y = f(x)$, on doit rechercher non seulement que la courbe, décrite par l'expression analytique, doit en tous ses points être située suffisamment près de la courbe expérimentale, pour la plage considérée de déplacements du point de fonctionnement sur cette dernière courbe, mais également essayer d'obtenir une expression analytique qui procure les possibilités les meilleures pour l'analyse des propriétés des circuits électriques considérés. Par la suite nous utiliserons pour

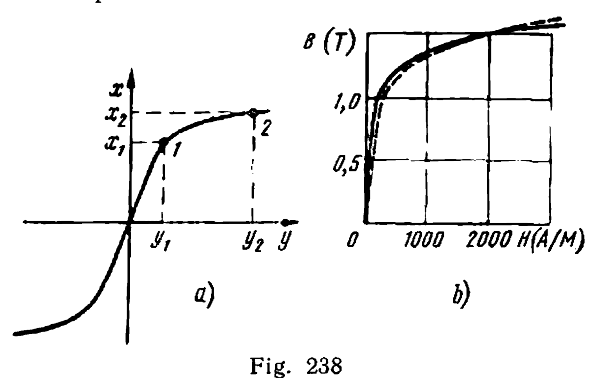


Fig. 238

la description analytique des caractéristiques symétriques des résistances du type de la fig. 238, *a* le sinus hyperbolique

$$y = \alpha \operatorname{sh} \beta x. \tag{9.1}$$

Dans cette expression α et β — coefficients numériques ; α est exprimé en mêmes unités que y ; β est mesuré en unités inverses aux unités utilisées pour exprimer x, de sorte que le produit βx soit une grandeur sans dimensions. Pour déterminer les deux coefficients inconnus α et β, il faut, en partant de la fonction $y = f(x)$ obtenue par voie expérimentale et dans la plage de fonctionnement supposée, choisir arbitrairement deux points les plus caractéristiques par lesquels doit passer la courbe analytique, substituer les coordonnées de ces points dans l'expression (9.1) et, ensuite, résoudre le système des deux équations à deux inconnues.

Soit les coordonnées de ces points : y_1, x_1 et y_2, x_2 (fig. 238, *a*). On a alors

$$y_1 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_1 ;$$

$$y_2 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_2 .$$

Divisons membre à membre

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\operatorname{sh} \beta x_2}{\operatorname{sh} \beta x_1} . \tag{9.2}$$

L'équation transcendante (9.2) est utilisée pour calculer le coefficient β. Ensuite on calcule le coefficient α:

$$\alpha = \frac{y_2}{\operatorname{sh} \beta x_2}. \tag{9.3}$$

Exemple 101. La courbe d'aimantation de l'acier à transformateur Э41 (épaisseur des tôles 0,5 *mm*) est représentée sur la fig. 238, *b*. Trouver les coefficients α et β.

Solution. Choisissons deux points sur la courbe: $H_1 = 200$ *A/m*, $B_1 = 1{,}1$ *T*; $H_2 = 2400$ *A/m*; $B_2 = 1{,}532$ *T*.

En partant de l'équation (9.2) nous obtenons $\frac{\operatorname{sh}(1{,}532\,\beta)}{\operatorname{sh}(1{,}1\,\beta)} = 12$.

Prenons des valeurs arbitraires de β et effectuons les calculs nécessaires:

β	6	5,22	4,57	3,92	3,26
βB_2	9,2	8	7	6	5
βB_1	6,6	5,74	5,03	4,32	3,59
$\frac{\operatorname{sh}\beta B_2}{\operatorname{sh}\beta B_1}$	13,5	9,58	7,25	6,24	4,1

En partant des résultats obtenus construisons la courbe $\frac{\operatorname{sh}\beta B_2}{\operatorname{sh}\beta B_1} = f(\beta)$ et à l'aide de cette courbe trouvons $\beta = 5{,}75$ 1/*T*.

Ensuite calculons $\alpha = \frac{H_2}{\operatorname{sh}\beta B_2} = \frac{2400}{\operatorname{sh} 8{,}82} = \frac{1200}{1690} = 0{,}71$ *A/m*. La courbe en pointillé de la fig. 238, *b* est construite d'après l'équation

$$H = 0{,}71 \operatorname{sh}(5{,}75 B).$$

§ 197. Notion sur les fonctions de Bessel. On utilise largement les fonctions de Bessel * dans l'analyse des circuits non linéaires. Avant d'écrire les expressions générales pour ces fonctions, rappelons que les fonctions trigonométriques, exponentielles et hyperboliques sont exprimées par des séries exponentielles suivantes:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \tag{9.4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{9.5}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{9.6}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \tag{9.7}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \tag{9.8}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{9.9}$$

* Les fonctions de Bessel sont la solution de l'équation bien connue de Bessel $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0$. Toutefois l'équation de Bessel elle-même n'est pas utilisée dans le présent chapitre.

Dans ces expressions l'argument x peut être un nombre réel, purement imaginaire ou complexe. Les valeurs de ces fonctions peuvent être calculées pour des valeurs concrètes de x à l'aide des séries données ci-dessus, ce qui va être fait plus loin à titre d'exemple. Cependant, dans la pratique, il faut évidemment les calculer à l'aide des diagrammes ou des tables.

Exemple 102. On sait que $\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30° = 0{,}5$. Vérifier ce résultat à l'aide de l'expression (9.4).

Solution. Substituons $\frac{\pi}{6}$ à x dans l'expression (9.4) et bornons-nous aux trois premiers termes de la série

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3\cdot 2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3+\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5=0{,}5228-0{,}02385+0{,}0032\approx 0{,}5.$$

Les fonctions de Bessel peuvent être également exprimées à l'aide de séries exponentielles et des tables existent également pour ces séries. La fonction de Bessel de l'argument x est désignée par $J_p(x)$. L'indice p désigne l'ordre de la fonction de Bessel. L'expression générale pour $J_p(x)$ écrite sous forme de série exponentielle est:

$$J_p(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{0!\,p!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!\,(p+1)!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!\,(p+2)!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+6}}{3!\,(p+3)!}+\dots \qquad (9.10)$$

Ce sont les fonctions de Bessel d'un argument purement imaginaire (fonction de Bessel modifiée) qui présentent le plus d'intérêt pour la suite. Pour les obtenir, il faut substituer dans leur générale (9.10) jx à x où $j = \sqrt{-1}$. La fonction de Bessel d'ordre nul:

$$J_0(jx)=1+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2}+\dots \qquad (9.11)$$

Exemple 103. Trouver $J_0(j4)$ à l'aide de (9.11).

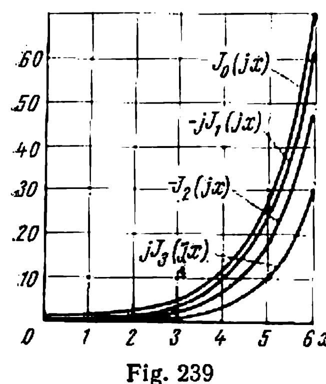


Fig. 239

Solution.

$$J_0(j4)=1+\frac{2^2}{1!}+\frac{2^4}{4}+\frac{2^6}{36}+\frac{2^8}{576}+\frac{2^{10}}{14\,400}+\dots=$$

$$=1+4+4+\frac{64}{36}+\frac{256}{576}+\frac{1024}{14\,400}\approx 11{,}3.$$

La fonction de Bessel modifiée d'ordre 1 s'écrit:

$$J_1(jx)=j\frac{\frac{x}{2}}{1!}+j\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!\,2!}+j\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!\,3!}+j\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!\,4!}+\dots \qquad (9.12)$$

Fonction de Bessel modifiée d'ordre 2

$$J_2(jx)=-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{0!\,2!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!\,3!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!\,4!}-\dots \qquad (9.13)$$

On écrit de même les séries pour les fonctions de Bessel d'ordres supérieurs.
A l'aide de ces séries, on calcule les tables ci-après des fonctions de Bessel et, à partir de ces tables, on construit les courbes de la fig. 239.
Il y a lieu de signaler que la fonction donnée à la table n'est pas $J_1(jx)$, mais $-jJ_1(jx)$.

De même, nous donnons dans cette table au lieu de la fonction $J_3(jx)$, $jJ_3(jx) = f(x)$. Nous l'avons fait parce que les fonctions $J_1(jx)$, $J_3(jx)$, $J_5(jx)$ ne se rencontrent pas sans le facteur j.

Du fait que la fonction $J_2(jx) = f(x)$ est négative, nous donnons dans la table la fonction $-J_2(jx) = f(x)$. Pour $x = 0$ seule n'est pas nulle la fonction de Bessel d'ordre 0 [$J_0(0) = 1$].

Il découle des tables et des courbes de la fig. 239 que la valeur de la fonction augmente lorsque x croît. La valeur d'une fonction de Bessel pour la même valeur de x est d'autant plus petite que son ordre est élevé.

Valeurs des fonctions de Bessel modifiées

x	$J_0(jx)$	$-jJ_1(jx)$	$-J_2(jx)$	$jJ_3(jx)$	$J_4(jx)$
0,0	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,2	1,01	0,10	0,005	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$0,42 \cdot 10^{-5}$
0,4	1,04	0,20	0,02	$0,13 \cdot 10^{-2}$	$0,67 \cdot 10^{-4}$
0,6	1,09	0,32	0,046	$0,46 \cdot 10^{-2}$	$0,34 \cdot 10^{-3}$
0,8	1,16	0,43	0,08	0,01	$0,11 \cdot 10^{-2}$
1,0	1,26	0,56	0,14	0,02	$0,27 \cdot 10^{-2}$
1,2	1,39	0,72	0,20	0,04	$0,58 \cdot 10^{-2}$
1,4	1,55	0,88	0,29	0,06	0,011
1,6	1,75	1,08	0,39	0,10	0,019
1,8	1,99	1,32	0,53	0,15	0,032
2,0	2,28	1,59	0,69	0,21	0,051
2,2	2,63	1,91	0,89	0,30	0,077
2,4	3,05	2,30	1,13	0,41	0,114
2,6	3,55	2,76	1,43	0,55	0,165
2,8	4,16	3,30	1,80	0,73	0,234
3,0	4,88	3,95	2,24	0,96	0,325
3,2	5,75	4,73	2,79	1,25	0,446
3,4	6,78	5,67	3,45	1,61	0,605
3,6	8,03	6,79	4,25	2,07	0,810
3,8	9,51	8,14	5,23	2,63	1,076
4,0	11,30	9,76	6,42	3,34	1,416
4,2	13,44	11,70	7,87	4,21	1,851
4,4	16,01	14,04	9,63	5,29	2,405
4,6	19,09	16,86	11,76	6,63	3,106
4,8	22,79	20,25	14,35	8,29	3,992
5,0	27,23	24,34	17,50	10,33	5,108
5,2	32,58	29,25	21,33	12,84	6,510
5,4	39,01	35,18	25,97	15,94	8,268
5,6	46,73	42,32	31,62	19,74	10,468
5,8	56,03	50,94	38,47	24,41	13,21
6,0	67,23	61,34	46,78	30,15	16,63
7	168,6	156	124	85,17	51,0
8	427,56	399,87	327,6	236,07	150,5
9	1093,59	1030,91	864,50	646,69	433,3
10	2815,7	2671	2281	1758	1226
11	7288	6948,9	6025	4758	3430
12	18 948	18 142	15 924	12 834	9507

§ 198. Développement d'un sinus hyperbolique et d'un cosinus hyperbolique à argument périodique en une série de Fourier dont les coefficients sont des fonctions de Bessel. Si l'argument x varie suivant une loi périodique, par exemple, la loi du sinus $x = x_m \sin \omega t$, où x_m — amplitude des oscillations, les fonctions sh $(x_m \sin \omega t)$ et ch $(x_m \sin \omega t)$ varient également suivant une loi périodique.

Puisque les fonctions périodiques peuvent être représentées par des séries de Fourier, les fonctions sh (x_m sin ωt) et ch (x_m sin ωt) peuvent être également développées en série de Fourier. A cette fin il faut substituer à x dans (9.8) et (9.9) l'expression x_m sin ωt, en tenant compte des formules trigonométriques connues:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^3\alpha = -\frac{1}{4}\sin 3\alpha + \frac{3}{4}\sin\alpha,$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha), \text{ etc.}$$

grouper tous les termes contenant sin ωt, grouper ensuite tous les termes contenant sin $3\omega t$ et écrire à part la composante continue. Ceci fait, on obtient comme coefficient des fonctions trigonométriques, des séries qui représentent des fonctions de Bessel de divers ordres de l'argument purement imaginaire jx_m. Nous obtenons en définitive

$$\text{sh}(x_m \sin\omega t) = 2[-jJ_1(jx_m)]\sin\omega t - 2jJ_3(jx_m)\sin 3\omega t - \\ -2jJ_5(jx_m)\sin 5\omega t - \ldots \quad (9.14)$$

$$\text{ch}(x_m \sin\omega t) = J_0(jx_m) + 2J_2(jx_m)\cos 2\omega t + 2J_4(jx_m)\cos 4\omega t + \ldots \quad (9.15)$$

Les formules (9.14) et (9.15) seront utilisées fréquemment par la suite. La série de sh (x_m sin ωt) comprend seulement les harmoniques impairs et n'a pas de composante continue. La série de ch (x_m sin ωt) a une composante continue et comprend les harmoniques pairs.

Exemple 104. Développer sh (4 sin ωt) et ch (4 sin ωt) en série de Fourier.

Solution. Prenons de la table ci-dessus les valeurs des fonctions de Bessel:

$$-jJ_1(j4) = 9{,}76; \quad jJ_3(j4) = 3{,}34;$$
$$-jJ_5(j4) = 0{,}505; \quad J_0(j4) = 11{,}3; \quad J_2(j4) = -6{,}42.$$

Conformément aux (9.14) et (9.15) nous obtenons

$$\text{sh}(4\sin\omega t) = 2\cdot 9{,}76\sin\omega t - 2\cdot 3{,}34\sin 3\omega t + 2\cdot 0{,}505\sin 5\omega t - \ldots$$
$$\text{ch}(4\sin\omega t) = 11{,}3 - 2\cdot 6{,}42\cos 2\omega t + 2\cdot 1{,}416\cos 4\omega t + \ldots$$

§ 199. Développement du sinus hyperbolique de composantes continue et sinusoïdale en une série de Fourier. Il découle du précédent (voir § 196) que la valeur instantanée de la fonction y est liée à la valeur instantanée de x par l'expression (9.1):

$$y = \alpha\,\text{sh}\,\beta x.$$

Dans cette expression l'argument du sinus hyperbolique n'est plus x, comme ceci avait lieu au § 197, mais le produit βx. De ce fait il faut pour développer sh (βx_m sin ωt) et ch (βx_m sin ωt) remplacer x par βx_m dans les expressions (9.14) et (9.15).

Si $x = x_0 + x_m \sin\omega t$, où x_0 — composante continue et x_m — amplitude de la composante sinusoïdale, on a

$$y = \alpha\,\text{sh}(\beta x_0 + \beta x_m\sin\omega t) = \alpha\,\text{sh}\,\beta x_0\,\text{ch}(\beta x_m\sin\omega t) + \alpha\,\text{ch}\,\beta x_0\,\text{sh}(\beta x_m\sin\omega t).$$

Par conséquent,

$$y = \alpha\,\text{sh}\,\beta x_0[J_0(j\beta x_m) + 2J_2(j\beta x_m)\cos 2\omega t + 2J_4(J\beta x_m)\cos 4\omega t + \ldots] + \\ + \alpha\,\text{ch}\,\beta x_0\{2[-jJ_1(j\beta x_m)]\sin\omega t - 2jJ_3(j\beta x_m)\sin 3\omega t - \ldots\}. \quad (9.16)$$

Il découle de (9.16) que la composante continue de la fonction y (appelons-la y_0) est

$$y_0 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_0 J_0 (j\beta x_m). \tag{9.17}$$

Le premier harmonique de la fonction y (désignons-le par y_1)

$$y_1 = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-jJ_1 (j\beta x_m)] \sin \omega t. \tag{9.18}$$

Deuxième harmonique

$$y_2 = 2\alpha \operatorname{sh} \beta x_0 [J_2 (j\beta x_m)] \cos 2\omega t. \tag{9.19}$$

Troisième harmonique

$$y_3 = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-jJ_3 (j\beta x_m)] \sin 3\omega t \tag{9.20}$$

etc.

Exemple 105. Développer la fonction $\frac{y}{\alpha} = \operatorname{sh} (2 + 4 \sin \omega t)$ en série de Fourier.

Solution. Trouvons dans les tables sh 2 = 3,63 et ch 2 3,76 *. Les valeurs des fonctions de Bessel sont également prises dans la table.

Conformément à (9.16), écrivons:

$$\frac{y}{\alpha} = \operatorname{sh} (2 + 4 \sin \omega t) = 3{,}63 (11{,}3 - 12{,}844 \cos 2\omega t + 2{,}832 \cos 4\omega t - \dots) + $$
$$+ 3{,}76 (19{,}52 \sin \omega t - 6{,}674 \sin 3\omega t + 1{,}01 \sin 5\omega t - \dots)$$

Ainsi, la composante continue $\frac{y_0}{\alpha} = 3{,}63 \cdot 11{,}3 = 41{,}1$. Amplitude du premier harmonique $\frac{y_{1m}}{\alpha} = 3{,}76 \cdot 19{,}52 = 73{,}4$. Amplitude du deuxième harmonique $\frac{y_{2m}}{\alpha} = 3{,}63 \cdot 12{,}844 = 46{,}7$.

§ 200. Certaines propriétés générales des résistances non linéaires symétriques. Si une résistance non linéaire à caractéristique symétrique fonctionne dans des conditions pour lesquelles l'une des grandeurs dont dépend son état, à savoir la grandeur x, varie en fonction du temps suivant la loi $x = x_0 + x_m \sin \omega t$, on peut faire les constatations suivantes sur l'autre grandeur, déterminant l'état de la résistance à savoir la grandeur y:

1. La valeur de la composante continue de la fonction y (c'est-à-dire y_0) dépend non seulement de la valeur de x_0, mais également de la valeur de x_m. Cette propriété découle de l'expression (9.17):

$$y_0 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_0 J_0 (j\beta x_m).$$

2. Des harmoniques pairs apparaissent dans la courbe $y = f(\omega t)$. Ces harmoniques pairs disparaissent pour $x_0 = 0$. La phase des harmoniques pairs dépend du signe de la composante continue (du signe de x_0).

3. En modifiant les valeurs de x_0 et de y_0 on peut faire varier les amplitudes du premier harmonique et des harmoniques supérieurs de la fonction $y(\omega t)$.

Expliquons par la méthode graphique la première de ces propriétés. Supposons que la résistance non linéaire ne soit pas soumise à l'effet de la composante sinusoïdale ($x_m = 0$). Alors le phénomène étudié sera représenté sur la caractéristique de la résistance non linéaire par le point a (fig. 240, a). Pour ce point

$$y = y_0; \quad \beta x = \beta x_0' = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{y_0}{\alpha}.$$

Ce résultat découle de (9.17) si on tient compte que $J_0(0) = 1$.

Rappelons que les dimensions du coefficient β sont inverses aux dimensions de x, et que le coefficient α a les mêmes dimensions que y; par conséquent, le produit βx et le quotient $\frac{y}{\alpha}$ sont des grandeurs sans dimensions.

---

* Les tables des valeurs de sh x et ch x sont données sur la page 414.

Supposons maintenant que la résistance non linéaire fonctionne à $x_m \neq 0$; dans ces conditions, pour maintenir la composante continue de la fonction y, c.-à-d. y_0, à sa valeur précédente on doit réduire soit laisser diminuer d'elle-même la valeur de la composante continue x_0 de la valeur x_0' à la valeur x_0''.

La valeur $\beta x_0''$ est calculée à l'aide de l'expression

$$\beta x_0'' = \text{Ar sh} \frac{\frac{y_0}{\alpha}}{J_0(j\beta x_m)}, \qquad (2.21$$

où x_0'' est caractérisé par l'ordonnée du point b, situé au-dessous du point a (fig. 240, b).

La première et la troisième de ces propriétés sont largement utilisées dans la théorie des résistances non linéaires contrôlables. La deuxième propriété est employée dans la théorie des multiplicateurs de fréquence.

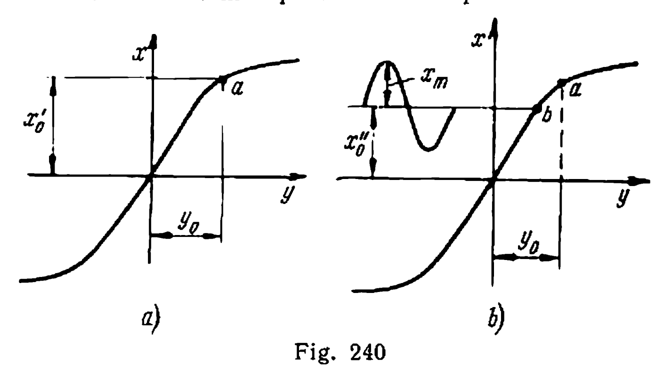


Fig. 240

Exemple 106. La résistance non linéaire à caractéristique $y = \alpha \operatorname{sh} \beta x$ fonctionne d'abord avec $\frac{y_0}{\alpha} = 41{,}1$ et en l'absence de composante alternative ($\beta x_m = 0$). Ensuite le régime de fonctionnement de cette résistance change: la composante continue $\frac{y_0}{\alpha}$ est restée la même, mais une composante alternative, dont l'amplitude est $\beta x_m = 4$ intervient également. Trouver les composantes continues βx_0 pour ces deux régimes.

Solution. Pour le premier régime

$$\beta x_0' = \text{Ar sh}\, 41{,}1 = 4{,}41.$$

Pour le deuxième régime

$$\beta x_0'' = \text{Ar sh} \frac{41{,}1}{J_0(j4)} = \text{Ar sh}\, 3{,}63 = 2.$$

Ainsi, par suite du passage du premier régime au deuxième, la composante continue βx_0 est passée de 4.41 à 2, c'est-à-dire qu'elle a augmenté de plus de deux fois.

§ 201. Certaines propriétés communes des résistances non linéaires à caractéristiques dissymétriques. Les résistances non linéaires à caractéristiques dissymétriques possèdent également les propriétés générales, énumérées au § 200. Cependant, en ce qui concerne la deuxième propriété, il existe une différence importante entre les résistances dissymétriques et symétriques: pour une résistance dissymétrique les harmoniques d'ordre pair de la fonction y existent également pour $x_0 = 0$.

Il ne faut pas oublier cependant que les expressions elles-mêmes donnant le rapport quantitatif entre les diverses grandeurs liées aux résistances non linéaires

à caractéristiques symétriques et dissymétriques sont évidemment différentes, puisque les caractéristiques des résistances non linéaires dissymétriques ne peuvent être décrites par l'expression $y = x \operatorname{sh} \beta x$.

§ 202. Types des caractéristiques des résistances non linéaires. En effectuant l'analyse et le calcul des circuits électriques à résistances non linéaires et suivant la nature du problème examiné, on utilise plusieurs types différents de caractéristiques de la même résistance linéaire, à savoir :

caractéristiques qui lient entre elles les valeurs instantanées des grandeurs déterminantes ;

caractéristiques courant-tension qui lient entre elles les amplitudes ou les valeurs efficaces des premiers harmoniques du courant et de la tension ;

caractéristiques courant-tension qui lient entre elles les valeurs efficaces du courant et de la tension.

§ 203. Caractéristiques pour les valeurs instantanées. Le type fondamental de caractéristiques est constitué par celles qui lient entre elles les valeurs instantanées des grandeurs déterminantes principales, comme par exemple du courant et de la tension pour une résistance active non linéaire, de l'induction et de l'intensité du champ magnétique pour le noyau d'une inductance non linéaire, ainsi que les valeurs instantanées de la charge et de la tension pour une capacité non linéaire.

Nous les appellerons caractéristiques pour les valeurs instantanées. On ajoute quelquefois à la désignation de la première d'entre elles les expressions: caractéristique courant-tension, induction-courant ou charge-tension.

§ 204. Caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques. On désigne par caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques la relation graphique ou analytique entre l'amplitude ou la valeur efficace du premier harmonique du courant dans une résistance non linéaire et l'amplitude ou la valeur efficace du premier harmonique de la tension aux bornes de cette dernière.

Les caractéristiques de ce type peuvent être divisées en deux catégories. Pour la première d'entre elles on admet que la tension (l'induction ou la charge) dans une résistance non linéaire varie suivant une loi sinusoïdale.

Pour la deuxième catégorie de caractéristiques on admet que le courant circulant dans une résistance active non linéaire (ou l'intensité du champ dans le noyau d'une inductance non linéaire, ou encore la tension aux armatures d'une capacité non linéaire) varie en fonction du temps suivant une loi sinusoïdale.

Si une tension sinusoïdale ou un courant sinusoïdal, agissant sur une résistance non linéaire, ne comprend pas de composante continue, la caractéristique courant-tension pour les premiers harmoniques de la résistance non linéaire considérée peut être représentée par une seule courbe. Par contre, si la tension ou le courant agissant sur cette résistance comprend une composante continue, les caractéristiques courant-tension, induction-courant et charge-tension sont représentées par des familles de courbes; pour ces caractéristiques le rôle du paramètre est

joué par la composante continue du courant, de la tension, du flux ou de la charge.

On obtient ce type de caractéristiques soit par des calculs ou par voie graphique en partant des caractéristiques correspondantes pour les valeurs instantanées, soit on les relève par voie expérimentale.

Lorsqu'on a recours à la méthode graphique on part des différentes valeurs de l'amplitude de la tension (ou du courant, de l'induction, de la charge) agissant sur la résistance non linéaire et à l'aide des points ainsi obtenus on construit la courbe du courant (de l'intensité du champ, de la tension) en fonction du temps et en la développant en série de Fourier,

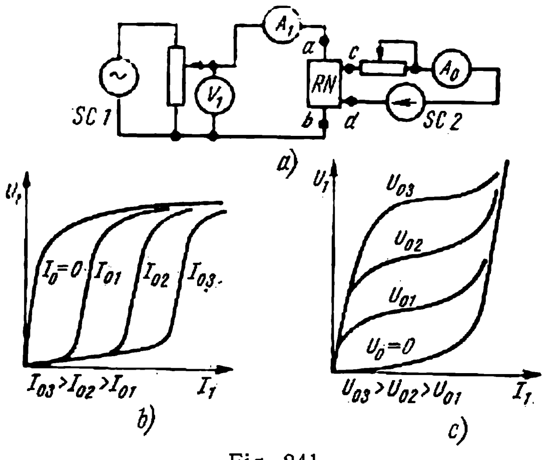


Fig. 241

on trouve les amplitudes correspondantes du premier harmonique du courant (de l'intensité du champ, de la tension).

La construction graphique de la courbe du courant en fonction du temps pour une inductance non linéaire contrôlable décrite au § 207 est donnée à titre d'exemple sur la fig. 244. Lorsqu'on utilise la méthode analytique on construit les points de la caractéristique discutée à l'aide des expressions (9.17) et (9.18) ou d'autres expressions analogues.

Nous avons examiné au § 206 l'emploi des expressions (9.17) et (9.18) pour obtenir des caractéristiques communes suivant les premiers harmoniques pour les résistances non linéaires symétriques contrôlables.

Pour une inductance non linéaire, les caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques, peuvent être obtenues par voie expérimentale en utilisant le schéma de la fig. 241, *a*.

Dans ce schéma *SC1* est la source d'une F.E.M. sinusoïdale, et *SC2* est la source d'une F.E.M. continue.

Les bornes *ab* sont celles du circuit à contrôler à résistance non linéaire, et les bornes *cd* sont celles du circuit de commande de la résistance non linéaire.

L'appareil de mesure V_1 réagit au premier harmonique de tension et l'appareil de mesure A_1 au premier harmonique de courant. Les carac-

téristiques courant-tension d'une inductance non linéaire contrôlable sont représentées qualitativement suivant les premiers harmoniques sur la fig. 241, *b*. Le paramètre de ces caractéristiques est le courant de commande I_0.

Les caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques pour une capacité non linéaire contrôlable sont représentées sur la fig. 241, *c*. Le paramètre de ces caractéristiques est la tension continue de commande U_0.

Les caractéristiques de la fig. 241, *b* sont relevées de la manière suivante. On règle un certain courant I_0 arbitraire circulant dans le circuit de commande, on augmente progressivement la tension U_1 et pour chacune de ses valeurs on note le courant I_1.

Ensuite on répète les mêmes opérations pour un nouveau courant I_0, etc. Les résultats des mesures sont portés sur le diagramme et les points appropriés sont réunis par une courbe.

Les caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques sont utilisées dans la méthode de calcul des régimes permanents dans les circuits non linéaires, dénommée méthode de calcul suivant le premier harmonique (voir § 229).

On utilise dans les calculs les caractéristiques courant-tension de la catégorie convenant le mieux aux conditions de fonctionnement de la résistance non linéaire considérée.

§ 205. Caractéristiques courant-tension pour les valeurs efficaces. On appelle caractéristiques courant-tension pour les valeurs efficaces la courbe de la valeur efficace d'une tension sinusoïdale (ou non sinusoïdale) aux bornes d'une résistance non linéaire en fonction de la valeur efficace du courant circulant dans cette résistance non linéaire. Si la tension ou le courant comprend une composante continue, les caractéristiques courant-tension pour les valeurs efficaces sont représentées par une famille de courbes, dont le paramètre est la composante continue du courant, du flux, de la tension ou de la charge.

Ces caractéristiques sont soit construites par la méthode graphique ou analytique en partant des caractéristiques des valeurs instantanées, soit relevées par voie expérimentale à l'aide du schéma représenté sur la fig. 241, *a*; mais pour cela les appareils V_1 et A_1 doivent mesurer non pas les valeurs instantanées, mais les valeurs efficaces.

Il ne faut pas perdre de vue que les caractéristiques courant-tension pour les valeurs efficaces dépendent de la forme de la tension aux bornes de la résistance non linéaire et/ou de la forme du courant circulant dans cette résistance et, par conséquent, il faut spécifier les conditions dans lesquelles ces caractéristiques ont été obtenues.

Dans les analyses qualitatives et les analyses quantitatives approximatives, dans lesquelles on utilise les caractéristiques courant-tension pour les valeurs efficaces, on admet que les caractéristiques relevées pour une certaine forme de la tension aux bornes d'une résistance non linéaire soient sensiblement les mêmes que les caractéristiques relevées pour une autre forme de la tension. En réalité, la différence quantitative de ces caractéristiques peut être importante. Les caractéristiques courant-

tension pour les valeurs efficaces sont utilisées dans la méthode de calcul appelée méthode de calcul suivant les caractéristiques courant-tension pour les valeurs efficaces (voir § 230).

§ 206. Construction par la méthode analytique des caractéristiques généralisées, suivant les premiers harmoniques pour des résistances non linéaires contrôlables. Comme nous l'avons déjà indiqué, les inductances non linéaires, les capacités non linéaires et un groupe important de résistances actives non linéaires ont des caractéristiques suivant les valeurs instantanées, pouvant être décrites approximativement par l'expression $y = \alpha \operatorname{sh} \beta x$.

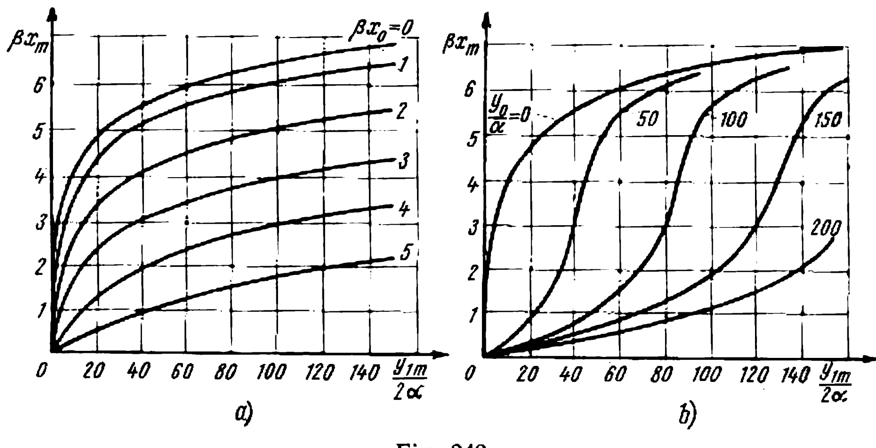


Fig. 242

Pour chaque type de résistances non linéaires il faut entendre par x et par y les grandeurs propres à cette résistance. Ainsi, pour une inductance non linéaire x — induction magnétique et y — champ magnétique. Pour une capacité non linéaire x — charge et y — tension. Pour une résistance active non linéaire x — tension (ou courant), y — courant (ou tension).

Ainsi, x et y sont les désignations généralisées des grandeurs déterminant le fonctionnement d'une résistance non linéaire.

Pour tous les types de résistances énumérées ci-dessus on peut construire des caractéristiques uniques suivant les premiers harmoniques.

Supposons à cette fin $x = x_0 + x_m \sin \omega t$.

Alors, conformément à (9.18), l'amplitude du premier harmonique de la fonction y (appelons-la y_{1m}) est

$$y_{1m} = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-jJ_1(j\beta x_m)]. \tag{9.22}$$

L'expression (9.22) décrit le lien entre l'amplitude y_{1m} du premier harmonique de y, l'amplitude x_m du premier harmonique de x et la composante continue x_0.

Les caractéristiques d'une résistance non linéaire contrôlable $\beta x_m = f\left(\frac{y_{1m}}{2\alpha}\right)$ représentées sur la fig. 242, *a* pour les valeurs du paramètre $\beta x_0 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sont construites conformément à (9.22).

On peut employer les courbes de la fig. 242, *a* lorsqu'on connaît la valeur du paramètre βx_0. Si on connaît non pas βx_0, mais la composante continue $\frac{y_0}{\alpha}$ la

famille de courbes $\beta x_m \quad f\left(\frac{y_{1m}}{2}\right)$ pour le paramètre $\frac{y_0}{\alpha}$ peut être construite de la manière suivante: trouvons à partir de (9.17)

$$\operatorname{sh} \beta x_0 = \frac{\frac{y_0}{\alpha}}{J_0(j\beta x_m)}$$

nous substituons à $\operatorname{ch}\beta x_0$ dans (9.22) l'expression suivante:

$$\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \beta x_0} = \sqrt{1+\left[\frac{\frac{y_0}{\alpha}}{J_0(j\beta x_m)}\right]^2}.$$

Nous obtenons

$$\frac{y_{1m}}{2\alpha} = \sqrt{1+\left[\frac{\frac{y_0}{\alpha}}{J_0(j\beta x_m)}\right]^2}\,[-jJ_1(j\beta x_m)]. \qquad (9.23)$$

Les courbes (fig. 242, *b*) sont construites à l'aide de (9.23). Ce sont les caractéristiques d'une résistance non linéaire contrôlable pour les valeurs suivantes du paramètre $\frac{y_0}{\alpha}$ = 0,50, 100, 150 et 200. Rappelons que $\frac{y_{1m}}{\alpha}$, βx_m, $\frac{y_0}{\alpha}$ sont des grandeurs sans dimensions. Si on réduit de $\sqrt{2}$ fois des échelles suivant les axes des coordonnées, les courbes de la fig. 242, *b* représentent les caractéristiques suivant les valeurs efficaces des premiers harmoniques.

La caractéristique de la résistance non linéaire non contrôlable est représentée par la courbe de la fig. 242, *b* pour laquelle $\frac{y_0}{\alpha} = 0$.

§ 207. Inductance non linéaire contrôlable la plus simple. L'inductance non linéaire contrôlable la plus simple est représentée sur la fig. 243. Elle comprend les bobines w_1 et w_2 enroulées sur un noyau ferromagnétique fermé. Soit S (m^2) la surface de la section transversale du noyau et l (m) la longueur de la ligne magnétique moyenne.

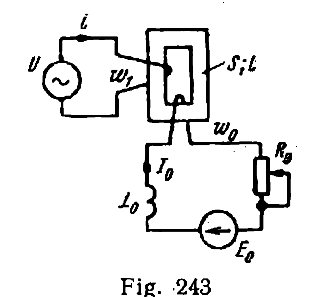


Fig. 243

L'enroulement w_1, intercalé dans un circuit à courant alternatif, est parcouru par le courant alternatif i, comprenant le premier harmonique et des harmoniques supérieurs.

L'enroulement de commande w_0, appelé également enroulement magnétisant, est branché à une source de F.E.M. continue E_0 par l'intermédiaire d'une inductance additionnelle L_0 et d'une résistance active variable. L'enroulement w_0 est parcouru par le courant continu

$$I_0 = \frac{E_0}{R_0},$$

où R_0 — résistance active du circuit magnétisant.

Quoique le flux magnétique alternatif induise dans l'enroulement w_0 une F.E.M. alternative, il ne circulera pratiquement pas de courant alternatif dans cet enroulement, car l'inductance additionnelle I_0 est

choisie telle qu'elle oppose au courant alternatif une réactance inductive suffisamment grande.

Soit $U_m \cos \omega t$ la tension appliquée à l'enroulement w_1. Cette tension est égale à la F.E.M. d'auto-induction, prise avec un signe contraire. (Nous supposons que la résistance active de l'enroulement w_1 soit très petite)

$$u = -e_L = w_1 \frac{d\Phi}{dt} = U_m \cos \omega t.$$

Il en découle que le flux mangétique est

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega w_1} \sin \omega t + \Phi_0 = \Phi_m \sin \omega t + \Phi_0; \qquad (9.24)$$

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega w_1}.$$

Ici Φ_m — amplitude de la composante alternative du flux magnétique, Φ_0 — composante continue du flux magnétique.

Une inductance non linéaire contrôlable permet de faire varier le courant alternatif i, en modifiant le courant continu I_0, circulant dans l'enroulement w_0.

Le principe de commande du régime d'une inductance non linéaire et le caractère des variations dans le temps de diverses grandeurs qui s'y rattachent sont expliqués à l'aide des fig. 244, *a* et *b*. Sur ces figures les courbes $\Phi = f(Hl)$ représentent le flux Φ circulant dans le noyau en fonction du produit du champ magnétique H par la longueur l de la ligne magnétique moyenne du noyau.

Les courbes construites sur la fig. 244, *a* correspondent au cas où $I_0 = 0$, et celles de la fig. 244, *b*, au cas où $I_0 \neq 0$. La composante alternative du flux $\Phi_m \sin \omega t$ est la même sur les deux figures. Pour la fig. 244, *a* la composante continue du flux est nulle et pour la fig. 244, *b* $\Phi_0 \neq 0$. Sur les courbes $\Phi = f(\omega t)$, $\Phi = f(Hl)$, et $iw_1 = f(\omega t)$, les points les plus caractéristiques correspondant les uns aux autres sont désignés par les mêmes lettres.

La construction doit être effectuée dans l'ordre suivant:

1. Portons d'abord en ordonnées la valeur de la composante continue du flux Φ_0 et construisons la courbe $\Phi_m \sin \omega t = f(\omega t)$ (pour la fig. 244, *a* $\Phi_0 = 0$).

2. Prenons ensuite des instants différents comme par exemple $\omega t = 0$; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$; 2π et pour chacune des valeurs de ωt trouvons à l'aide de la courbe $\Phi = f(Hl)$ les valeurs correspondantes de Hl et construisons la courbe $iw_1 + I_0 w_0 = f(\omega t)$ (pour la fig. 244, *a* $I_0 w_0 = 0$). L'axe du temps pour cette courbe est dirigé verticalement vers le bas et passe par les points *a*, *c* et *e* dans la partie inférieure de la figure.

Remarquons que le courant i ne comporte pas de composante continue, car il n'existe pas de source de F.E.M. continue, ni de redresseurs dans le circuit de l'enroulement w_1.

La droite $A - A$ de la fig. 244, *b* est la ligne de valeurs nulles pour la courbe $iw_1 = f(\omega t)$. Le courant i oscille autour de cette droite de

manière que sa valeur moyenne pendant la période allant de $\omega t = 0$ à $\omega t = 2\pi$ soit nulle.

Autrement dit, traçons la courbe $A - A$ de manière que la surface S_1 soit égale à la surface S_2.

La distance séparant la droite $A - A$ de l'axe des ordonnées est égale à $I_0 w_0$.

Il est utile de comparer les déductions du § 200, faites sous la forme générale, avec les déductions qui peuvent être tirées pour une inductance non linéaire en examinant les fig. 244, *a* et *b*. Les grandeurs à comparer sont $x - \Phi$; $y - (iw_1 + I_0 w_0)$; $x_0 - \Phi_0$; $x_m - \Phi_m$; $y_0 - I_0 w_0$; $y = f(\omega t) - (iw_1 + I_0 w_0) = f(\omega t)$.

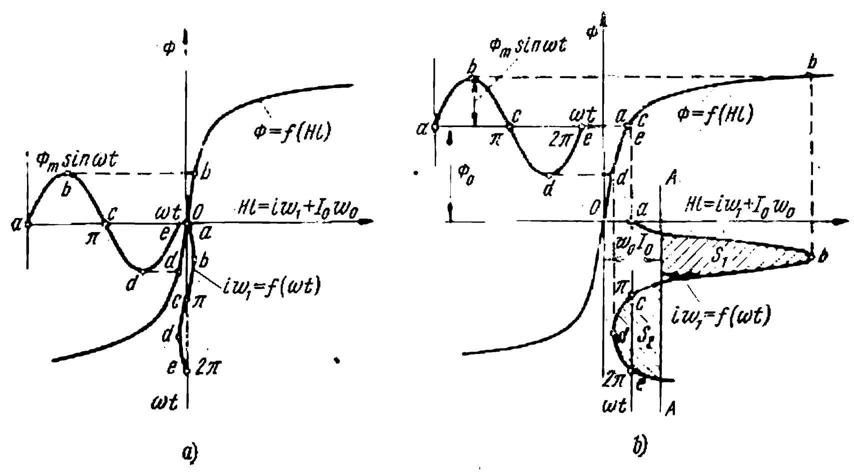


Fig. 244

Au § 200 nous avons indiqué qu'en faisant varier la valeur de y_0 on peut modifier les amplitudes du premier harmonique et des suivants de la fonction $y = f(\omega t)$. Cette constatation est confirmée par les courbes construites sur les fig. 244, *a* et *b*; en effet les amplitudes des harmoniques premier et supérieurs de la fonction $iw_1 = f(\omega t)$ dépendent de la valeur de $I_0 w_0$. L'amplitude du premier harmonique du courant i est d'autant plus grande que la valeur de $I_0 w_0$ est élevée.

Nous avons déjà indiqué au § 200 que y_0 dépend non seulement de x_0, mais également de x_m. Il découle, par ailleurs, des courbes de la fig. 244, *a* et *b* que la valeur de $I_0 w_0$ dépend non seulement de Φ_0, mais également de Φ_m.

Comme il a été signalé au § 200 la présence d'une composante continue dans les fonctions de x fait naître des harmoniques pairs dans la courbe $y = f(\omega t)$. Il découle de la fig. 244, *b* qu'en présence d'une composante continue Φ_0 dans le flux magnétique Φ des harmoniques pairs apparaissent dans la courbe $iw_1 = f(\omega t)$; autrement dit, la courbe $iw_1 = f(\omega t)$ est dissymétrique par rapport à la droite A — A.

Etablissons les expressions permettant de calculer l'amplitude de la composante alternative de l'induction magnétique B_m en fonction de l'amplitude de la tension appliquée U_m, de la fréquence angulaire ω, de la section transversale du noyau S et du nombre de spires w_1.

Trouvons également les expressions permettant de calculer la composante continue du champ H_0 en fonction du courant continu I_0, l'ampli-

tude du premier harmonique du champ H_{1m} en fonction de l'amplitude du premier harmonique I_{1m} du courant alternatif, etc.

Nous avons

$$\Phi_m = B_m S; \tag{9.25}$$

$$\Phi_0 = B_0 S, \tag{9.26}$$

où B_0 — composante continue de l'induction magnétique.

Il découle des (9.24) et (9.25) que

$$B_m = \frac{U_m}{\omega w_1 S}. \tag{9.27}$$

Si l'induction magnétique est mesurée en gauss, S en cm^2 et si on substitue $U\sqrt{2}$ à U_m, U étant la valeur efficace de la tension aux bornes de l'enroulement w_1, on obtient

$$B_m = \frac{\sqrt{2}U \cdot 10^8}{2\pi f w_1 S} = \frac{U \cdot 10^8}{4{,}44 f w_1 S}. \tag{9.27'}$$

L'expression (9.27) permet de calculer l'amplitude de la composante alternative de l'induction magnétique en fonction de l'amplitude de la tension sinusoïdale U, de la fréquence f, du nombre des spires w_1 et de la section S.

Suivant la loi du courant total, le produit du champ H par la longueur l de la ligne magnétique moyenne doit être égal à la somme algébrique des F.M.M. Par conséquent,

$$i w_1 + I_0 w_0 = Hl. \tag{9.28}$$

L'équation (9.28) peut être décomposée en un certain nombre d'équations: équation pour les composantes continues, équation pour le premier harmonique, équation pour le deuxième harmonique, etc.

L'égalité des composantes continues des deux membres de (9.28) donne:

$$I_0 w_0 = H_0 l, \tag{9.29}$$

où H_0 — composante continue du champ.

Le courant alternatif i comprend les premier, deuxième et autres harmoniques supérieurs, mais ne comprend pas de composante continue, puisqu'il n'existe pas dans le circuit de l'enroulement w_1 ni de sources de F.E.M. continue, ni de redresseurs.

L'amplitude du premier harmonique du premier membre de (9.28) est égale à l'amplitude du premier harmonique du second membre. Par conséquent,

$$I_{1m} w_1 = H_{1m} l, \tag{9.30}$$

où I_{1m} — amplitude du premier harmonique du courant i, H_{1m} — amplitude du premier harmonique du champ.

De même

$$I_{2m} w_1 = H_{2m} l. \tag{9.31}$$

Il résulte de (9.29) — (9.31) que

$$H_0=\frac{I_0w_0}{l}, \qquad (9.32)$$

$$H_{1m}=\frac{I_{1m}w_1}{l}, \qquad (9.33)$$

$$H_{2m}=\frac{I_{2m}w_1}{l}, \qquad (9.34)$$

etc.

L'expression (9.32) permet de calculer la composante continue du champ H_0 en fonction de la composante continue du courant I_0. L'expression (9.33) permet de calculer H_{1m} en fonction de I_{1m}, etc.

§ 208. Caractéristiques courant-tension d'une inductance non linéaire contrôlable suivant les premiers harmoniques. On appelle caractéristiques courant-tension d'une inductance non linéaire contrôlable suivant les premiers harmoniques la valeur efficace du premier harmonique de la tension alternative U_1 aux bornes de l'enroulement w_1 de l'inductance non linéaire exprimée en fonction de la valeur efficace du premier harmonique du courant alternatif I_1, le courant continu I_0 étant pris comme paramètre.

Comme nous l'avons déjà indiqué au § 203, les caractéristiques courant-tension d'une inductance non linéaire peuvent être obtenues soit par voie expérimentale à l'aide du schéma de la fig. 241, *a*, soit par voie de calcul.

Examinons la méthode de calcul basée sur l'utilisation des caractéristiques généralisées dont nous avons parlé au § 206.

Admettons que la valeur instantanée du champ magnétique H varie en fonction de la valeur instantanée de l'induction magnétique B suivant la loi du sinus hyperbolique:

$$H=\alpha \operatorname{sh} \beta B. \qquad (9.35)$$

H joue le même rôle dans l'expression (9.35) que y a joué dans (9.1), et B — le rôle de x.

En partant du l'analogie entre (9.35) et (9.1) on voit clairement que les caractéristiques suivant les premiers harmoniques d'une inductance non linéaire contrôlable coïncident totalement avec les caractéristiques de la fig. 242, *b* si on substitue βB_m à βx_m, $\frac{H_{1m}}{2\alpha}$ à $\frac{y_{1m}}{2\alpha}$ et le paramètre $\frac{H_0}{\alpha}$ à $\frac{y_0}{2\alpha}$. Il résulte de (9.27) que

$$\beta B_m=\frac{\beta U_m}{\omega w_1 S}=\frac{\beta\sqrt{2}U}{\omega w_1 S}.$$

ou

$$U=\beta B_m\frac{\omega w_1 S}{\beta\sqrt{2}}. \qquad (9.36)$$

D'autre part, on a suivant (9.33)

$$I_{1m}=\sqrt{2}I_1=\frac{H_{1m}l}{w_1}$$

Par conséquent,

$$I_1=\frac{H_{1m}}{2\alpha}\frac{\alpha l\sqrt{2}}{w_1}. \qquad (9.37)$$

n vertu de (9.32)

$$I_0=\frac{H_0}{\alpha}\frac{\alpha l}{w_0}. \qquad (9.38)$$

Ainsi, pour passer de la famille des courbes exprimées en unités sans dimensions

$$\beta B_m=f\frac{(H_{1m})}{2\alpha},$$

pour le paramètre $\frac{H_0}{\alpha}$, à une famille de courbes $U_1 = f(I_1)$ pour le paramètre I_0, il faut modifier l'échelle des ordonnées dans le rapport de $\frac{\omega w_1 s}{\beta\sqrt{2}}$, celle des abscisses de $\frac{\alpha l\sqrt{2}}{w_1}$ et multiplier la valeur du paramètre par $\frac{\alpha l}{w_0}$.

E x e m p l e 107. L'inductance non linéaire contrôlable, fig. 243, a les caractéristiques suivantes:

$$S=2,2\ cm^2;\quad l=25\ cm;\quad w_1=250;\quad w_0=1775.$$

L'expression analytique de la courbe d'aimantation $H=0,71$ sh $(5,75B)$. En utilisant les courbes

$$\beta x_m=f\left(\frac{y_{1m}}{2\alpha}\right)$$

pour un paramètre $\frac{y_0}{\alpha}$ (fig. 242, *b*) on demande de construire pour cette inductance la famille des caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques $U_1 = f(I_1)$, pour le paramètre I_0.

S o l u t i o n. Calculons le coefficient pour passer de βx_m à la tension U:

$$\frac{\omega w_1 S}{\beta\sqrt{2}}=\frac{314\cdot 250\cdot 2,2\cdot 10^{-4}}{5,75\sqrt{2}}=2,13.$$

Ainsi, pour passer de βx_m à la tension U on doit augmenter l'échelle des ordonnées de la fig. 242, *b* de 2,13 fois. Calculons le coefficient pour passer de $\frac{H_{1m}}{2\alpha}$ à la valeur efficace du premier harmonique du courant:

$$\frac{\alpha l\cdot\sqrt{2}}{w_1}=\frac{0,71\cdot 0,25\sqrt{2}}{250}=10^{-3}.$$

Par conséquent, l'échelle des abscisses doit être réduite de 10^{-3} fois. Le coefficient de transition de $\frac{H_0}{\alpha}$ au courant I_0 est

$$\frac{\alpha l}{w_0}=\frac{0,71\cdot 0,25}{1775}=10^{-4}.$$

La famille des courbes courant-tension est représentée sur la fig. 245.

Dans les ouvrages consacrées aux circuits électriques à inductances non linéaires on emploie l'expression *réactance inductive d'une inductance non linéaire suivant le premier harmonique.*

On appelle réactance inductive suivant le premier harmonique le rapport de la valeur efficace du premier harmonique de la tension U_1 aux bornes de l'enroulement d'une inductance non linéaire, branchée à un circuit à courant alternatif,

à la valeur efficace du premier harmonique du courant I_1, circulant dans cet enroulement :

$$X_1=\frac{U_1}{I_1},$$

où X_1 — fonction de la tension U_1 et du courant d'aimantation I_0.

On peut se rendre compte de la nature des variations de X_1 en fonction de U_1, I_0 étant constant, ainsi que de la nature de variation de X_1, en fonction de I_0, U_1 étant constant en étudiant les courbes de la fig. 245. Ainsi, si l'on prend $U_1 = 8,52\ V$, on a pour $I_0 = 0$, $I_1 = 0,01\ A$ et, par conséquent,

$$X_1=\frac{8,52}{0,01}=852\Omega.$$

Pour $I_0=0,01A$

$$X_1=\frac{8,52}{0,084}=101\Omega.$$

Pour $I_0=0,015A$

$$X_1=\frac{8,52}{0,128}=66,5\Omega.$$

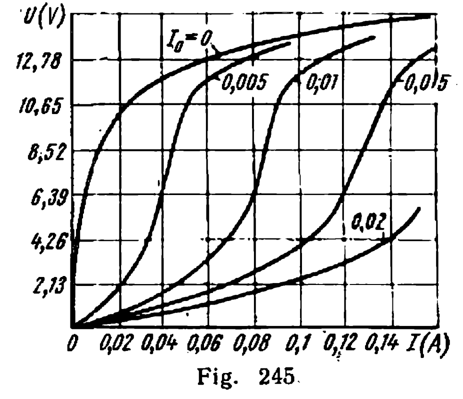


Fig. 245.

Ainsi, en faisant varier l'intensité du courant d'aimantation I_0, on peut modifier la valeur de la réactance non linéaire X_1.

Nous utiliserons cette constatation au § 246 en étudiant le principe de fonctionnement d'un amplificateur magnétique.

Exemple 108. L'enroulement w_1 de l'inductance contrôlable de l'exemple 107 est branché sous une tension sinusoïdale $U = 12,2\ V$ ($f = 50\ Hz$). L'enroulement de commande w_0 est branché à une source de F.E.M. continue $E_0 = 1V$. La résistance active du circuit magnétisant $R_0 = 50\ \Omega$. Calculer l'amplitude de la composante alternative B_m et de la composante continue B_0 de l'inductance magnétique.

Solution. Conformément à (9.27)

$$B_m=\frac{12,2\cdot\sqrt{2}}{2\pi\cdot 50\cdot 250\cdot 2,2\cdot 10^{-4}}=1T\ ;\ \beta B_m=5,75.$$

Composante continue du courant

$$I_0=\frac{E_0}{R_0}=\frac{1}{50}=0,02A.$$

Composante continue du champ

$$H_0=\frac{I_0w_0}{l}=141,5A/m.$$

Paramètre

$$\frac{H_0}{\alpha}=\frac{141,5}{0,71}=200.$$

Conformément à (9.21)

$$\beta B_0=\mathrm{Ar\,sh}\frac{200}{J_0\,(j5,75)}=1,86\ ;$$

$$B_0=\frac{\beta B_0}{\beta}=\frac{1,86}{5,75}=0,324T.$$

§ 209. **Caractéristiques courant-tension d'une capacité non linéaire contrôlable, suivant les premiers harmoniques.** La caractéristique charge-tension d'une capacité non linéaire peut être exprimée avec une précision suffisante par un sinus hyperbolique:

$$u = \alpha \operatorname{sh} \beta_q. \qquad (9.39)$$

Soit la charge

$$q = Q_0 + Q_m \sin \omega t.$$

Ici Q_0 — composante continue de la charge, Q_m — amplitude du premier harmonique de la charge.

Dans ces conditions la tension aux bornes de la capacité comprendra une composante continue U_0, ainsi qu'un premier harmonique et des harmoniques supérieurs. Les expressions (9.17) à (9.20) peuvent être utilisées pour une capacité non linéaire, à condition de substituer U_0 à y_0, U_{1m} à y_{1m}, Q_m à x_m et Q_0 à x_0. En partant de là la composante continue de la tension aux bornes d'une capacité est

$$U_0 = \alpha \operatorname{sh} \beta Q_0 J_0 (j\beta Q_m). \qquad (9.40)$$

Le premier harmonique de la tension aux bornes de la capacité est égal à $2\alpha \operatorname{ch} \beta Q_0 [-jJ_1 (j\beta Q_m)] \sin \omega t$. Le courant circulant dans la capacité est égal à $\frac{dk}{dt}$. Par conséquent, le premier harmonique du courant à travers la capacité peut être écrit:

$$\frac{d}{dt}(Q_m \sin \omega t) = \omega Q_m \cos \omega t.$$

Son amplitude est:

$$\omega Q_m = \beta Q_m \frac{\omega}{\beta},$$

et sa valeur efficace est $\sqrt{2}$ fois plus petite:

$$I_1 = \beta Q_m \frac{\omega}{\beta \sqrt{2}}. \qquad (9.41)$$

On appelle caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques d'une capacité non linéaire contrôlable la valeur efficace du premier harmonique du courant circulant à travers la capacité I_1, exprimée en fonction de la valeur efficace du premier harmonique de la tension U_1 pour le paramètre U_0.

En partant de la correspondance donnée ci-dessus entre U_0 et y_0, y_{1m} et U_{1m}, etc., on peut dire que la famille des courbes

$$\beta Q_m = f\left(\frac{U_{1m}}{2\alpha}\right)$$

pour le paramètre $\frac{U_0}{\alpha}$, reproduit entièrement la famille des courbes

$$\beta x_m = f\left(\frac{y_{1m}}{2\alpha}\right)$$

pour le paramètre $\frac{y_0}{\alpha}$, représenté sur la fig. 242, *b*.

Pour passer de la famille des courbes $\beta Q_m = f\left(\frac{U_{1m}}{2\alpha}\right)$ à la famille de caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques d'une capacité non linéaire contrôlable, il faut tenir compte de l'expression (9.41) et de ce que la valeur efficace du premier harmonique de la tension aux bornes de la capacité est:

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{2\alpha} \alpha \sqrt{2}$$

et que

$$U_0 = \frac{U_0}{\alpha}\,\alpha.$$

En d'autres termes pour passer de la famille des courbes $\beta Q_m = f\left(\frac{U_{1m}}{2\alpha}\right)$ pour le paramètre $\frac{U_0}{\alpha}$ à la famille des courbes $I_1 = f(U_1)$ pour le paramètre U_0, il faut multiplier l'échelle des ordonnées par $\frac{\omega}{\beta\sqrt{2}}$, celle des abscisses par $\alpha\sqrt{2}$ et le paramètre par α. De même que pour les inductances non linéaires nous avons introduit la notion de réactance inductive suivant le premier harmonique (voir § 208), on utilise pour la capacité non linéaire la notion de *réactance capacitive suivant le premier harmonique*:

$$X_1 = \frac{U_1}{I_1}.$$

Ici U_1 — valeur efficace du premier harmonique de tension aux bornes d'une capacité non linéaire, I_1 — valeur efficace du premier harmonique de courant circulant à travers la capacité non linéaire, X_1 étant une fonction de la valeur U_1 et de la valeur U_0.

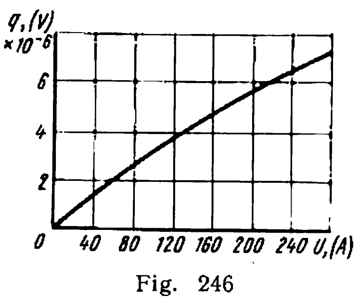


Fig. 246

Exemple 109. La caractéristique charge-tension du variconde type BK1-3 est représentée sur la fig. 246. Trouver les valeurs des coefficients α et β, dans l'expression $u = \alpha\,\text{sh}\,\beta q$.

Solution. Choisissons les deux points suivants sur la caractéristique:

$$u_1 = 120\,V;\quad q_1 = 3{,}7\cdot10^{-6}C;\quad u_2 = 320\,V;\quad q_2 = 8\cdot10^{-6}C.$$

Ecrivons l'expression pour calculer le coefficient β

$$\frac{u_2}{u_1} = 2{,}67 = \frac{\text{sh}\,(8\cdot10^{-6}\beta)}{\text{sh}\,(3{,}7\cdot10^{-6}\beta)}$$

et trouvons en partant de cette expression

$$\beta = 0{,}17\cdot10^6\ 1/C;\quad \alpha = \frac{u_2}{\text{sh}\,(8\cdot10^{-6}\beta)} = \frac{320}{1{,}82} = 175{,}5\,V.$$

Exemple 110. La charge q du variconde de l'exemple précédent varie suivant la loi $q = Q_0 + Q_m \sin\omega t$; soit $Q_0 = 3\cdot10^{-6}\,C$; $Q_m = 4\cdot10^{-6}\,C$; $\omega = 3140\ s^{-1}$.

Ecrire l'expression pour la valeur instantanée de la tension aux bornes du condensateur et trouver le courant qui y circule.

Solution. Trouvons

$$\beta Q_0 = 3\cdot0{,}17 = 0{,}49;\quad \beta Q_m = 4\cdot0{,}17 = 0{,}68;$$

$$\text{sh}\,\beta Q_0 = 0{,}51;\quad \text{ch}\,\beta Q_0 = 1{,}12;$$

$$U_0 = \alpha\,\text{sh}\,\beta Q_0 J_0(j\beta Q_m) = 175{,}5\cdot0{,}51\cdot1{,}12 = 100\,V;$$

$$u = U_0 + U_{1m}\sin\omega t + U_{2m}\cos2\omega t + U_{3m}\sin3\omega t + \ldots$$

$$U_{1m} = 2\alpha\,\text{ch}\,\beta Q_0\,[-jJ_1(j\beta Q_m)] = 2\cdot175{,}5\cdot1{,}12\cdot0{,}368 = 144\,V;$$

$$U_{2m} = 2\alpha\,\text{sh}\,\beta Q_0\,[J_2(j\beta Q_m)] = -2\cdot175{,}5\cdot0{,}51\cdot0{,}065 = 11{,}6\,V;$$

$$U_{3m} = 2\alpha\,\text{ch}\,\beta Q_0\,[-jJ_3(j\beta Q_m)] = 2\cdot175{,}5\cdot1{,}12\cdot0{,}008 = 3{,}14\,V.$$

L'amplitude du courant cherché:

$$I_m = \omega Q_m = 3140\cdot4\cdot10^{-6} = 0{,}012A.$$

E x e m p l e 111a. Un condensateur non linéaire à caractéristique $u = 175{,}5 \cdot \mathrm{sh}\,(0{,}17 \cdot 10^6\, q)$ est traversé par un courant dont le premier harmonique ($\omega = 3140\ s^{-1}$) a une amplitude $I_{1m} = 18{,}45\ mA$. La composante continue de la tension aux bornes du condensateur $U_0 = 106{,}2\ V$. Amplitude du premier harmonique de la tension $U_{1m} = 217{,}5\ V$. Trouver la composante continue de la charge Q_0 ainsi que l'amplitude du premier harmonique Q_m.

S o l u t i o n. Calculons:

$$Q_m = \frac{I_{1m}}{\omega} = \frac{0{,}01845}{3140} = 5{,}88 \cdot 10^{-6} C.$$

Ecrivons l'équation pour calculer βQ_0.

$$\frac{U_0}{U_{1m}} = \frac{\mathrm{sh}\,\beta Q_0 J_0\,(j\beta Q_m)}{2\,\mathrm{ch}\,\beta Q_0\,[-jJ_1\,(j\beta Q_m)]}.$$

Trouvons en partant de là

$$\mathrm{th}\,\beta Q_0 = \frac{2U_0\,[-jJ_1\,(j\beta Q_m)]}{U_{1m} J_0\,(j\beta Q_m)} = 2 \cdot \frac{106{,}2 \cdot 0{,}56}{217{,}5 \cdot 1{,}26} = 0{,}432;$$

$$\beta Q_0 = 0{,}463; \quad Q_0 = 2{,}72 \cdot 10^{-6} C.$$

§ 210. Généralités sur les triodes à cristaux. A l'heure actuelle la très grande majorité des triodes à cristaux, appelées transistors, sont exécutées à partir du germanium, soumis à un traitement spécial.

La région d'un transistor constituée par du germanium dans lequel on a incorporé des corps étrangers, dits « impuretés », cédant facilement leurs électrons (phosphore, antimoine, arsenic) est appelée région type *n* ou région *n* tout court (*n* étant la première lettre du mot négatif). Cette désignation indique que la conductibilité de la région *n* est créée dans l'essentiel par les porteurs de charges négatives. Le dopage du germanium par une quantité infime d'impuretés, ayant sur leur orbite extérieure un électron de moins que le germanium (bore, aluminium, gallium ou indium) donne lieu à un excès des porteurs des charges positives dans le germanium.

La région du transistor à excès de porteurs de charges positives est appelée région type *p* ou région *p* (*p* étant la première lettre du mot positif). La conductibilité de la région *p* est due dans l'essentiel aux porteurs de charges positives *.

Un transistor type *p — n — p* est un cristal de germanium (de germanium *p*) au milieu duquel il s'est formé au cours de la fabrication une très fine couche *n* (de 0,02 à 0,025 *mm* d'épaisseur) (fig. 247, *a*). Dans un autre type de transistor, moins répandu actuellement et que nous n'allons pas examiner ici, à savoir dans le transistor type *n — p — n*, la région moyenne, est la région *p* et les deux régions extrêmes sont des régions *n*. Les signes + figurant dans la région *p* désignent par convention les porteurs de charges positives et les signes —, tracés dans la région *n*, les porteurs de charges négatives. La couche de tran-

* Les porteurs de charges positives dans les semi-conducteurs sont les lacunes (trous). On appelle lacunes les liens de valence vacants des atomes. Les lacunes peuvent se déplacer dans le réseau cristallin comme si elles étaient des charges positives.

sition entre les régions p et n (il existe deux de ces couches dans un transistor) est à conductibilité unilatérale. Pratiquement le courant dans cette couche ne peut circuler que lorsque le potentiel de la région p est supérieur au potentiel de la région n.

Chaque transistor possède trois sorties. La première d'entre elles partant de la première région p est appelée collecteur (C), la deuxième,

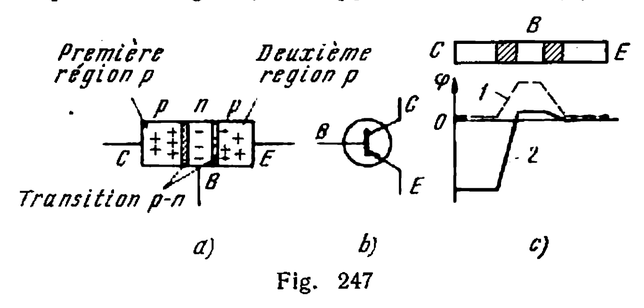


Fig. 247

partant de la deuxième région p est appelée émetteur (E) et la troisième, partant de la région n, est appelée base (B). Dans les schémas électriques le transistor est représenté par un cercle à l'intérieur duquel on trace un gros trait (fig. 247, b). Trois conducteurs partent de trait. L'un des conducteurs (celui de la base) se trouve sur un côté et les deux autres sont tracés de l'autre côté. L'un de ces deux conducteurs, portant une flèche, est celui de l'émetteur, et l'autre, qui n'a pas de flèche, est celui du collecteur.

§ 211. Trois modes essentiels de branchement des transistors à un circuit. On distingue trois modes essentiels de branchement des transistors à un circuit. Ces trois modes diffèrent l'un de l'autre par l'électrode

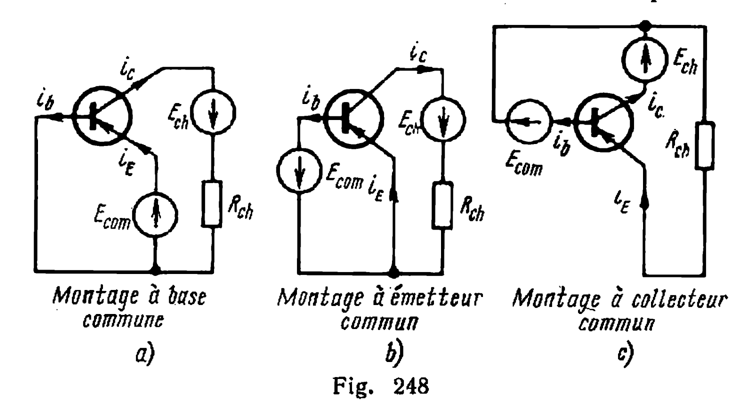


Fig. 248

du transistor, commun pour les circuits de commande et à commander. Sur la fig. 248, a on a représenté un montage à base commune (à la masse), sur la fig. 248, b un montage à émetteur commun (à la masse) et sur la fig. 248, c un montage à collecteur commun (à la masse).

Dans tous ces montages E_{ch} — source de la F.E.M. dans le circuit de charge, E_{com} — source de F.E.M. dans le circuit de commande. Dans tous les montages utilisant les transistors du type $p — n — p$ la polarité des sources de F.E.M. doit être telle que le collecteur soit porté à un potentiel négatif par rapport à la base et l'émetteur ait un potentiel positif par rapport à la même base.

§ 212. **Principe de fonctionnement d'un transistor utilisé comme résistance contrôlable.** Examinons les notions essentielles caractérisant le fonctionnement d'un transistor, en utilisant pour cela un montage à base commune (fig. 248, *a*).

Il existe des charges volumétriques dans la couche de transition entre l'émetteur et la base ainsi que dans la couche de transition entre la base et le collecteur *. Dans la région p les charges volumétriques sont négatives et dans la région n elles sont positives.

Les charges volumétriques existant dans chaque couche de transition y créent un champ électrique dirigé de la région n vers la région p. En d'autres termes, ce champ s'oppose au passage des porteurs de charges positives de la région p dans la région n, ainsi qu'au passage des porteurs de charges négatives de la région n dans la région p.

La différence de potentiel dans la couche de transition entre les régions p et n est appelée barrière de potentiel.

Les valeurs des différences de potentiel dans les couches de transition dépendent de la valeur et de la polarité de chacune des F.E.M. branchée au montage.

Ainsi, le branchement de la F.E.M. E_{com} dans le montage de la fig. 248, *a* donne lieu à une diminution de la différence de potentiel dans la couche de transition entre l'émetteur et la base, par rapport à la différence de potentiel existant dans cette couche lorsque la F.E.M. E_{com} n'était pas en circuit. A son tour le branchement de la F.E.M. E_{ch} donne lieu à une augmentation de la différence de potentiel entre la base et le collecteur, par rapport à la différence de potentiel existant dans cette couche lorsque E_{ch} n'était pas en circuit.

En effet l'intensité résultante du champ dans la couche de transition collecteur — base est, en présence de la F.E.M. E_{ch}, égale à la somme des intensités dues aux charges volumétriques et à la F.E.M. E_{ch} ; par contre l'intensité du champ dans la couche de transition émetteur — base en présence de la F.E.M. E_{com} est égale à la différence des intensités dues aux charges volumétriques et à la F.E.M. E_{com}.

La courbe *1* de la fig. 247, *c* représente au point de vue qualitatif la loi de variation du potentiel φ le long du transistor en l'absence des F.E.M. E_{ch} et E_{com}. La courbe *2* de la même figure donne la variation de ce potentiel en présence des F.E.M. E_{ch} et E_{com}. Lorsque la barrière de potentiel entre l'émetteur et la base n'est pas élevée, des lacunes (des porteurs de charges positives) ** se déplacent de la région de l'émetteur dans celle de la base, branchée au pôle négatif de la F.E.M. E_{com}.

* Ces charges ne sont pas représentées sur la fig. 247, *a*.

** Quelques charges négatives peu nombreuses se déplacent dans ces conditions de la base vers l'émetteur, mais le courant qu'elles créent est relativement faible.

Une recombinaison partielle des charges positives et négatives a lieu dans ces conditions dans la région n ; cependant, grâce à la faible épaisseur de la couche n, la très grande majorité des porteurs des charges positives a le temps de défiler vers la couche de transition entre la base et le collecteur. Dans cette couche les porteurs de charges positives subissent l'action d'un champ électrique intense dû à la source de la F.E.M. E_{ch} (en général $E_{ch} \gg E_{com}$). Sous l'effet de ce champ les porteurs de charges positives sont attirés dans la région du collecteur et se déplacent vers l'électrode du collecteur. Ainsi, la plus grande partie des porteurs de charges positives provenant de l'émetteur et arrivés dans la région n se précipitent vers le collecteur (le potentiel du collecteur est négatif par rapport au potentiel de la base et celui de l'émetteur).

Il s'ensuit qu'une très faible quantité de porteurs de charges positives, parmi ceux qui sont sortis de la région de l'émetteur et sont passés dans la région de la base, arrivent à l'électrode de la base.

Les sens positifs pour les courants étant ceux indiqués sur la fig. 248, *a* le courant de l'émetteur (i_E) est égal à la somme du courant du collecteur (i_C) et du courant de la base (i_B)

$$i_E = i_C + i_B.$$

Le rapport du courant du collecteur au courant de l'émetteur est habituellement désigné par α

$$\alpha = \frac{i_C}{i_E}.$$

Dans les transistors à jonction (voir § 213) α est égal à 0,95—0,98 et dépend du régime du fonctionnement du transistor. Dans les transistors à contact α peut même être plus grand que l'unité. Le transistor est une résistance active contrôlable. On peut faire varier dans un transistor le courant du collecteur et la chute de tension entre les électrodes du circuit collecteur en faisant varier la valeur de la F.E.M. E_{com}.

Il ne faut pas perdre de vue que lors de l'inversion de la polarité de la F.E.M. E_{ch} dans le montage de la fig. 248, *a* le transistor devient incontrôlable et fonctionne dans le tronçon du circuit situé entre la base et le collecteur comme une diode ordinaire, non contrôlable. C'est un régime anormal pour un transistor.

§ 213. Transistors à jonction et à contact. Les transistors peuvent être soit à jonction soit à contact. Dans les transistors à jonction la limite de séparation entre les régions p et n a une surface relativement importante. Dans les transistors à contact la transition de la région p en région n a lieu à l'endroit du contact ponctuel entre ces régions. En d'autres termes, la limite de séparation entre les régions a une surface très petite dans les transistors à contact.

Les transistors à jonction sont utilisés aux basses et moyennes fréquences et aux courants relativement forts, tandis que les transistors à contact sont employés pour des fréquences plus élevées et des courants faibles *.

* A l'heure actuelle on emploie souvent des transistors à jonction à la place des transistors à contact même pour des fréquences élevées.

§ 214. **Caractéristiques courant-tension des transistors.** Les propriétés de chaque transistor sont déterminées entièrement par deux familles de ses caractéristiques courant-tension. La première famille donne le courant du circuit de sortie en fonction de la tension entre les électrodes du transistor intercalées dans ce circuit pour l'un quelconque des autres courants du transistor, pris comme paramètre. On peut prendre également comme paramètre une autre valeur quelconque comme, par exemple, la tension entre les électrodes du transistor, branchées dans le circuit de commande. Cette famille de courbes décrit les propriétés du transistor par rapport au circuit de sortie. La deuxième famille donne le courant du circuit d'entrée, autrement dit du circuit de commande,

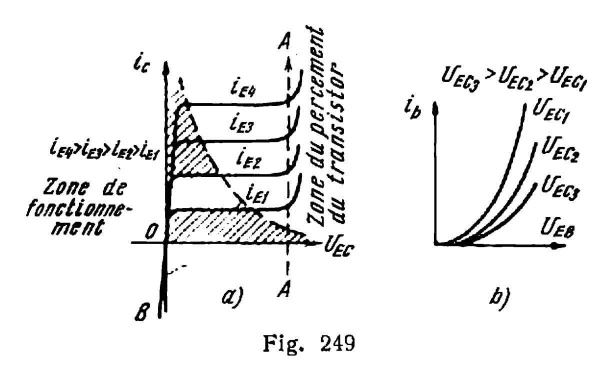


Fig. 249

en fonction de la tension entre les électrodes du transistor, intercalées dans le circuit d'entrée, lorsque la tension entre les électrodes du transistor branchées au circuit de sortie (ou le courant du circuit de sortie) est prise comme paramètre. Cette famille de caractéristiques décrit les propriétés des transistors par rapport au circuit de commande.

La fig. 249, *a* représente qualitativement une famille de caractéristiques de sortie $i_C = f(u_{EC})$, i_E étant pris comme paramètre, pour un montage à émetteur commun (fig. 248, *b*). A droite de la verticale $A - A$, représentée en pointillé, les courbes commencent à monter rapidement ; un percement du transistor peut avoir lieu dans cette région. Par conséquent, on ne doit pas utiliser le transistor dans la région se trouvant à droite de la verticale $A - A$.

La courbe OB, montrant que le transistor devient incontrôlable lorsqu'on inverse la polarité de la F.E.M. dans le circuit de sortie, se trouve dans le troisième quartier du dessin.

Lorsqu'un courant circule dans le transistor, celui-ci s'échauffe par suite de la chaleur qu'y est dégagée. Chaque transistor peut céder au milieu ambiant une certaine quantité de chaleur, fonction de ses dimensions et des conditions de refroidissement. La quantité maximale admissible de la chaleur dégagée dans un transistor est caractérisée par la puissance dite de dissipation $p_C = u_{EC} i_C$ (cette puissance est indiquée dans les catalogues). L'hyperbole $i_C = \frac{p_C}{u_{EC}} = f(u_{EC})$ est tracée au

pointillé sur la fig. 249, *a*. Afin que le transistor ne chauffe pas exagérément en régime permanent, le point de fonctionnement doit se trouver à l'intérieur de la région hachurée de la fig. 249, *a* (le transistor peut fonctionner par intermittence également dans la région située au-dessus de la courbe en pointillé). La famille de caractéristiques d'entrée du transistor $i_B = f(u_{EB})$, branché à émetteur commun (fig. 248, *b*), u_{EC} étant pris comme paramètre, est représentée qualitativement sur la fig. 249, *b*.

Il y a lieu de signaler que tous les courants du transistor (par exemple i_C ou i_B) sont des fonctions non pas d'une seule variable, mais de deux. Ainsi, le courant i_C est fonction en même temps de u_{EC} et de i_E. Le courant i_B est fonction de i_{EB} et de u_{EC}. On tiendra compte de cette propriété au § 218.

Un transistor peut être utilisé comme amplificateur de courant, amplificateur de tension et amplificateur de puissance.

§ 215. Transistor utilisé comme amplificateur de courant. Un transistor peut être utilisé comme amplificateur de courant lorsque le gain (Δ) en courant dans le circuit commandé (c'est-à-dire celui qui comporte la F.E.M. E_{ch}) est plusieurs fois plus grand que le gain du courant dans le circuit de commande (à savoir celui qui comprend la F.E.M. E_{com}). Parmi les trois montages de la fig. 248, on peut utiliser comme amplificateur de courant deux d'entre eux : le montage à émetteur commun (fig. 248, *b*) et le montage à collecteur commun (fig. 248, *c*). Dans ces deux montages le courant i_B de la base joue le rôle de courant de commande. Le courant du circuit commandé dans le montage à émetteur commun est le courant i_C du collecteur et dans le montage à collecteur commun, c'est le courant i_E de l'émetteur.

Du fait que $i_C = \alpha i_E$ (voir § 212) et qu'en même temps

$$i_E = i_C + i_B,$$

on a

$$i_B = i_E - i_C = (1-\alpha)\, i_E.$$

Comme nous l'avons déjà indiqué au § 212, le coefficient α dépend du régime de fonctionnement du transistor, c'est-à-dire des courants qui y circulent et varie quelque peu lorsqu'on passe d'un régime de fonctionnement à un autre.

Cependant, lorsqu'on calcule les liens entre de faibles accroissements des courants on peut, en première approximation, considérer que α = const. et alors

$$\Delta i_C = \alpha \Delta i_E$$

et

$$\Delta i_B = (1-\alpha)\, \Delta i_E.$$

Le gain en courant k_i est égal au rapport de l'accroissement du courant à la sortie à celui du courant à l'entrée. Le gain en courant pour un montage à émetteur commun où le courant de sortie est le courant

i_C et le courant à l'entrée i_B, est

$$k_i = \frac{\Delta i_C}{\Delta i_B} = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Le gain en courant pour un montage à collecteur commun où i_E est le courant de sortie et i_B est celui à l'entrée est:

$$k_i = \frac{\Delta i_E}{\Delta i_B} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Le coefficient α pour les transistors à jonction est égal à 0,95—0,98 approximativement et par conséquent $k_i \approx$ 19—50.

§ 216. Utilisation d'un transistor comme amplificateur en tension. Lorsqu'un transistor est utilisé comme amplificateur en tension, il faut que l'accroissement de la tension aux bornes de la charge Δu_{sor}, branchée dans le circuit de sortie, soit plus grand que l'accroissement de tension à l'entrée du circuit de commande Δu_{ent}.

Le gain en tension est $k_u = \frac{\Delta u_{sor}}{\Delta u_{ent}}$. Lorsqu'on emploie un transistor comme amplificateur de tension, on doit le brancher soit suivant un montage à base commune (fig. 248, *a*), soit suivant un montage à émetteur commun (fig. 248, *b*).

Montrons qu'au point de vue qualitatif le gain en tension pour ces deux montages peut être de l'ordre de plusieurs centaines. A cette fin rapportons-nous aux deux considérations suivantes: rapport entre les résistances d'entrée et de sortie du transistor et rapport entre la résistance de la charge et la résistance de sortie du transistor.

1. Rapport entre les résistances d'entrée et de sortie d'un transistor. La résistance d'entrée d'un transistor, R_{ent}, est égale au rapport de l'accroissement de tension aux bornes d'entrée du transistor à l'accroissement du courant d'entrée.

La résistance de sortie du transistor R_{sor} est égale au rapport de l'accroissement de la tension aux bornes de sortie du transistor à l'accroissement du courant de sortie.

Pour un montage à base commune

$$R_{ent} = R_{ent\,EB} = \frac{\Delta u_{EB}}{\Delta i_E};$$

$$R_{sor} = R_{sor\,EC} = \frac{\Delta u_{EC}}{\Delta i_C}.$$

Par conséquent, pour ce montage R_{sor} s'avère être de deux ordres environ supérieur à R_{ent}.

Pour un montage à émetteur commun

$$R_{ent} = R_{ent\,EB} = \frac{\Delta u_{EB}}{\Delta i_B};$$

$$R_{sor} = R_{sor\,EC} = \frac{\Delta u_{EC}}{\Delta i_C}.$$

En général pour un montage à émetteur commun R_{sor} est plusieurs fois plus grand que R_{ent}.

2. Rapport entre la résistance de la charge et la résistance de sortie du transistor. Lorsque le transistor est utilisé comme amplificateur de tension (de même que comme un amplificateur de puissance), la résistance de la charge R_{ch} pour les deux montages est habituellement du même ordre que la résistance de sortie du transistor du côté des bornes émetteur-collecteur, c'est-à-dire

$$R_{ch} \approx R_{sor\,EC}.$$

Ecrivons les expressions nécessaires pour calculer k_u dans un montage à base commune:

$$k_u = \frac{\Delta u_{sor}}{\Delta u_{ent}} = \frac{\Delta i_C R_{ch}}{\Delta i_E R_{ent\,EB}},$$

mais $\frac{\Delta i_C}{\Delta i_E} = \alpha$, et $\frac{R_{ch}}{R_{ent\,EB}} \approx \frac{R_{sor\,EC}}{R_{ent\,EB}}$, par conséquent, $k_u = \alpha \frac{R_{sor\,EC}}{R_{ent\,EB}}$. Si on tient compte que α est voisin de 1, on a pour un montage à base commune $k_u \approx \frac{R_{sor\,EC}}{R_{ent\,EB}}$, c'est-à-dire qu'il est de l'ordre de plusieurs centaines.

Ecrivons maintenant la même expression pour k_u pour un montage à émetteur commun.

Le courant d'entrée dans un montage à émetteur commun est le courant de base, tandis que le courant de sortie est celui du collecteur. Par conséquent,

$$k_u = \frac{\Delta u_{sor}}{\Delta u_{ent}} = \frac{\Delta i_C R_{ch}}{\Delta i_B R_{ent\,EB}} \approx \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{R_{sor\,EC}}{R_{ent\,EB}}.$$

Si on tient compte que $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 19$ à 49 et que le rapport $\frac{R_{sor\,EC}}{R_{ent\,EB}}$ dans un montage à émetteur commun est de l'ordre de plusieurs unités, k_u pour un montage à émetteur commun peut avoir une valeur comprise entre plusieurs dizaines et plusieurs centaines.

§ 217. Utilisation d'un transistor comme amplificateur de puissance. L'amplification de puissance peut être obtenue à l'aide de tous les montages de la fig. 248. Le gain en puissance k_p est égal au rapport de l'accroissement de la puissance dissipée dans la charge à l'accroissement de la puissance absorbée à l'entrée du transistor:

$$k_p = \frac{\Delta P_{ch}}{\Delta P_{ent}}.$$

Pour le montage de la fig. 248, *a*

$$k_p \approx \frac{(\Delta i_C)^2 R_{ch}}{(\Delta i_E)^2 R_{ent\,EB}} \approx \frac{R_{sor\,EC}}{R_{ent\,EB}}.$$

Ainsi, le gain en puissance pour le montage 248, *a* est égal, en première approximation, au gain en tension pour le même montage. Le gain

maximum en puissance est obtenu pour un montage à émetteur commun. Pour ce montage k_p peut atteindre des valeurs de 10^4 et même plus.

§ 218. Relation entre les accroissements des grandeurs d'entrée et de sortie pour un transistor. La tension aux bornes d'entrée d'un transistor (appelons-la pour la généralité u_1) et la tension à ses bornes de sortie (u_2) sont fonction des courants d'entrée (i_1) et de sortie (i_2) du transistor, c.-à-d.:

$$u_1 = U_1(i_1, i_2), \tag{9.42a}$$

$$u_2 = U_2(i_1, i_2). \tag{9.42b}$$

L'expression $u_1 = U_1(i_1, i_2)$ montre que u_1 est fonction de deux variables (i_1 et i_2). Désignons par convention les valeurs initiales des courants et des tensions par les majuscules U, I et leur accroissement par Δi et Δu. Supposons que les courants aient reçu de faibles accroissements Δi_1 et Δi_2 et soient devenus égaux à $(I_1 + \Delta i_1)$ et $(I_2 + \Delta i_2)$ respectivement. Dans ces conditions les tensions ont également augmenté et sont devenues égales à $(U_1 + \Delta u_1)$ et $(U_2 + \Delta u_2)$. Par conséquent,

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1[(I_1 + \Delta i_1);\ (I_2 + \Delta i_2)], \tag{9.43a}$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2[(I_1 + \Delta i_1);\ (I_2 + \Delta i_2)]. \tag{9.43b}$$

Trouvons les relations entre les accroissements des tensions Δu_1 et Δu_2 et ceux des courants Δi_1 et Δi_2. A cette fin développons les seconds membres des égalités (9.43a) et (9.43b) en série de Taylor pour les fonctions de deux variables suivant les puissances des accroissements Δi_1 et Δi_2; profitons de la possibilité de négliger les termes comprenant Δi_1 et Δi_2 à des puissances supérieures à la première du fait que ces accroissements sont très petits. Nous obtenons ainsi:

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1(I_1, I_2) + \Delta i_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} + \Delta i_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2};$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2(I_1, I_2) + \Delta i_1 \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} + \Delta i_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2}.$$

Ici $\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2}$ désigne la dérivée partielle de U_1 par rapport au courant i_1, dans laquelle on a substitué les valeurs de I_1 et I_2, correspondant aux courants initiales (avant leurs accroissements); $\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2}$ est la dérivée partielle de U_1, par rapport à i_2, dans laquelle on a substitué les valeurs de I_1 et I_2.

Pour simplifier les écritures utilisons les désignations suivantes

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} = R_{11}, \quad \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2} = R_{12};$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} = R_{21}; \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2} = R_{22}.$$

Constatons que

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} = R_{21}$$

n'est pas égale à

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2} = R_{12}.$$

Les valeurs de R_{11}, R_{12}, R_{21} et R_{22} peuvent être trouvées par la méthode graphique en partant des caractéristiques du transistor et, par conséquent, nous supposerons par la suite que ces valeurs soient connues. Si on soustrait de l'équation (9.43a), l'équation (9.42a), si on soustrait de l'équation (9.43b), l'équation (9.42b) et si on remplace ensuite les dérivées partielles par R_{11}, R_{12}, R_{21} et R_{22} respectivement, on obtient

$$\Delta u_1 = R_{11}\Delta i_1 + R_{12}\Delta i_2, \tag{9.44a}$$

$$\Delta u_2 = R_{21}\Delta i_1 + R_{22}\Delta i_2. \tag{9.44b}$$

Les expressions (9.44) donnent les liens entre les faibles accroissements des courants Δi_1 et Δi_2 et les faibles accroissements des tensions Δu_1 et Δu_2. Il découle des expressions (9.44) qu'on peut remplacer, pour de faibles accroissements, un transistor, considéré comme une résistance non linéaire contrôlable par un schéma équivalent linéaire approprié.

§ 219. Schéma équivalent d'un transistor pour de faibles accroissements. Dans les ouvrages spécialisés, traitant des transistors, on substitue dans les schémas équivalents des triodes, pour de faibles accroissements, non par les résistances R_{11},

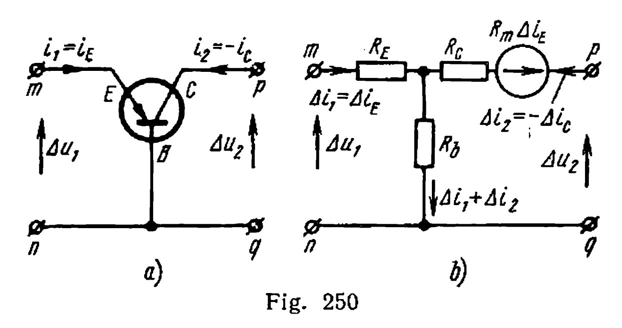


Fig. 250

R_{12}, R_{21}, R_{22}, dont nous avons parlé ci-dessus, mais certaines résistances théoriques, à savoir la résistance de la base R_B, la résistance du collecteur R_C et la résistance de l'émetteur R_E, ainsi qu'une certaine source de F.E.M. théorique, dont la F.E.M. est égale au produit du courant circulant dans le circuit de commande par la résistance théorique R_m.

Les valeurs de R_B, R_C, R_E et R_m sont calculées à partir de R_{11}, R_{12}, R_{21} et R_{22}.

Examinons le schéma équivalent d'un transistor dont la base est utilisée comme électrode commune. La fig. 250, *a* représente justement un montage à base commune. Le courant d'entrée de ce montage est i_1, égale au courant de l'émetteur $i_1 = i_E$, le courant de sortie i_2 étant égal au courant du collecteur pris, avec le signe contraire $i_2 = -i_C$ (le sens positif choisi pour le courant i_2 est opposé au sens positif du courant i_C de la fig. 248, *a*). Le montage de la fig. 250, *b* est équivalent au montage de la fig. 250, *a* pour de faibles accroissements. Conformément à la deuxième loi de Kirchhoff, écrivons les équations pour les deux mailles du schéma, de la fig. 250, *b*

$$\Delta u_1 = (R_E + R_B)\,\Delta i_1 + R_B\Delta i_2; \tag{9.45a}$$

$$\Delta u_2 - R_m\Delta i_E = R_B\Delta i_1 + (R_C + R_B)\,\Delta i_2; \tag{9.45b}$$

$$\Delta u_1 = u_{mn} = \varphi_m - \varphi_n; \quad \Delta u_2 = u_{pq} = \varphi_p - \varphi_q,$$

où φ_m — potentiel du point m; φ_n — potentiel du point n, etc.

En comparant les équations (9.45) aux équations (9.44), on obtient

$$R_E + R_B = R_{11}; \quad R_B = R_{12};$$

$$R_m + R_B = R_{21}; \quad R_C + R_B = R_{22}.$$

Ces dernières équations permettent de trouver les résistances R_B, R_E, R_C et R_m en partant des résistances connues R_{11}, R_{21}, R_{12}, R_{22}. La source de F.E.M. $R_m\ \Delta i_E$ ($\Delta i_E = \Delta i_1$) est introduite dans le schéma équivalent de la fig. 250, *b* pour tenir compte dans les calculs de l'effet amplificateur du transistor : la F.E.M. de cette source est proportionnelle au courant d'entrée.

Ainsi, pour calculer les faibles accroissements des courants d'entrée et de sortie à l'aide du schéma linéaire de la fig. 250, *a* ainsi que pour calculer les gains et les résistances d'entrée de ce schéma pour de faibles accroissements, il faut effectuer le calcul du schéma linéaire de la fig. 250, *b* en branchant à ses bornes d'entrée *mn* une source de F.E.M. faible (sinusoïdale en général) et en raccordant à ses bornes de sortie *pq* une charge R_{ch}.

Le calcul des montages à transistor pour des fréquences relativement basses se fait dans la pratique non pas à l'aide des schémas équivalents, examinés ci-dessus, pour l'utilisation desquels il faut connaître les valeurs de R_E, R_B, R_C et R_m, mais en partant directement des familles des caractéristiques du transistor. Cette méthode de calcul est expliquée à l'aide de l'exemple 111b.

Exemple 111b. Calculer le gain en courant, le gain en tension et le gain en puissance du schéma de la fig. 251, *a* prévu pour amplifier des oscillations sinusoïdales faibles.

On emploie dans ce schéma le transistor type П 14. Ses caractéristiques de sortie sont représentées sur la fig. 251, *b* et ses caractéristiques d'entrée sont données sur la fig. 251, *c*. La résistance de la charge $R_{ch} = 500\Omega$. La F.E.M. de polarisation utilisée dans le circuit de sortie $E_{c0} = 10\ V$. La F.E.M. de polarisation dans le circuit de commande est $E_{com0} = 0{,}25\ V$.

Solution. Traçons sur la fig. 251, *b* une droite représentant la caractéristique courant-tension de la charge $R_{ch} = 500\Omega$. Cette droite passe par le point $i_C = 0$ et $u_{EC} = E_{C0} = 10\ V$ et par le point $i_C = \frac{E_{c0}}{R_{ch}} = 20\ mA$ et $u_{EC} = 0$.

La famille des caractéristiques d'entrée du transistor П 14, comme on peut le voir sur la fig. 251, *c* a ceci de particulier que dans l'intervalle des valeurs de u_{EC} de 0,2 à 10 V, la valeur du courant de base i_b, est représentée en fonction de la tension entre l'émetteur et la base par une seule et même courbe (pratiquement indépendante de la valeur u_{EC}). Calculons la valeur du courant $i_b = I_{b0}$ en l'absence d'un signal sinusoïdal à l'entrée, c'est-à-dire pour un régime pour lequel seule une F.E.M. continue $E_{com\ 0} = 0{,}25\ V$ agit à l'entrée du circuit de commande (ce circuit s'établit à travers la source du signal).

Il découle de la fig. 251, *c* que pour $u_{Eb} = 0{,}25\ V$ le courant $i_b = I_{b0} = 250\mu A$ (point *n*). Trouvons ensuite le courant $I_C = I_{C0}$ et la tension $u_{EC} = U_{EC0}$ pour ce régime.

Le régime de fonctionnement à $E_{com} = E_{com0}$ est déterminé sur la famille des courbes, fig. 251, *b* par le point *n*, obtenu par intersection de la caractéristique courant-tension de la charge avec celle des courbes de la famille $i_C = f\ (u_{EC})$, pour laquelle le paramètre i_b est égal à $250\mu A$.

Pour le point *n* $i_C = I_{C0} = 13{,}1\ mA$ et $u_{EC} = U_{EC0} = 3{,}5\ V$. Considérons comme linéaire la caractéristique d'entrée au point de fonction-

nement. A cette fin traçons de part et d'autre du point *n* (fig. 251, *b*) une droite qui coïncide sur la plus grande longueur possible — la tangente à la courbe $i_b = f(u_{Eb})$ au point *n*. Considérons les points *p* et *m* comme points extrêmes de cette droite. Au point *p* $i_b = 350 \mu A$ et $u_{Eb} = 0,27$ *V*. Au point *m* $i_b = 150$ μA et $u_{Eb} = 0,23$ *V*. Les points *p* et *n* correspondent aux points homologues que nous venons de définir sur la courbe 251, *b*.

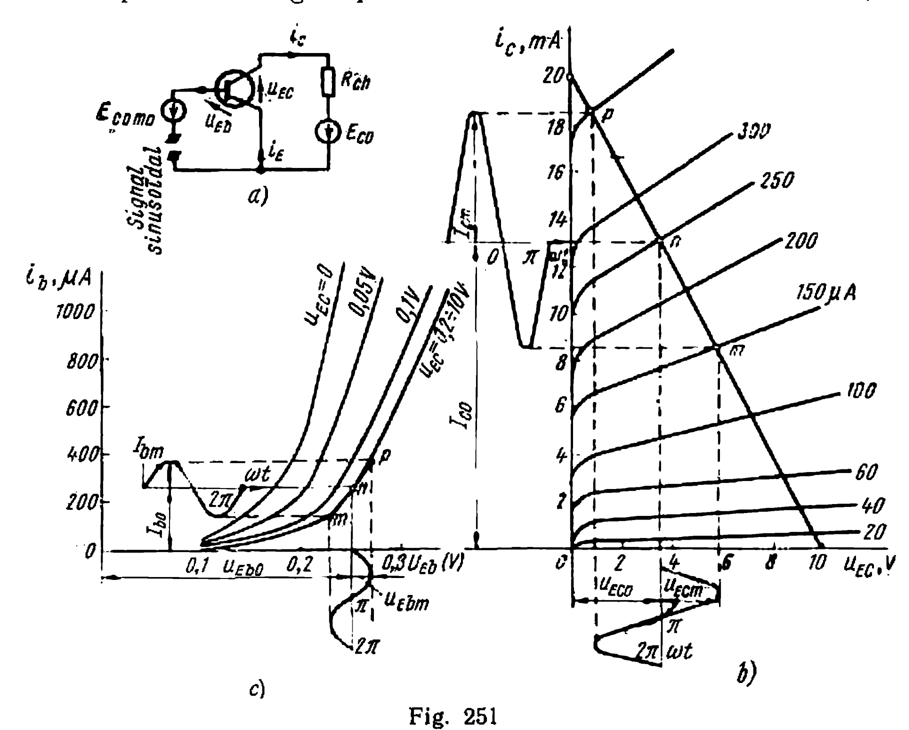


Fig. 251

Pour le point *p* (fig. 251, *b*) $i_C = 18,6$ *mA* et pour le point *m* $i_C =$ $= 8,6$ *mA*. Ainsi, lorsqu'on applique à l'entrée du circuit considéré une tension sinusoïdale à amplitude $U_{Ebm} = 0,02$ *V* une composante sinusoïdale du courant à amplitude $I_{bm} = I_{cm} = 100$ μA apparaît dans le circuit de commande et on obtient dans le circuit de sortie, en plus du courant continu I_{C0}, également un courant sinusoïdal à amplitude $I_{cm} = 5,0$ *mA* *. Dans ces conditions la composante sinusoïdale de tension à amplitude $U_{ECm} = 2,45$ *V* agit aux bornes de sortie du transistor.

Calculons les coefficients de gain recherchés.

Gain en courant

$$k_i = \frac{\Delta i_{sor}}{\Delta i_{ent}} = \frac{I_{cm}}{I_{comm}} = \frac{5,0 mA}{100 \mu A} = 50.$$

* Nous avons pris ici le premier harmonique de la composante alternative du courant du collecteur.

Gain en tension

$$k_u = \frac{\Delta u_{sor}}{\Delta u_{ent}} = \frac{R_{ch} I_{cm}}{U_{Ebm}} = \frac{500 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3}}{0{,}02} = 125.$$

Et enfin le gain en puissance

$$k_p = \frac{\Delta P_{sor}}{\Delta P_{ent}} = \frac{R_{ch} I_{cm}^2}{U_{Ebm} I_{comm}} = \frac{500\,(5{,}0 \cdot 10^{-3})^2}{0{,}02 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 6250.$$

La résistance d'entrée du transistor entre les bornes émetteur-base pour la composante sinusoïdale est

$$R_{ent\ Eb} = \frac{U_{Ebm}}{I_{Cm}} = \frac{0{,}02v}{100\mu A} = 200\Omega.$$

La résistance de sortie entre les bornes émetteur-collecteur pour la composante sinusoïdale est:

$$R_{sor\ EC} = \frac{U_{ECm}}{I_{Cm}} = \frac{2{,}45v}{5{,}0mA} = 490\Omega.$$

Au point de vue thermique le transistor fonctionne dans des conditions parfaitement admissibles puisque la puissance dégagée dans le transistor lui-même, en régime correspondant au point *n* (fig. 251, *b*), est

$$U_{EC0} I_{C0} = 3{,}5\ V \cdot 13{,}1mA = 45{,}8mW,$$

et, par conséquent, nettement inférieure à la puissance dissipée maximale admissible pour ce transistor, égale à 150 *mW*.

§ 220. Généralités sur un tube à trois électrodes. Un tube électronique a trois électrodes au moins: la cathode, l'anode et la grille. Ces électrodes sont placées à l'intérieur d'une ampoule en verre ou d'une enveloppe métallique dans lesquelles on a fait le vide. La cathode, chauffée par un filament incandescent alimenté par une batterie auxiliaire (non représentée habituellement dans les schémas), émet des électrons grâce au phénomène d'émission thermo-électronique. Le flux électronique est dirigé vers la seconde électrode (froide), appelée anode (plaque), seulement lorsque le potentiel de l'anode est supérieur à celui de la cathode. Si, par contre, le potentiel de l'anode est inférieur au potentiel de la cathode, il n'y pas de flux d'électrons entre la cathode et l'anode (dans ce cas l'anode n'attire par les électrons mais les repousse). Il s'ensuit qu'un tube électronique a une caractéristique courant-tension non symétrique.

La troisième électrode, appelée grille, est placée plus près de la cathode que de l'anode. Par conséquent, le champ électrique créé entre la grille et la cathode, même pour de faibles tensions entre ces deux électrodes, exerce une influence intense sur le flux électronique allant de la cathode vers l'anode. La grille joue ainsi le rôle de l'électrode de commande. En faisant varier le potentiel de la grille, on peut contrôler le courant anodique du tube. De même qu'un transistor, le tube électronique peut être branché au circuit suivant l'un des trois montages essentiels: à cathode commune, à grille commune et à anode commune (l'élec-

trode mentionnée dans la dénomination du montage est celle utilisée en commun dans les circuits d'anode et de grille).

La fig. 252 représente un montage à cathode commune. Ce montage est le plus répandu. De même qu'un transistor, le tube électronique peut être utilisé comme amplificateur de courant, de tension ou de puissance. Le tube peut accomplir ces trois fonctions du fait qu'une variation de la différence de potentiel entre la grille et la cathode exerce une influence plus grande sur le flux électronique allant de la cathode vers l'anode, qu'une variation (de valeur égale) de la différence de potentiel entre l'anode et la cathode.

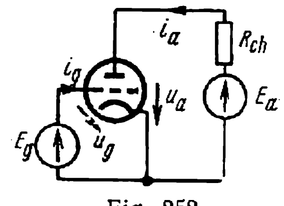


Fig. 252

§ 221. Caractéristiques courant-tension d'un tube à trois électrodes, suivant les valeurs instantanées. Appelons circuit anodique (ou circuit plaque) le circuit constitué par l'anode et la cathode d'un tube électronique, la source de F.E.M. E_a et la charge R_{ch}.

Le circuit formé par la grille et la cathode d'un tube électronique et la source de F.E.M. E_g est appelé circuit de grille.

Désignons par u_a la tension entre l'anode et la cathode et appelon-la tension anodique (tension plaque). La tension entre la grille et la cathode, désignée par u_g, est appelée tension de grille. Le courant i_a, circulant dans le circuit anodique, est une fonction non linéaire des tensions anodique et de grille. Le courant i_g dans le circuit de grille est également une fonction non linéaire de u_a et de u_g.

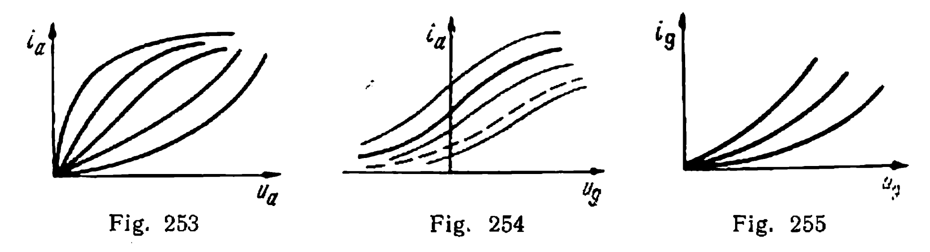


Fig. 253 Fig. 254 Fig. 255

On appelle caractéristiques anodiques d'un tube à trois électrodes les courbes du courant anodique i_a, tracées en fonction de la tension anodique u_a, la tension de grille u_g étant prise comme paramètre.

Une famille de caractéristiques anodiques est donnée à titre d'exemple sur la fig. 253. Si sur la famille des caractéristiques anodiques on relève les valeurs de i_a, se trouvant sur les mêmes droites u_a = const, on peut construire à l'aide de ces valeurs une famille de courbes $i_a = f(u_g)$, u_a étant pris comme paramètre. Ces courbes sont appelées caractéristiques de grille (caractéristique anodique à potentiel anodique constant) d'un tube à trois électrodes. Les courbes de cette famille sont représentées sur la fig. 254. Il y a lieu de remarquer que pour ces courbes, le courant i_a ne s'annule pas lorsque $u_g = 0$, et qu'il existe

une région de saturation, dans laquelle le courant i_a ne croît pratiquement plus avec l'augmentation de u_g.

La famille de courbes du courant de grille i_g en fonction de la tension de grille u_g, pour diverses valeurs de la tension anodique u_a, prise comme paramètre, est représentée sur la fig. 255, pour les valeurs positives de u_g.

En général, lorsqu'on utilise un tube électronique, u_a et u_g varient en même temps et le point représentatif se déplace dans les familles des caractéristiques anodique et de grille d'une courbe sur d'autres. Dans le cas particulier où u_a reste invariable ou pratiquement invariable, $i_a = f(u_g)$ est représenté par l'une des courbes de la famille de la fig. 254.

Si le tube électronique fonctionne à des potentiels négatifs ou à des potentiels positifs relativement faibles, appliqués à sa grille, le courant de grille est très faible, et on peut, en général, le négliger dans les calculs.

Il y a lieu de signaler ici le caractère particulier de la caractéristique de grille, comparée aux caractéristiques courant-tension habituelles. En effet, les caractéristiques courant-tension « habituelles » donnent la relation entre le courant circulant dans une résistance non linéaire et la tension aux bornes de cette résistance, tandis que la caractéristique de grille donne la relation entre le courant instantané circulant dans une résistance non linéaire et la tension de commande instantanée appliquée aux bornes de cette résistance.

§ 222. Expression analytique de la caractéristique de grille d'un tube électronique. La caractéristique de grille, pour $u_a = \text{const}$, peut être représentée approximativement par des tronçons de droite (fig. 256).

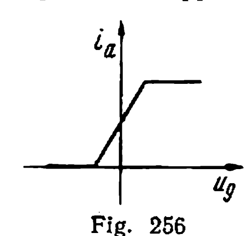


Fig. 256

En outre une partie des caractéristiques de grille comme, par exemple, la caractéristique représentée en gros trait sur la fig. 254, peut être décrite par un polynôme de troisième degré:

$$i_a = i_{a0} + au_g - bu_g^3. \qquad (9.46)$$

Ici i_{a0} — valeur du courant i_a pour $u_g = 0$; a et b — coefficients numériques; a est mesuré en $A \cdot V^{-1}$; b — en $A \cdot B^{-3}$.

Pour calculer les coefficients a et b, il faut choisir sur la caractéristique deux points de coordonnées i_{a1}, u_{g1} et i_{a2}, u_{g2} et résoudre un système de deux équations à deux inconnues:

$$\left.\begin{aligned} i_{a1} &= i_{a0} + au_{g1} - bu_{g1}^3 ; \\ i_{a2} &= i_{a0} + au_{g2} - bu_{g2}^3 . \end{aligned}\right\}$$

La caractéristique du type de celle représentée par la courbe en pointillé sur la fig. 254 peut être décrite approximativement par un polynôme de deuxième degré:

$$i_a = i_{a0} + pu_g + qu_g^2,$$

où p et q — coefficients numériques.

Il existe des expressions analytiques pour les caractéristiques anodiques également.

§ 223. Lien entre les faibles accroissements des valeurs d'entrée et de sortie pour un tube électronique. Comme nous l'avons déjà signalé au paragraphe précédent, le courant anodique i_a est fonction non seulement de la tension anodique mais également de la tension de grille $i_a = I_a(u_a, u_g)$. Si la tension de grille reçoit un faible accroissement Δu_g par rapport à un certain état initial (U_a, U_g) cet accroissement donne lieu à celui de la tension anodique Δu_a et à celui du courant anodique Δi_a.

En effectuant des opérations analogues à celles décrites au § 218, nous obtenons

$$\Delta i_a = \Delta u_a \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_a}\right)_{U_a, U_g} + \Delta u_g \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_g}\right)_{U_a, U_g}.$$

La dérivée partielle $\left(\frac{\partial I_a}{\partial u_a}\right)_{U_a, U_g}$ dans laquelle on a substitué les valeurs de U_a et U_g, caractérisant l'état initial, est habituellement désignée par g_i et est appelée *conductance interne d'un tube électronique* (conductance entre l'anode et la cathode):

$$g_i = \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_a}\right)_{U_a, U_g}. \qquad (9.47a)$$

La quantité R_i, inverse de g_i, est appelée *résistance interne du tube* (résistance entre l'anode et la cathode):

$$R_i = \frac{1}{g_i}. \qquad (9.47b)$$

La dérivée partielle $\left(\frac{\partial I_a}{\partial u_g}\right)_{U_a, U_g}$, calculée pour les valeurs initiales de U_a et de U_g, appelée pente de la caractéristique du tube, est désignée par la lettre S:

$$S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial u_g}\right)_{U_a, U_g}; \qquad (9.48)$$

S a les dimensions d'une conductance; g_i et S dépendent de l'aspect des caractéristiques du tube et des valeurs des tensions initiales U_a et U_g. Le rapport de S à g_i, appelé facteur d'amplification ou *gain du tube*, est désigné par la lettre μ:

$$\mu = \frac{S}{g_i} = \frac{\left(\frac{\partial I_a}{\partial u_g}\right)_{U_a, U_g}}{\left(\frac{\partial I_a}{\partial u_a}\right)_{U_a, U_g}}. \qquad (9.49)$$

Le gain indique combien de fois l'accroissement de tension Δu_g entre la grille et la cathode est plus efficace que l'accroissement de tension Δu_a entre l'anode et la cathode, pour obtenir le même accroissement Δi_a du courant anodique. En tenant compte du précédent, l'expression pour Δi_a pour être écrite de la manière suivante:

$$\Delta i_a = \Delta u_a g_i + \Delta u_g S, \qquad (9.50)$$

ou

$$\Delta u_a = R_i \Delta i_a - \mu \Delta u_g. \qquad (9.51)$$

§ 224. Schéma équivalent d'un tube électronique en cas de faibles accroissements. Les composantes continues des tensions et du courant correspondant à l'état initial du montage (avant l'accroissement de la tension de grille) sont désignées sur la fig. 257, *a* par les majuscules U_{ch}, U_a, U_g, I_a. Les tensions et les courants désignés par Δu_g, Δu_a, Δi_a sont respectivement les accroissements des valeurs ci-dessus. Les sens positifs pour ces accroissements sont les mêmes que pour les tensions et les courants initiaux.

Ecrivons l'équation pour les accroissements des tensions dans le circuit anodique, dus aux accroissements de la tension Δu_g à la grille du tube. A cette fin, formons deux équations suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour le circuit anodique. L'une de ces équations correspond au régime avant l'application des accroissements: $U_a + U_{ch} = E$ et l'autre décrit le régime après l'application de ces accroissements: $U_a + \Delta u_a + U_{ch} + \Delta u_{ch} = E$. Si dans cette dernière équation on substitue E à $U_a + U_{ch}$ on obtient:

$$\Delta u_a + \Delta u_{ch} = 0, \tag{9.52a}$$

où Δu_a — accroissement de la tension entre l'anode et la cathode du tube; Δu_{ch} — accroissement de la tension aux bornes de la charge R_{ch}.

Substituons dans l'équation (9.52a) $R_{ch}\Delta i_a$ à Δu_{ch} et $R_i\Delta i_a - \mu\Delta u_g$ à Δu_a, conformément à (9.51). Nous obtenons:

$$(R_{ch} + R_i)\,\Delta i_a = \mu\Delta u_g. \tag{9.52b}$$

L'équation (9.52 b) décrit le schéma de la fig. 257, *b*. Dans ce schéma la résistance de la charge R_{ch} et la résistance interne du tube électronique R_i sont branchées à une source de F.E.M. $\mu\Delta u_g$. Ainsi, pour des faibles accroissements le

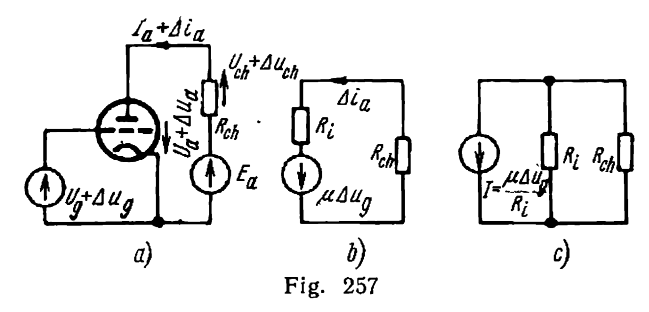


Fig. 257

circuit anodique d'un tube électronique peut être remplacé (simulé) par une source de F.E.M. $\mu\Delta u_g$ et par la résistance R_i branchée en série avec cette source. La force électromotrice de cette source de F.E.M. est proportionnelle à la variation de la tension à la grille du tube.

La fig. 257, *c* représente un autre schéma équivalent fréquemment utilisé. Dans ce schéma la source de F.E.M. est remplacée par une source de courant $\frac{\mu u_g}{R_i}$ et par une résistance R_i, shuntant cette source (rappelons que le passage d'une source de F.E.M. à une source de courant a été décrit en détail au § 2).

Exemple 111c. Une tension $U_g + \Delta u_g = U_g + U_{cm} \sin \omega t = -2 + 0{,}05 \sin \omega t$ est appliquée entre la grille et la cathode de la triode 6C2C (fig. 257, *a*). Le courant anodique i_a est représenté en fonction de la tension anodique u_a, sur la fig. 258, u_g étant pris comme paramètre. Soit la force électromotrice $E_a = 150\ V$; $R_{ch} = 15\ k\Omega$.

Trouver les paramètres du schéma équivalent de la triode et calculer à l'aide de ce schéma l'amplitude de la composante sinusoïdale du courant dans le circuit anodique.

Solution. Calculons la position du point de fonctionnement sur les caractéristiques du tube en courant continu. A cette fin traçons sur la fig. 258 une droite caractérisant la résistance de charge R_{ch} du circuit anodique. On l'appelle souvent droite de charge.

Cette droite passe par les points $i_a = 0$; $u_a = 150\ V$ et $i_a = \frac{E_a}{R_{ch}} = 10\ mA$; $u_a = 0$.

Le point de fonctionnement pour le régime considéré est le point d'intersection de cette droite et de celle des courbes de la famille pour laquelle le paramètre

$u_g = -2\ V$. Les coordonnées de ce point sont $u_a = 94\ V$ et $i_a = 3{,}67\ mA$. Conformément à la définition de g_i (voir expression 9.47a) il faut pour la calculer, en prenant comme valeur initiale le point de fonctionnement trouvé précédemment, $u_g = -2\ V$ étant constante, augmenter la tension anodique de Δu_a, calculer l'accroissement correspondant du courant anodique Δi_a et diviser Δi_a par Δu_a.

$$g_i = \frac{\partial I_a}{\partial u_a} \approx \frac{\Delta i_a}{\Delta u_a} = \frac{5\ mA}{50\ V} = 10^{-4}\ S;$$

$$R_i = \frac{1}{g_i} = 10^4\ \Omega,$$

g_i est proportionnel à la tangente trigonométrique de l'angle de pente de la tangente, au point de fonctionnement, à la courbe $I_a = f(u_a)$, pour laquelle $u_g = -2\ V$. Pour calculer la pente S de la caractéristique pour $u_a = 94\ V = \text{const}$ augmentons la tension de grille de $\Delta u_g = -1 - (-2) = 1\ V$ et trouvons sur la figure l'accroissement correspondant $\Delta i_a = 5{,}37 - 3{,}67 = 1{,}7\ mA$. Par conséquent,

$$S = \frac{\partial I_a}{\partial u_g} \approx \frac{\Delta i_a}{\Delta u_g} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}\ A/V.$$

Le gain

$$\mu = \frac{S}{g_i} = 17.$$

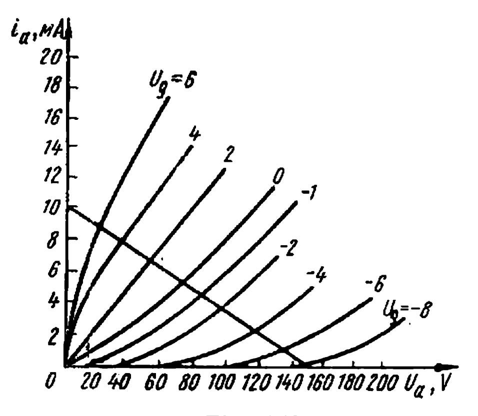


Fig. 258

L'amplitude de la composante sinusoïdale du courant dans le circuit anodique s'écrit conformément à (9.52b):

$$I_{1m} = \frac{\mu u_{cm}}{|R_{ch} + R_i|} = 3{,}39 \cdot 10^{-5}\ A.$$

Courant anodique: $I_a + \Delta i_a = 3{,}67 + 0{,}339 \sin \omega t\ mA$.

§ 225. Construction de la dépendance entrée-sortie d'un tube électronique pour des signaux importants. La tension u_g entre la grille et la cathode est une tension d'entrée, tandis que la tension aux bornes de la charge R_{ch} (schéma de la fig. 257, *a*) est une tension de sortie. La tension aux bornes de la charge est égale au produit du courant i_a par la résistance R_{ch}. Si l'amplitude de la composante alternative de la tension u_g est suffisamment grande (par exemple, commensurable, ou même plus grande que la composante continue de la tension U_g) on ne peut plus employer les schémas équivalents linéaires de la fig. 257, *b* et *c*. Le calcul du courant i_a en fonction du temps t, lorsqu'on applique à la grille une tension de forme et d'amplitude quelconques, peut être fait par la méthode graphique. Cette méthode peut être résumée comme suit:

1. En conférant au temps t différentes valeurs, on trouve les valeurs instantanées correspondantes de u_g.

2. Pour chaque couple de valeurs correspondante de t et de u_g, le courant anodique i_a est donné par l'ordonnée du point d'intersection de la droite de charge et de la courbe de la famille $i_a = f(u_a)$ pour laquelle la valeur considérée de u_g joue le rôle de paramètre.

3. On construit ensuite la courbe de la fonction $i_a = f(t)$. En la développant en série de Fourier, on peut trouver la composante continue, ainsi que les amplitudes du premier harmonique et des harmoniques supérieurs de cette série. En reprenant les mêmes constructions pour une autre amplitude ou une autre forme de la tension u_g, nous trouvons les nouvelles valeurs de la composante continue et des amplitudes des harmoniques du courant i_a. En réalisant ainsi un certain nombre de ces constructions, on peut obtenir des données dont on peut déduire toutes

les fonctions liant les grandeurs d'entrée et de sortie. Des constructions, analogues en principe, peuvent être exécutées évidemment pour un transistor également.

§ 226. Généralités sur les méthodes d'analyse et de calcul des circuits électriques non linéaires à courant alternatif. L'analyse des phénomènes non linéaires et le calcul des relations numériques pour les circuits non linéaires à courant alternatif sont nettement plus compliqués et laborieux que l'analyse et le calcul des circuits électriques linéaires.

En général, les circuits électriques non linéaires comprennent soit des inductances non linéaires, soit des capacités non linéaires, soit des résistances actives non linéaires, dénuées d'inertie au point de vue thermique.

Les courants et les tensions dans ces circuits diffèrent plus ou moins des courants et tensions sinusoïdaux.

La forme des courants et des tensions se rapproche le plus d'une sinusoïde dans les circuits comprenant uniquement des résistances actives non linéaires, dénuées d'inertie thermique.

Toutes les méthodes d'analyse des circuits non linéaires peuvent être réparties en deux groupes importants: méthodes analytiques et graphiques. Les méthodes analytiques, contrairement aux méthodes graphiques, permettent d'effectuer l'analyse sous une forme générale et non pas pour des valeurs particulières des paramètres seulement.

Le défaut des méthodes analytiques est la nécessité d'exprimer sous forme analytique les caractéristiques des résistances non linéaires, ce qui est toujours entaché d'une certaine erreur. Lorsqu'on doit calculer des circuits électriques non linéaires à courant alternatif tant soit peu compliqués, il faut accepter l'idée que le calcul ne pourra être exécuté qu'avec une certaine approximation.

Les méthodes suivantes d'analyse et de calcul des circuits non linéaires à courant alternatif sont les plus répandues:

1. Méthode graphique, utilisant les caractéristiques des résistances non linéaires, en valeurs instantanées.
2. Méthode analytique, utilisant les caractéristiques des résistances non linéaires en valeurs instantanées et leur approximation linéaire par morceaux.
3. Méthode analytique ou graphique, utilisant les caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques.
4. Méthode analytique ou graphique, utilisant les caractéristiques courant-tension suivant les valeurs efficaces des grandeurs non sinusoïdales.
5. Méthode analytique de calcul suivant le premier et un ou plusieurs harmoniques supérieurs ou inférieurs.
6. Calcul à l'aide des schémas linéaires équivalents.
7. Utilisation des calculatrices mathématiques.

Parmi les sept méthodes énumérées * l'étude des première, deuxième, troisième et quatrième méthodes doit être faite en premier lieu.

---

* La septième méthode est utilisée conjointement avec l'une quelconque des six méthodes précédentes.

Nous donnerons par la suite les caractéristiques sommaires de chacune des sept méthodes. Suivant la nature du circuit, la forme de la caractéristique courant-tension de la résistance non linéaire, ainsi que suivant le choix du phénomène non linéaire se déroulant dans le circuit considéré, il est rationnel d'utiliser telle ou autre méthode parmi les méthodes énumérées.

Naturellement, méthode d'analyse d'un phénomène non linéaire est d'autant plus compliquée et laborieuse que le caractère même de ce phénomène est complexe. Et vice versa, l'analyse des phénomènes non linéaires grossiers peut être faite par des moyens plus simples.

§ 227. Méthode graphique utilisant les caractéristiques des résistances non linéaires en valeurs instantanées. Cette méthode peut être employée en général pour les circuits dont on connaît, en vertu de telles ou autres considérations, la loi de variation en fonction du temps d'une des grandeurs déterminant le fonctionnement de la résistance non linéaire; cette grandeur peut être, par exemple, le courant, la tension ou la charge. Cette méthode sera illustrée sur l'exemple d'analyse du fonctionnement d'un transformateur de pointes (voir § 234) ou d'un tripleur de fréquence (§ 233).

Les opérations dans cette méthode doivent être exécutées dans l'ordre suivant :

1. On commence en partant de telles ou autres considérations physiques prises comme base d'analyse, par trouver la loi de variation en fonction du temps d'une des grandeurs déterminant le fonctionnement de la résistance non linéaire.

Ainsi, au § 233, on suppose que la résistance active des enroulements primaires w_1 et w_2 soit nulle et on admet que la somme des flux totaux à travers ces deux enroulements varie suivant une loi sinusoïdale.

Au § 234 on a supposé que c'est le courant de l'enroulement d'aimantation du transformateur de pointes qui varie suivant une loi sinusoïdale.

2. Ensuite, en partant de la caractéristique (ou des caractéristiques) de la résistance non linéaire en valeurs instantanées, on trouve, par des constructions graphiques, la loi de variation en fonction du temps de la deuxième grandeur déterminant le fonctionnement de la résistance non linéaire.

Cette grandeur est le courant pour le § 233 et le flux magnétique pour le § 234.

3. Enfin, en partant des résultats du numéro 2 et en utilisant des constructions graphiques auxiliaires et des calculs simples, on trouve la valeur de sortie et les liens cherchés entre les paramètres du schéma.

Les avantages de cette méthode est sa simplicité et son caractère concret, ainsi que la facilité avec laquelle on peut tenir compte des phénomènes hystérétiques.

§ 228. Calcul des circuits non linéaires par utilisation d'une approximation linéaire par morceaux de la caractéristique de la résistance non linéaire en valeurs instantanées. Cette méthode consiste dans l'essentiel à réduire au problème de la recherche de la solution périodique des

équations non linéaires à la recherche d'une solution périodique d'un système d'équations linéaires.

Voici les étapes principales de cette méthode:

1. Remplacement de la caractéristique courant-tension (flux-courant, charge-tension) d'une résistance non linéaire en valeurs instantanées par des tronçons de lignes droites.

2. Substitution des équations des droites du numéro 1 dans les équations différentielles non linéaires. Ainsi ces équations différentielles non linéaires sont réduites aux équations linéaires.

Chaque équation non linéaire est ainsi remplacée par autant d'équations linéaires qu'on utilise de tronçons de droites, remplaçant la caractéristique de la résistance non linéaire.

3. Solution d'un système d'équations différentielles linéaires. A chaque tronçon linéaire de la caractéristique de la résistance non linéaire correspondra sa solution propre avec ses constantes d'intégration.

4. Détermination des constantes d'intégration en raccordant la solution, trouvée pour un tronçon linéaire, avec la solution trouvée pour le tronçon linéaire suivant.

Cette méthode est efficace lorsque la caractéristique de la résistance non linéaire peut être remplacée avec quelque précision par des tronçons de droites, disposés de telle manière que lorsque l'une des grandeurs déterminant le régime de fonctionnement de la résistance non linéaire, le courant, par exemple, varie l'autre, le flux magnétique total, par exemple, reste constant.

Cette méthode est encore plus efficace lorsque les tronçons de droites, remplaçant la caractéristique courant-tension de la résistance non linéaire, peuvent être superposés aux axes des coordonnées.

Nous donnons au § 235 un exemple de solution du problème pour ce dernier cas.

§ 229. Méthode analytique (ou graphique) de calcul suivant les premiers harmoniques des courants et des tensions. Dans cette méthode les courants et les tensions dans une résistance non linéaire, variant suivant une loi compliquée, sont remplacés par leurs premiers harmoniques. On utilise dans les calculs les caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques soit sous leur forme analytique, soit sous forme graphique.

Etapes principales de calcul par la méthode analytique:

1. On exprime d'abord la caractéristique courant-tension d'une résistance non linéaire sous une forme analytique en valeurs instantanées.

2. En y substituant aux valeurs instantanées de la tension ou du courant, les valeurs instantanées de premiers harmoniques, on obtient une expression qui donne le lien non linéaire entre l'amplitude du premier harmonique du courant circulant dans une résistance non linéaire et l'amplitude du premier harmonique de la tension aux bornes de cette résistance [on peut citer comme exemple de ce lien l'expression (9.22)].

3. Dans l'équation écrite pour le circuit étudié conformément à la deuxième loi de Kirchhoff on substitue aux valeurs instantanées de

courant et de tension dans une résistance non linéaire, les valeurs instantanées de leurs premiers harmoniques en négligeant les harmoniques supérieurs.

4. Ensuite on sépare cette équation en deux équations. L'une d'elles exprime l'égalité des coefficients des termes sinusoïdaux des premier et second membres de l'équation, et l'autre, l'égalité des coefficients des termes cosinusoïdaux des deux membres.

5. Puis on résout ensemble ces deux équations.

Etapes principales de calcul par la méthode du premier harmonique en version graphique:

1. La fonction utilisée pour exprimer le lien entre l'amplitude du premier harmonique de tension aux bornes d'une résistance non linéaire et l'amplitude du premier harmonique de courant dans cette résistance est une fonction non linéaire sous forme d'une courbe. Cette fonction peut être obtenue par un moyen quelconque, y compris voie expérimentale.

2. Pour une valeur arbitraire d'amplitude I_{1m} du premier harmonique du courant circulant dans la résistance non linéaire, on trouve sur la courbe l'amplitude correspondante du premier harmonique de tension aux bornes de cette résistance et, ensuite, en construisant un diagramme vectoriel suivant le premier harmonique pour l'ensemble du circuit on détermine l'amplitude U_{1m} du premier harmonique de tension à l'entrée du circuit. La construction du diagramme vectoriel se fait en principe de la même manière que pour les circuits linéaires à courant sinusoïdal, à savoir: si on néglige les pertes dans le noyau, le premier harmonique de tension aux bornes d'une inductance non linéaire est en avance de 90° sur le premier harmonique de courant circulant dans cette inductance; le premier harmonique de tension aux bornes d'une capacité non linéaire est en retard de 90° sur le courant qui y circule; les premiers harmoniques de tension et de courant dans une résistance non linéaire active sont en phase.

3. En construisant plusieurs diagrammes vectoriels pour des valeurs différentes de I_{1m}, on trouve les valeurs de U_{1m} qui leur correspondent et on construit ensuite la caractéristique courant-tension pour l'ensemble du circuit $U_{1m} = f\,(I_{1m})$.

Cette méthode permet d'étudier les phénomènes non linéaires tels que la transformation du courant continu en courant alternatif et la transformation inverse, le phénomène de résonance suivant l'harmonique fondamental, l'effet de basculement suivant le premier harmonique, certains types de phénomènes d'automodulation; mais elle ne permet pas d'étudier des phénomènes plus complexes comme, par exemple, la résonance suivant les harmoniques supérieurs et inférieurs, la résonance suivant les harmoniques fractionnels ainsi que d'autres problèmes compliqués.

Si on utilise la version analytique de cette méthode, on peut obtenir la solution sous sa forme générale, ce qui est très important, car on peut alors étudier le comportement de cette solution en cas de variation d'un paramètre quelconque du circuit.

Cette méthode sera utilisée plus loin pour l'analyse du fonctionnement d'un oscillateur à auto-excitation (voir § 239) et pour l'analyse d'un circuit à capacité non linéaire (voir exemple 118).

§ 230. Analyse des circuits non linéaires à courant alternatif par utilisation des caractéristiques courant-tension en valeurs efficaces. Dans cette méthode le calcul graphique est executé en utilisant les caractéristiques courant-tension des résistances non linéaires en valeurs efficaces, obtenues par voie de calcul ou expérimentale.

En outre on admet que les courants et les tensions, qui varient en réalité suivant une loi non sinusoïdale, puissent être remplacés par leurs valeurs sinusoïdales équivalentes (en tant que valeur efficace).

Toutes les étapes de calcul par la méthode examinée correspondent entièrement aux étapes de calcul graphique par la méthode du premier harmonique, énumérées au paragraphe précédent.

La différence entre ces deux méthodes consiste uniquement en utilisation dans la méthode considérée de la caractéristique courant-tension non pas suivant les premiers harmoniques, mais suivant les valeurs efficaces.

Cette méthode sera employée par la suite pour l'étude des phénomènes les plus simples dans les circuits à ferrorésonance (voir § 240 à 245).

Si on étudie des circuits électriques non résonnants, ou des circuits résonnants, pour lesquels on est sûr, pour telle ou autre raison, que dans les régimes de fonctionnement examinés il ne peut pas y avoir de phénomènes de résonance à harmoniques supérieurs et inférieurs, l'amplitude du premier harmonique du courant s'avère, en général, supérieure aux amplitudes de ses harmoniques supérieurs. Dans ce cas, la valeur efficace du courant dans le circuit considéré ne diffère que faiblement de la valeur efficace du premier harmonique de ce courant.

Pour s'en assurer, considérons l'exemple suivant: soit un courant comprenant le deuxième et le troisième harmoniques et pour lequel la valeur efficace de son troisième harmonique est égale à 40% de la valeur efficace du premier harmonique ($I_3 = 0{,}4 I_1$). La valeur efficace du courant sinusoïdal est:

$$\sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1{,}075 I_1,$$

c'est-à-dire qu'elle n'est que de 7,5% supérieure à la valeur efficace du premier harmonique I_1.

Cette méthode permet d'étudier certaines propriétés des circuits électriques non résonnants, comme, par exemple, l'effet d'amplification de puissance (§ 247). Pour étudier les propriétés des circuits non linéaires résonnants, la méthode ne peut être utilisée que sous certaines conditions. Ainsi, on peut l'employer pour étudier l'effet de basculement le plus simple (voir § 241), mais elle ne convient pas pour des recherches plus « fines », comme, par exemple, pour l'étude des phénomènes de résonance aux harmoniques supérieurs.

§ 231. Méthode analytique de calcul suivant le premier et un ou plusieurs harmoniques supérieurs ou inférieurs. L'application de cette méthode comporte

les étapes suivantes: on commence par établir le système d'équations différentielles du circuit étudié, on exprime ensuite analytiquement les caractéristiques des résistances non linéaires et on substitue ces expressions analytiques dans les équations différentielles du circuit.

Pour l'une des valeurs cherchées on écrit la solution sous forme de série comprenant le premier et l'un ou plusieurs harmoniques supérieurs ou inférieurs, par exemple sous la forme suivante: $x = x_{1m} \sin \omega t + x_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3)$. Cette solution hypothétique est substituée dans les équations du système.

A la suite de cette substitution, il s'avère possible de séparer les équations du système en plusieurs équations algébriques transcendantes, établies suivant l'amplitude du premier harmonique, les amplitudes des harmoniques supérieurs (ou inférieurs, respectivement) et leurs phases.

Il existe en général deux fois plus d'équations transcendantes que d'harmoniques retenus, puisque, pour chacun de ces harmoniques, les équations du système sont séparées en deux équations, l'une pour les composantes sinusoïdales et l'autre pour les composantes cosinusoïdales.

Ensuite on résout le système de ces équations transcendantes. La difficulté de la résolution est que toutes les inconnues figurent dans chacune des équations transcendantes. De ce fait, on emploie pour les résoudre la méthode d'approximations successives.

L'utilisation de cette méthode demande en général beaucoup de travail. Cependant, elle permet d'étudier les phénomènes aussi complexes se déroulant dans les circuits non linéaires, que la résonance aux harmoniques supérieurs, la résonance aux harmoniques inférieurs et fractionnels, etc.

§ 232. Calcul à l'aide des schémas équivalents linéaires. Cette méthode convient au calcul des circuits électriques non linéaires soumis à l'effet des F.E.M. continues ou sinusoïdales, à conditions que les composantes alternatives des courants et des tensions soient relativement petites, plusieurs fois plus petites, par exemple, que les composantes continues des courants et des tensions respectives.

L'ordre des opérations de calcul est le suivant:

1. Déterminer d'abord la position du point de fonctionnement en courant continu sur la caractéristique de la résistance non linéaire. Le point de fonctionnement, soumis à l'effet d'une faible F.E.M. alternative, se déplacera aux environs du point ainsi tracé.

2. Tracer, ensuite au point de fonctionnement en courant continu, une tangente à la caractéristique non linéaire et remplacer le tronçon considéré de la caractéristique de cette résistance linéaire par un tronçon de cette tangente.

3. Construire enfin un schéma équivalent linéaire pour le calcul de la composante alternative. La nature de ce schéma est déterminée par la nature de la résistance non linéaire, et ses paramètres dépendent de la valeur de la tangente trigonométrique de l'angle entre la tangente à la caractéristique et l'un des axes de coordonnées.

Le schéma équivalent d'un transistor, en cas d'une faible composante alternative, est représenté sur la fig. 250, *b* et celui d'un tube à trois électrodes sur les fig. 257, *b* et 257, *c*.

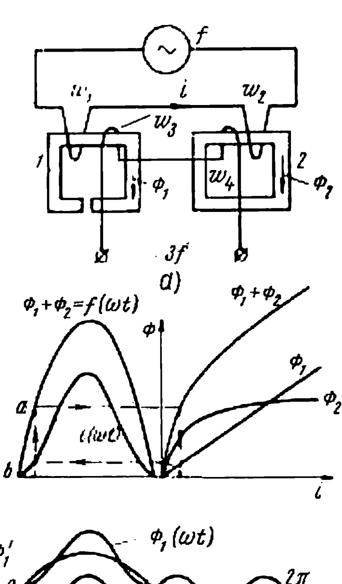
§ 232a. Intervention des calculatrices. Les calculatrices sont employées pour trouver les solutions de systèmes d'équations transcendantes et de systèmes d'équations algébriques de degrés élevés, pour trouver les solutions exprimées sous forme de séries lentement convergentes, pour intégrer les équations différentielles linéaires (d'ordres élevés en premier lieu), auxquelles sont réduites les équations différentielles non linéaires en cas d'utilisation d'approximation linéaire par morceaux des caractéristiques de la résistance non linéaire, ainsi que dans certains autres cas encore.

Examinons plusieurs exemples.

Dans les deux premiers exemples (voir §§ 233 et 234) l'analyse est faite graphiquement en utilisant les caractéristiques $\Phi = f(i)$ pour une inductance non linéaire.

Dans le premier de ces exemples, la caractéristique est prise en négligeant l'hystérésis, et dans le deuxième, en tenant compte de ce phénomène (c'est-à-dire à l'aide d'une fonction en forme de boucle).

§ 233. Tripleur de fréquence le plus simple. Le tripleur de fréquence est un dispositif à la sortie duquel la tension a une fréquence de trois fois supérieure à celle de la tension d'entrée. Le schéma du tripleur le plus simple est représenté sur la fig. 259, *a*. Il comprend deux transformateurs (*1* et *2*). Appelons Φ_1 le flux du premier transformateur et Φ_2 le flux du deuxième. Un entrefer existe dans le noyau du premier transformateur, grâce à quoi sa caractéristique flux-courant $\Phi = f(i)$ est une droite (la droite de la fig. 259, *b*) *. Le noyau du deuxième transformateur ne comporte pas d'entrefer. Sa caractéristique flux-courant est représentée par la courbe Φ_2 de la fig. 259, *b*. Le noyau du premier transformateur porte les enroulements w_1 et w_2 et le noyau du deuxième les enroulements w_2 et w_4. Les enroulements w_1 et w_2 sont couplés en concordance et les enroulements w_3 et w_4 en opposition.



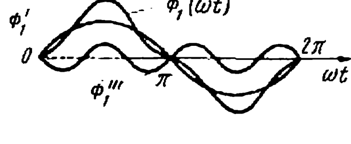
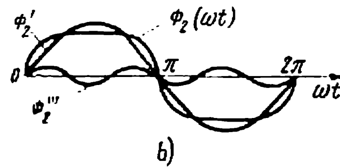



Fig. 259

Soit $u = U_m \cos \omega t$ la tension appliquée au circuit primaire.

Suivant la loi de l'induction électromagnétique

$$u = \frac{d}{dt}(w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2).$$

Il en découle que

$$\frac{w_1}{w_2}\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{U_m}{\omega w_2} \sin \omega t.$$

Supposons d'abord que $w_1 = w_2 = w$, on a alors

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{U_m}{\omega w} \sin \omega t,$$

c'est-à-dire que la somme des flux des deux transformateurs varie en fonction du temps suivant une loi sinusoïdale. Construisons la courbe $i = f(\omega t)$. A cette fin, en additionnant les ordonnées des courbes Φ_1 et Φ_2, construisons d'abord la courbe

$$\Phi_1 + \Phi_2 = f(i),$$

et ensuite portons sur la figure la sinusoïde $\Phi_1 + \Phi_2 = f(\omega t)$, dont l'amplitude est égale à $\frac{U_m}{\omega_w}$.

* Dans le coin supérieur droit de la fig. 259, *b*.

Prenons une valeur arbitraire pour le flux total (point a), projetons ce point sur la courbe $\Phi_1 + \Phi_2 = f(i)$, trouvons le courant i correspondant et, ensuite, portons ce courant sur la verticale passant par le point a de la fig. 259, b. Nous obtenons ainsi le point b, appartenant à la courbe $i = f(\omega t)$.

Du fait que le premier transformateur n'est pas saturé, et que la fonction $\Phi_1 = f(i)$ est une droite, la courbe $\Phi_1(\omega t)$ a la même forme pointue que la courbe du courant $i = f(\omega t)$. Les ordonnées de la courbe $\Phi_2(\omega t)$ sont égales à la différence de l'ordonnée de la courbe $\Phi_1 + \Phi_2 = f(\omega t)$ et celle de la courbe $\Phi_1(\omega t)$.

La courbe $\Phi_2(\omega t)$ a une forme aplatie.

Les courbes $\Phi_1(\omega t)$ et $\Phi_2(\omega t)$ peuvent être décomposées en harmoniques. Les premier et troisième harmoniques des flux sont représentés sur la figure. Les flux comprennent également des harmoniques supérieurs, mais ces harmoniques sont relativement peu importants. On voit sur la figure que le premier harmonique du flux Φ_1 désigné par Φ_1' et que le premier harmonique du flux Φ_2 (Φ_2') se trouvent en phase, tandis que le troisième harmonique du flux Φ_1 (Φ_1''') est en quadrature avec le troisième harmonique du flux Φ_2 (Φ_2''').

Le premier et le troisième harmoniques de la F.E.M. sont induits dans chacun des enroulements secondaires (w_3 et w_4). Du fait du branchement en opposition des enroulements w_3 et w_4 les premiers harmoniques des F.E.M. dans ces enroulements sont soustraits l'un de l'autre et les troisièmes harmoniques sont additionnés. Il s'ensuit qu'en choisissant le nombre de spires w_4 de telle façon que les premiers harmoniques de la F.E.M. dans les enroulements w_3 et w_4 soient égaux en valeur, ce qui est obtenu pour $\Phi_1' w_3 = \Phi_2' w_4$, on obtient à la sortie du tripleur, des F.E.M. de fréquence triple seulement.

Pour qu'un tripleur puisse fonctionner normalement, il faut que la F.E.M. globale, de fréquence triple, soit nulle dans les enroulement w_1 et w_2 du circuit primaire, c'est-à-dire que $w_1\Phi_1''' - w_2\Phi_2''' = 0$. Il est facile de constater que cette condition est satisfaite puisque $w_1 = w_2$ et $\Phi_1''' = \Phi_2'''$ (la somme des flux $\Phi_1 + \Phi_2$ est sinusoïdale).

Exemple 112. On a trouvé en utilisant des constructions graphiques que pour le tripleur de la fig. 259, a

$$\Phi_{1m}' = \Phi_{2m}' = 0{,}0027\ V \cdot s \quad \text{et} \quad \Phi_{1m}''' = \Phi_{2m}''' = 0{,}0006\ V \cdot s.$$

Calculer le nombre de spires de l'enroulement, ainsi que la tension à la sortie du tripleur, à vide, en supposant que

$$w_1 = w_2 = w_3 = w = 100, \quad f = 50 Hz.$$

Solution. Trouvons le nombre de spires

$$w_4 = w_3 = \frac{\Phi_{1m}'}{\Phi_{2m}'} = 100.$$

La valeur instantanée de la tension de sortie :

$$u_{sor} = w_4 \frac{d}{dt}(-\Phi_{1m}''' \sin 3\omega t - \Phi_{2m}''' \sin 3\omega t).$$

Sa valeur efficace :

$$U_{sor} = w_4 \cdot 3\omega \frac{2\Phi'''_{1m}}{\sqrt{2}} = 100 \cdot 3 \cdot 314 \cdot \frac{2 \cdot 0{,}0006}{\sqrt{2}} = 80\ V.$$

§ 234. Transformateur de pointes. Le transformateur de pointes est un dispositif à la sortie duquel on obtient une F.E.M. en forme de pointe.

Une force électromotrice en forme de pointe est nécessaire, par exemple, pour commander l'instant d'amorçage des redresseurs à vapeur de mercure.

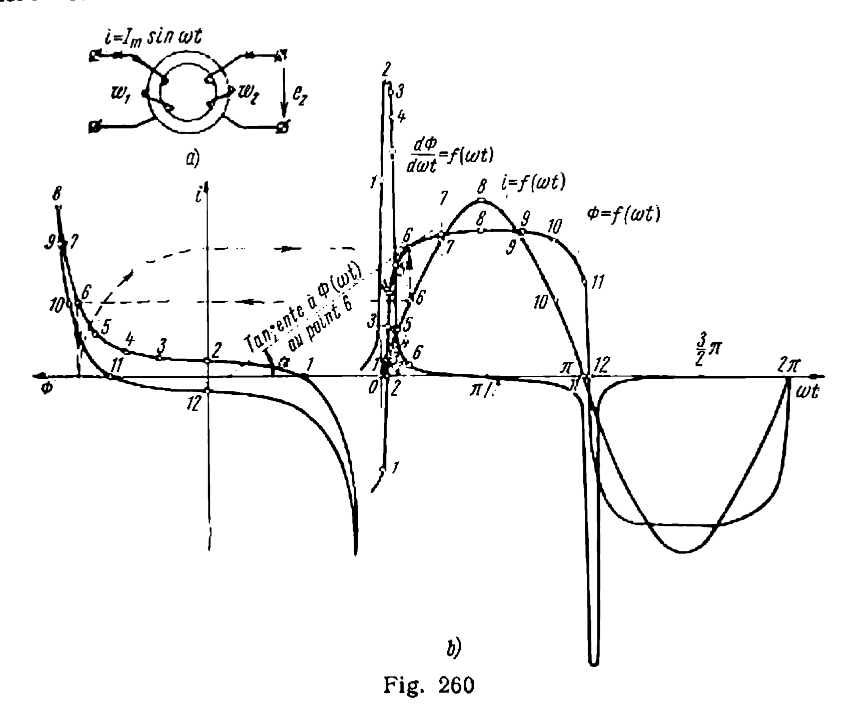


Fig. 260

Examinons le principe de fonctionnement d'un transformateur de pointes le plus simple (fig. 260, *a*).

On bobine sur un noyau en forme de tore fermé, en matériau à cycle d'aimantation pratiquement rectangulaire, deux enroulements (w_1 et w_2). On fait circuler dans l'enroulement un courant sinusoïdal fourni par une source. Une F.E.M. en forme de pointe est induite aux bornes de l'enroulement w_2. Le principe d'obtention de cette F.E.M. est illustré sur la fig. 260, *b*.

La boucle d'hystérésis $\Phi = f(i)$ est représentée sur la partie gauche de la fig. 260, *b*. Afin de faciliter les constructions suivantes, les axes de Φ et de i sont tournés de 90°, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, par rapport à leur disposition habituelle. Trois courbes sont construites dans la partie droite de la figure : la courbe du courant sinu-

soïdal donné $i = f(\omega t)$, circulant dans l'enroulement w_1, la courbe du flux magnétique dans le noyau $\Phi = f(\omega t)$ et la courbe $\frac{d\Phi}{d\omega t} = f(\omega t)$, dont les ordonnées sont proportionnelles à la F.E.M. e_2 cherchée aux bornes de l'enroulement w_2:

$$e_2 = -w_2 \frac{d\Phi}{dt} = -w_2 \frac{d\Phi}{d\omega t} \frac{d\omega t}{dt} = -\omega w_2 \frac{d\Phi}{d\omega t}.$$

Les points des courbes respectivement correspondants sont désignés par les mêmes chiffres.

L'ordre des opérations de construction est le suivant:

Traçons d'abord la courbe $i = f(\omega t)$. L'amplitude du courant correspond à l'ordonnée *8* sur la courbe $\Phi = f(i)$. Ensuite, à l'aide de la courbe $i = f(\omega t)$ et de la courbe $\Phi = f(i)$, construisons la courbe $\Phi = f(\omega t)$. A titre d'exemple, on a représenté par des flèches l'ordre des opérations à effectuer pour trouver le point *6* de la courbe $\Phi = f(\omega t)$.

Ensuite, en utilisant la méthode de différentiation graphique, construisons la courbe $\frac{d\Phi}{d\omega t} = f(\omega t)$. Ses ordonnées sont proportionnelles aux tangentes trigonométriques de l'angle entre les tangentes à la courbe $\Phi = f(\omega t)$ et l'axe des abscisses. Ainsi pour le point *6*, $\frac{d\Phi}{d\omega t}$ est proportionnel à la tangente de l'angle α.

Dans les tronçons où Φ croît en fonction du temps, $\frac{d\Phi}{d\omega t}$ est positive. La valeur de $\frac{d\Phi}{d\omega t}$ est d'autant plus grande, que la pente de la courbe $\Phi = f(\omega t)$ est importante. La courbe $\frac{d\Phi}{d\omega t} = f(\omega t)$ a une forme en pointe. La F.E.M. e_2 a la même forme.

§ 235. Considérations sur le calcul des circuits électriques comprenant des bobines d'inductance, dont les noyaux ont une courbe d'aimantation pratiquement rectangulaire. Certains matériaux magnétiques doux, de haute qualité, comme, par exemple, Н60П, Н65П et autres, ont ceci de particulier que leur courbe d'aimantation a une forme quasi rectangulaire: sur le tronçon $0 - a$ (fig. 261, *a*) la courbe coïncide pratiquement avec l'axe des ordonnées et pour le tronçon $a - b$ elle est placée pratiquement en parallèle à l'axe des abscisses.

La boucle limite d'hystérésis est représentée en pointillé sur la fig. 261, *a*. La force coercitive H_c pour ces matériaux est très faible et ne varie que de 1 à 10 A/m.

Le calcul d'un circuit électrique à courant alternatif, comprenant des bobines d'inductance dont les noyaux sont exécutés en matériau magnétique susmentionné, se fait habituellement à l'aide de la méthode d'approximation linéaire par morceaux (§ 228). Pour faciliter les calculs, la courbe d'aimantation est remplacée par une courbe parfaitement rectangulaire (fig. 261, *b*). Les tronçons *4—1* et *2—3* sont parallèles à l'axe des abscisses, tandis que le tronçon *1—2* coïncide avec l'axe des ordonnées.

Si le point figuratif se déplace suivant le tronçon $1—2$, seule l'induction dans le noyau varie, tandis que le champ dans le même noyau reste constamment nulle.

Par contre, lorsque le point figuratif se déplace suivant les tronçons $4—1$ et $2—3$, c'est le champ H qui varie et l'induction du noyau reste constante.

Expliquons la méthode de calcul à l'aide d'un exemple concret.

Le circuit de la fig. 261, *c* comprend une source de F.É.M. sinusoïdale $e = E_m \sin \omega t$ et une inductance non linéaire, dont la loi de variation du flux magnétique total ψ en fonction du courant i et de la résistance

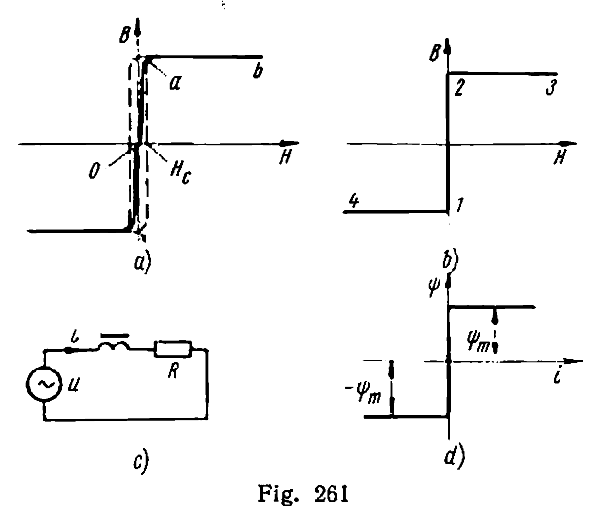


Fig. 261

active R est connue. On demande de trouver les expressions pour le calcul de ψ et i et construire les courbes de variation de ψ et i en fonction du temps, en régime permanent.

Du fait que le flux magnétique total ψ est égal au produit de l'induction dans le noyau B par la section transversale S du noyau et par le nombre de spires de l'enroulement w, autrement dit $\psi = BSw$, et que, suivant la loi du courant total, le courant i est proportionnel au champ magnétique dans le noyau, la loi de variation de flux magnétique total ψ en fonction du courant i (fig. 261, *d*) a le même caractère qualitatif que la fonction $B = f(H)$ (fig. 261, *b*). Nous avons donc:

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = E_m \sin \omega t. \qquad \text{(a)}$$

Dans l'intervalle de temps allant de $\omega t = 0$ à $\omega t = \omega t_1$, que nous appellerons premier intervalle, le courant $i = 0$, la totalité de tension est appliquée à l'inductance non linéaire $\frac{d\psi}{dt} = E_m \sin \omega t$ et le flux magnétique total ψ varie de $-\psi_m$ à $+\psi_m$ (le point figuratif sur la fig. 261, *b* se déplace de *1* à *2*).

Dans cet intervalle $d\psi = E_m \sin \omega t \, dt$, et, par conséquent,

$$\psi = -\frac{E_m}{\omega} \cos \omega t + C. \qquad (b)$$

Ici C — constante d'intégration.

Dans le deuxième intervalle de temps allant de $\omega t = \omega t_1$ à $\omega t = \pi$ le flux magnétique total ψ reste constant et égal à ψ_m, $\frac{d\psi}{dt} = 0$, et on déduit de l'équation (a) que:

$$R_i = E_m \sin \omega t, \quad \text{ou} \quad i = \frac{E_m}{R} \sin \omega t. \qquad (c)$$

Ainsi dans le deuxième intervalle de temps le courant i varie suivant une loi sinusoïdale, tandis que le flux magnétique total ψ est constant et égal à ψ_m. Dans ces conditions le point figuratif se déplace suivant le tronçon *2—3* de la fig. 261, *b*.

Déterminons la constante d'intégration C et la valeur de ωt_1. Pour calculer C, écrivons l'équation (b) pour $\omega t = 0$. Pour $\omega t = 0$, $\psi = -\psi_m$ et, par conséquent, $-\psi_m = -\frac{E_m}{\omega} + C$.

On n'en déduit que $C = -\psi_m + \frac{E_m}{\omega}$.

Pour calculer ωt_1 utilisons la même équation (b), en tenant compte que pour $\omega t = \omega t_1$ $\psi = \psi_m$.

Nous obtenons ainsi: $\psi_m = -\frac{E_m}{\omega}$ $\cos \omega t_1 - \psi_m + \frac{E_m}{\omega}$.

Il s'ensuit que $\cos \omega t_1 = 1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m}$,

ou $\omega t_1 = \arccos\left(1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right)$.

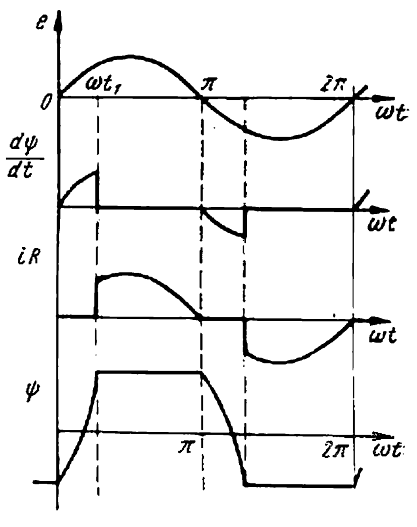


Fig. 262

Le caractère de variation du courant i, du flux magnétique total ψ et de $\frac{d\psi}{dt}$, lorsque $\frac{\omega\psi_m}{E_m} < 1$, est représenté sur la fig. 262.

Si l'amplitude de la F.E.M. E_m est inférieure à $\omega\psi_m$, le deuxième intervalle de temps n'a pas lieu; en d'autres termes, le courant i est nul pendant toute la période.

§ 236. Redressement d'une tension alternative. On appelle redressement d'une tension alternative sa conversion en une tension continue ou pulsée. Ce redressement peut être obtenu à l'aide de redresseurs à semi-conducteurs, à tubes électroniques ou de redresseurs d'autres types.

Un redresseur non contrôlable est souvent représenté sur les schémas par une grosse flèche triangulaire avec un trait transversal placé auprès de sa pointe. La flèche indique la direction conductrice. La résistance du redresseur dans le sens conducteur est des milliers de fois moindre que dans le sens non conducteur.

Les montages redresseurs peuvent être classés en montages monophasé et polyphasé d'après le nombre de phases de la tension alternative à redresser. Les montages monophasés sont répartis à leur tour en montage à une alternance et en montage à deux alternances.

Dans les montages à une alternance le redressement se fait sensiblement pendant une seule alternance de la tension d'alimentation, tandis que dans les montages redresseurs à deux alternances, ce phénomène a lieu au cours de deux alternances.

Deux schémas les plus simples de redresseurs à une alternance sont représentés sur les fig. 263, *a* et 264, *a*. Le montage représenté sur la fig. 263, *a* comprend une source de tension sinusoïdale, un redresseur et une résistance active R_{ch}. Dans le montage de la fig. 264, *a* la charge est constituée par la résistance active R_{ch} et par l'inductance L_{ch}.

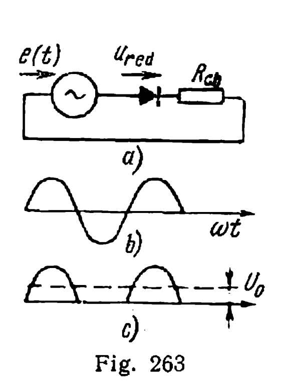


Fig. 263

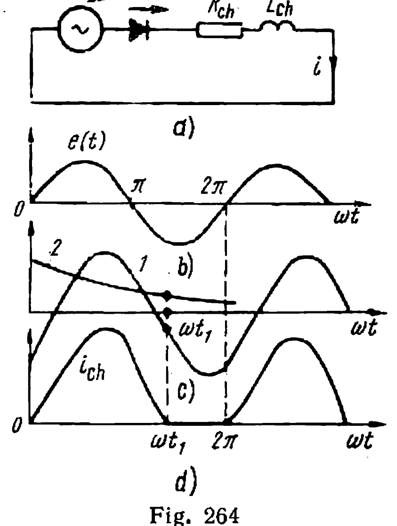


Fig. 264

Le montage en pont le plus simple d'un redresseur monophasé à deux alternances est représenté sur la fig. 265, *a*. Il comprend quatre redresseurs (*1*, *2*, *3* et *4*), la source de tension sinusoïdale à redresser et une charge résistive R_{ch}.

La caractéristique courant-tension d'une diode à cristaux est représentée sur la fig. 266, *a*. Afin de faciliter l'analyse, nous utiliserons à sa place une caractéristique courant-tension idéalisée, représentée sur la fig. 266, *b*.

Si on se rapporte à cette caractéristique idéalisée, la chute de tension aux bornes du redresseur est nulle lorsque le redresseur est parcouru par le courant et, par conséquent, la résistance propre du redresseur est également nulle. Lorsque la tension appliquée au redresseur est négative (c'est-à-dire lorsque la différence de potentiel dans le redresseur lui-même est négative par rapport au sens de la flèche de la fig. 263, *a*), le redresseur ne laisse pas passer le courant ($i = 0$) et sa résistance est infinie.

Examinons d'abord le fonctionnement du schéma de la fig. 263, *a*. La courbe de la fig. 263, *b* représente la F.E.M. de la source d'alimentation du montage, la courbe de la fig. 263, *c* la tension aux bornes de la charge R_{ch}. Au cours de la première alternance, lorsque la F.E.M. de la source est positive et agit dans le sens positif de la tension aux bornes du redresseur, le redresseur laisse passer le courant, et la tension aux

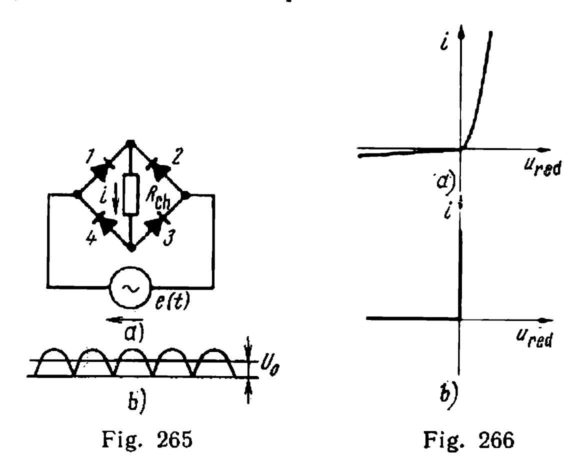


Fig. 265 Fig. 266

bornes de la charge est exactement égale à la F.E.M. de la source. Pendant la deuxième alternance, lorsque la F.E.M. de la source d'alimentation est négative, le redresseur ne laisse pas passer le courant et la tension aux bornes de la charge est nulle (pendant cette alternance la totalité de la F.E.M. se trouve être appliquée au redresseur).

Ainsi, la tension aux bornes de la charge du schéma de la fig. 263, *a* a la forme d'une demi-sinusoïde. Dans ce cas U_0 désigne la valeur moyenne de la tension aux bornes de la charge.

Exemple 113. Si la charge d'un redresseur à une alternance est résistive-inductive (fig. 264, *a*) le régime de fonctionnement de ce redresseur est nettement différent du régime de son fonctionnement pour une charge purement résistive.

L'équation établie suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour le montage de la fig. 264, *a* a la forme suivante:

$$u_r + i_{ch}R_{ch} + L_{ch}\frac{di_{ch}}{dt} = E_m \sin \omega t. \tag{a}$$

C'est une équation non linéaire, puisque la tension aux bornes du redresseur $u_r = u_{red}$ varie en fonction du courant $i_{ch} = i$ suivant une loi non linéaire.

Résolvons l'équation (a) par la méthode d'approximation linéaire par morceaux de la caractéristique de la résistance non linéaire (voir § 228). A cette fin, substituons des tronçons de droite, conformément à la fig. 266, *b*, à la caractéristique courant-tension de la diode.

L'équation (a), écrite sous sa forme générale, peut être utilisée pour les parties conductrice et non conductrice de la période.

Pendant la partie conductrice de la période, lorsque le courant $i_{ch} \neq 0$ et lorsque le point figuratif se déplace suivant le tronçon vertical de la caractéristi-

que courant-tension de la fig. 266, *b*, la tension appliquée à la diode $u_r = 0$. L'équation (a) prend alors la forme suivante:

$$i_{ch}R_{ch}+L_{ch}\frac{di_{ch}}{dt}=E_m \sin \omega t. \qquad (a')$$

Pendant la partie non conductrice de la période, lorsque R_{ch} et L_{ch} ne sont pas parcourues par le courant, les chutes de tension aux bornes de la résistance R_{ch} et de l'inductance L_{ch} sont nulles et le point figuratif se déplace suivant le tronçon horizontal de la caractéristique courant-tension de la fig. 266, *b*. L'équation (a) s'écrit alors comme suit:

$$u_r=E_m \sin \omega t. \qquad (a'')$$

Ainsi, au lieu d'une équation non linéaire (a), nous obtenons deux équations linéaires (a') et (a").

La solution de l'équation (a') peut être écrite de la manière suivante *:

$$i_{ch}=\frac{E_m}{z}\sin(\omega t-\varphi)+Ae^{-\frac{R_{ch}}{L_{ch}}t}. \qquad (b)$$

Le premier terme du second membre de cette dernière expression représente le courant forcé et le deuxième terme est le courant libre:

$$z=\sqrt{R_{ch}^2+(\omega L_{ch})^2}; \quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L_{ch}}{R_{ch}}.$$

Le redresseur se débloque (ou laisse passer le courant) à partir de $\omega t = 0$. Ecrivons l'équation pour calculer la constante d'intégration A. A cette fin, écrivons l'équation (b) pour $t = 0$:

$$0=-\frac{E_m}{z}\sin\varphi+A.$$

Le zéro figurant comme premier membre de cette dernière expression s'explique par le fait que pour $\omega t = 0$ $i_{ch} = 0$. Par conséquent, $A=\frac{E_m}{z}\sin\varphi$. Substituons à A dans l'expression (b) sa valeur ainsi trouvée et écrivons l'expression définitive pour le courant pendant la partie conductrice de la période

$$i_{ch}=\frac{E_m}{z}\sin(\omega t-\varphi)+\frac{E_m}{z}\sin\varphi e^{-\frac{R_{ch}}{L_{ch}}t}.$$

Pendant la partie non conductrice de la période $i_{ch} = 0$.

La F.E.M. $E_m \sin \omega t$ de la source d'alimentation du schéma est représentée sur la fig. 264, *b*.

Sur la fig. 264, *c* la courbe *1* est celle du courant forcé $\frac{E_m}{z}\sin(\omega t-\varphi)$, la courbe *2* est celle du courant libre. Lorsque le temps t croît, le courant libre s'amortit suivant une loi exponentielle.

La courbe de la fig. 264, *d* représente le courant i_{ch}. Les ordonnées de cette courbe sont égales à la somme des ordonnées des courbes *1* et *2* de la fig. 264, *c*.

A l'instant ωt_1, lorsque le courant i_{ch} s'annule, le redresseur passe de l'état conducteur à l'état non conducteur.

Dans l'intervalle de temps entre ωt_1 et 2π le redresseur est bloqué et le courant dans la charge est nul.

Pendant la période suivante le phénomène se reproduit.

---

* Il est recommandé de lire les quelques alinéas suivants après avoir pris connaissance de la méthode classique de calcul des phénomènes transitoires, exposée au chapitre X.

Examinons maintenant le fonctionnement du schéma en pont de la fig. 265, *a*. Sur ce schéma la source de la F.E.M. sinusoïdale $e(t)$, les redresseurs *1*, *2*, *3* et *4* et la charge R_{ch} constituent un montage en pont.

La source de F.E.M. est intercalée dans l'une des diagonales de ce schéma et la charge R_{ch} est branchée dans l'autre diagonale.

Les redresseurs fonctionnent deux par deux.

Pendant la première alternance, lorsque la F.E.M. $e(t)$ agit en concordance avec le sens positif de la tension aux bornes des redresseurs *1* et *3* *, ces redresseurs laissent passer le courant, tandis que les redresseurs *2* et *4* ne sont pas conducteurs. Pendant la deuxième alternance, lorsque la F.E.M. $e(t)$ change de signe et agit en concordance avec le sens positif de la tension appliquée aux redresseurs *2* et *4*, le courant passe par les redresseurs *2* et *4* et les redresseurs *1* et *3* ne laissent pas passer le courant. Le sens de la circulation du courant à travers la charge est représenté par une flèche sur la fig. 265, *a*. Le courant circule dans cette charge continuellement dans le même sens. La forme de la tension aux bornes de la charge est représentée par la courbe de la fig. 265, *b*.

§ 237. **Modulation en amplitude.** Un quadripôle actif non linéaire est représenté en pointillé sur le schéma de la fig. 267. Il comprend un tube à trois électrodes, une batterie d'anode E_a ainsi qu'une inductance

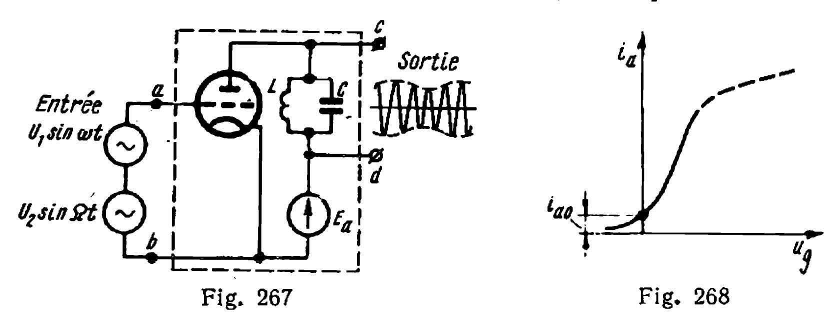


Fig. 267

Fig. 268

L et une capacité C couplées en parallèle et accordées en résonance à la fréquence ω. Lorsqu'on applique aux bornes d'entrée du quadripôle (bornes *a* et *b*) la somme de deux tensions sinusoïdales

$$u_g = U_1 \sin \omega t + U_2 \sin \Omega t \quad (\omega \gg \Omega), \qquad (9.53)$$

une tension modulée en amplitude apparaîtra aux bornes de sortie (bornes *c* et *d*).

Examinons le fonctionnement d'un tel montage en supposant que la chute de tension aux bornes *c* et *d* soit faible par rapport à la valeur de la F.E.M. E_a. Dans ces conditions le courant anodique i_a ne dépend que de la tension de grille u_g.

En choisissant convenablement la valeur de la F.E.M. E_a on peut obtenir que la caractéristique de grille du tube $i_a = f(u_g)$ pour des

* Pour s'en assurer, il suffit de parcourir dans le sens des aiguilles d'une montre la maille $e(t)\ 1 R_{ch}\ 3 e(t)$.

faibles valeurs de la tension appliquée à cette grille puisse être exprimée sous forme d'un trinôme du second degré (fig. 268):

$$i_a = i_{a0} + au_g + bu_g^2. \qquad (9.54)$$

L'équation (9.54) décrit une courbe similaire à la courbe en pointillé de la fig. 254.

Substituons (9.53) dans (9.54). Nous obtenons ainsi:

$$i_a = i_{a0} + a(U_1 \sin \omega t + U_2 \sin \Omega t) + b\left[\frac{U_1^2}{2}(1 - \cos 2\omega t) + \right.$$
$$\left. + \frac{U_2^2}{2}(1 - \cos 2\Omega t) + 2U_1U_2 \sin \Omega t \sin \omega t\right].$$

ou

$$i_a = i_{a0} + \frac{b}{2}(U_1 + U_2^2) + aU_1(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t -$$
$$- \frac{bU_1^2}{2} \cos 2\omega t - \frac{bU_2^2}{2} \cos 2\Omega t + aU_2 \sin \Omega t; \qquad (9.55)$$
$$m = \frac{2bU_2}{a}.$$

Par conséquent, le courant circulant dans le circuit anodique comprend une composante continue $i_{a0} + \frac{b}{2}(U_1^2 + U_2^2)$, un premier harmonique $aU_1 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t$, modulé en amplitude, un harmonique de fréquence 2ω et des harmoniques de fréquences 2Ω et Ω.

En régime de résonance dans un circuit accordé à la fréquence ω une tension modulée en amplitude agit seule pratiquement, puisque pour la composante continue, ainsi que pour les fréquences 2ω, Ω et 2Ω l'impédance du circuit résonnant et, par conséquent, la chute de tension aux bornes de ce circuit sont nettement moindres que pour la fréquence ω et les fréquences voisines de cette dernière.

L'apparition d'une tension modulée en amplitude à la sortie d'un quadripôle est due au terme quadratique dans l'expression analytique de la caractéristique de grille du tube.

§ 238. Détection. La sélection d'un signal de basse fréquence contenue dans une oscillation modulée est appelée détection. Le schéma de principe d'un détecteur permettant de réaliser la détection d'une oscillation modulée en amplitude est représenté sur la fig. 269. Un tel détecteur comprend un redresseur et une capacité C shuntant le circuit de charge R_{ch}, L_{ch}. Cette charge peut être constituée par un téléphone, un haut-parleur, un relais ou d'autres dispositifs similaires.

Le redresseur supprime les alternances négatives d'une tension modulée. En l'absence de la capacité, le caractère de variation de la tension à la sortie du redresseur, après suppression des alternances négatives pourrait être représenté par la courbe de la fig. 269, *b*. En fait une capacité existe à la sortie du redresseur. Dans les intervalles où le redresseur est conducteur le condensateur se charge, et il se décharge à travers le circuit R_{ch}, L_{ch}, pendant les autres intervalles.

De ce fait la tension à la sortie se trouve « aplatie » (voir courbe *c* de la fig. 269). La tension représentée par la courbe de la fig. 269, *c* peut, au point de vue qualitatif, être décomposée en la somme de deux courbes *d* et *e*. La courbe *d* correspond à l'oscillation à basse fréquence (à la fréquence Ω), superposée à la composante continue et la courbe *e* correspond à l'oscillation à haute fréquence.

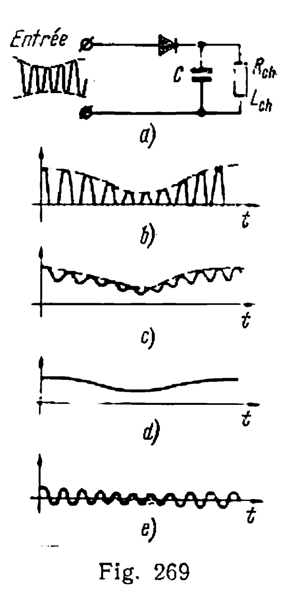


Fig. 269

La charge R_{ch}, L_{ch} est parcourue par un courant continu et par un courant à la fréquence Ω (signal utile), tandis que le courant à haute fréquence ne passe pratiquement pas à travers la charge par suite de l'impédance élevée de cette dernière en haute fréquence.

Afin que l'effet aplatisseur de la capacité soit efficace, le rapport suivant (que nous donnons sans l'établir) doit être satisfait:

$$\frac{1}{\omega C} \ll R_{ch} \ll \frac{1}{\Omega C}.$$

§ 239. Générateur à lampes. Le générateur à lampes * est le convertisseur le plus simple, sans pièces mobiles, de l'énergie d'une source de F.E.M. continue en une énergie à courant alternatif.

Les oscillations prenant naissance dans un générateur à lampes appartiennent à la classe des oscillations appelées *auto-oscillations*.

Ce sont des oscillations périodiques qui prennent naissance dans les systèmes soumis à l'effet de forces permanentes (autrement dit, de forces qui ne varient pas en fonction du temps). Dans le système examiné dans le présent paragraphe, la force permanente provient de la source de F.E.M. continue E_a.

Examinons le principe de fonctionnement d'un générateur à lampes, dont la maille oscillante est branchée au circuit de grille (fig. 270). L'inductance L_a et la source de F.E.M. E_a sont intercalées dans le circuit anode du tube. Il existe dans le circuit de grille une maille oscillante constituée par l'inductance L, couplé magnétiquement avec L_a, une résistance active R et une capacité C.

Les bornes de sortie du générateur sont celles de l'inductance L_a. La tension à ces bornes a une forme se rapporchant à une sinusoïde.

En utilisant la méthode du premier harmonique (voir § 229), calculons l'amplitude et la fréquence angulaire (la pulsation) des auto-oscillations dans le montage de la fig. 270, pour les deux cas suivants: a) la caractéristique de grille du tube a sensiblement la forme de la courbe

* On l'appelle aussi oscillateur à auto-excitation. En plus du montage de la fig. 270, où la maille oscillante est branchée au circuit de grille, il existe également un montage avec maille oscillante branchée dans le circuit de l'anode. Toutes les déductions du § 239 sont vraies également pour ce dernier montage.

en gros trait de la fig. 254, et b) cette caractéristique a une forme proche de celle de la courbe en pointillé de la même fig. 254. Ces courbes sont reproduites sur la fig. 271, *a* et *b*. Ecrivons l'équation suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour les valeurs instantanées de diverses grandeurs du circuit oscillant de grille, pour les sens positifs choisis des courants, les inductances L et L_a couplées magnétiquement étant branchées en opposition:

$$L\frac{di}{dt}-M\frac{di_a}{dt}+Ri+u_C=0. \tag{9.56}$$

Ici u_C — tension à la grille du tube (c'est également la tension aux armatures du condensateur).

Il découle des essais, que le courant i varie en fonction du temps suivant une loi pratiquement harmonique et, par conséquent, on peut écrire $i = I_m \sin\omega t$. Alors $\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos\omega t$, $u_C = \frac{1}{C}\int idt = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos\omega t = -U_{Cm}\cos\omega t$, où $U_{Cm} = I_m\frac{1}{\omega C}$. Le courant anodique est une fonction de la tension de grille $i_a = f(u_C)$ — voir fig. 271, *a* et *b*. Puisque la fonction $i_a = f(u_C)$ est univoque, le premier harmonique du courant i_a, c'est-à-dire — $I_{am}\cos\omega t$, est en phase avec le premier harmonique $\dot{u}_C = -U_{Cm}\cos\omega t$.

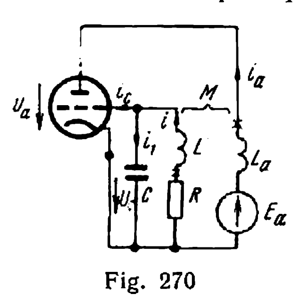


Fig. 270

La dérivée $\frac{di_a}{dt}$ figure dans l'équation (9.56). Elle peut être trouvée de la manière suivante: $\frac{di_a}{dt}=\frac{di_a}{du_C}\frac{du_C}{dt}$. Mais

$$\frac{di_a}{du_C}\approx\frac{\Delta i_a}{\Delta u_C}=\frac{-I_{am}\cos\omega t}{-U_{Cm}\cos\omega t}=\frac{I_{am}}{U_{Cm}}=S, \tag{9.57}$$

où S — pente du tube suivant le premier harmonique. Cette pente peut être trouvée par la méthode graphique ou analytique en partant de la caractéristique $i_a = f(u_C)$ et en conférant à I_m différentes valeurs. Une certaine valeur de U_{Cm} et, par conséquent, certaines valeurs de I_{am} et S correspondent à chaque valeur de I_m. A son tour

$$\frac{du_C}{dt}=\frac{d}{dt}(-U_{Cm}\cos\omega t)=\frac{I_m}{C}\sin\omega t \quad \left(U_{Cm}=I_m\frac{1}{\omega_C}\right).$$

Les fonctions $S = f(I_m)$ correspondant à la fig. 271, *a* et *b* sont représentées sur les fig. 271, *c* et *d*. Pour la fig. 271, *c* S diminue lorsque I_m augmente, par suite de la saturation (on peut voir sur la fig. 271, *a* que pour des valeurs importantes de u_C le courant anodique ne croît presque plus lorsque u_C augmente). La fonction $S = f(I_m)$, représentée sur la fig. 271, *d*, a un caractère tout différent: au début S augmente par suite de son passage sur un tronçon plus raide de la courbe $i_a = f(u_C)$ de la fig. 271, *b* et, ensuite, il diminue du fait de la saturation.

Substituons les valeurs trouvées de $\frac{di_a}{dt}$, u_C et du courant i dans (9.56). Nous obtenons

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos \omega t + \left(R - \frac{MS}{C}\right) I_m \sin \omega t = 0. \tag{9.58}$$

La somme de ces fonctions, dont l'une varie en fonction du temps suivant une loi sinusoïdale et l'autre, suivant une loi cosinusoïdale,

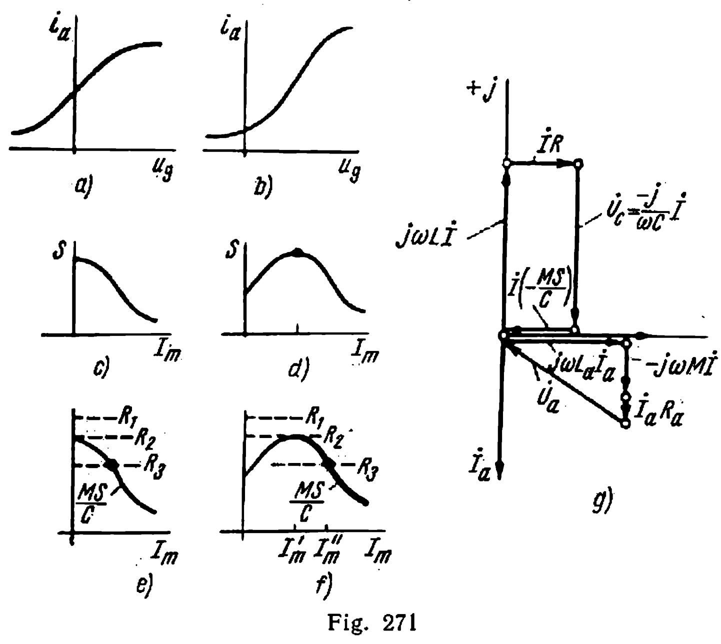


Fig. 271

est nulle à tout instant. Ceci peut avoir lieu soit lorsque $I_m = 0$ (c'est-à-dire en l'absence des oscillations), soit pour $I_m \neq 0$, lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \tag{9.59}$$

$$R = \frac{MS}{C}. \tag{9.60}$$

Il découle de (9.59) que la fréquence angulaire des auto-oscillations est:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{9.61}$$

Examinons les conditions d'excitations des oscillations en utilisant (9.60). A cette fin, construisons les courbes du premier et du second membres de (9.60) en fonction de I_m, voir fig. 271, e et f (la fig. 271, e correspond à la fig. 271, c et la fig. 271, f à la fig. 271, d), en supposant que R varie, tandis que M et C restent constants. La résistance R est

indépendante de l'amplitude du courant I_m et, par conséquent, le premier membre de (9.60) est une droite parallèle à l'axe des abscisses. Cette droite est située d'autant plus bas, que la valeur de R est petite. Le second membre est une courbe similaire à la courbe de la fig. 271, *c* ou de la courbe 271, *d*.

Pour $R > R_2$ la droite ne coupe pas la courbe et, par conséquent, il n'y aura pas d'oscillations dans le circuit. Les oscillations seront engendrées pour $R \leqslant R_2$. La fig. 271, *e* correspond à l'*excitation* dite *faible d'oscillations*; dans ce cas une diminution de R donne lieu à une augmentation progressive à partir de zéro, de l'amplitude du courant I_m. La fig. 271, *f* correspond à une *excitation d'oscillations*, dite *forte*; dans ce cas une diminution progressive de R donne lieu à une augmentation par saut de l'amplitude I_m à partir de zéro et jusqu'à une certaine valeur relativement importante; cette augmentation va, par exemple, pour $R = R_2$, jusqu'à I'_m et pour $R = R_3$ jusqu'à I''_m.

On peut examiner de même les conditions d'excitation des oscillations si on laisse constants R et M et si on fait varier C ou si on laisse constants R et C et on fait varier M. La branche droite de la courbe de la fig. 271, *f* correspond aux oscillations stables (elle est tracée en gros trait) et la branche gauche correspond aux oscillations instables (la branche gauche de la courbe n'est pas utilisée dans la pratique). Pour les courants et les tensions des circuits de grille et d'anode (pour leurs premiers harmoniques) on peut construire des diagrammes vectoriels pour les valeurs efficaces des premiers harmoniques (fig. 271, *g*). L'équation (9.58) peut être écrite sous forme complexe:

$$j\omega L\dot{I} - \frac{j}{\omega C}\dot{I} + \dot{I}R - \dot{I}\frac{MS}{C} = 0. \qquad (9.62)$$

Pour le circuit d'anode les valeurs instantanées des grandeurs variables en fonction du temps (sans tenir compte de la composante continue du courant i_a, de la tension u_a et de la F.E.M. continue E_a), satisfont à l'équation suivante:

$$L_a\frac{di_a}{dt} - M\frac{di}{dt} + i_aR_a + u_a = 0.$$

Ou l'équation correspondante en grandeurs complexes:

$$j\omega L_a\dot{I}_a - j\omega M\dot{I} + \dot{I}_aR_a + \dot{U}_a = 0. \qquad (9.63)$$

Ici R_a — résistance active de l'inductance L_a, $\dot{U}_a$ — grandeur complexe du premier harmonique de la tension anodique.

L'énergie nécessaire pour compenser les pertes dans le circuit de grille est prélevée du circuit d'anode grâce à l'existance du couplage magnétique entre ces deux circuits.

L'action exercée par le circuit de sortie (du circuit d'anode dans le cas présent) sur le circuit d'entrée (circuit de grille dans le cas considéré) est appelée *réaction*. L'existence de la réaction est une condition nécessaire pour l'amorçage des auto-oscillations.

* * *

Examinons maintenant un groupe de phénomènes relativement grossiers, qui ont lieu dans les circuits comprenant une inductance non linéaire et une capacité linéaire. On appelle ces circuits des circuits à ferrorésonance.

Pour leur analyse on peut faire appel soit à la méthode du premier harmonique (voir § 229), soit à la méthode de calcul suivant les valeurs efficaces (voir § 230). Dans les §§ 240 à 247, nous allons employer la méthode de calcul suivant les valeurs efficaces. La caractéristique courant-tension de l'inductance non linéaire utilisée est établie pour les valeurs efficaces du courant et de la tension. Dans cette méthode les courants et les tensions non sinusoïdaux sont remplacés en réalité par des valeurs sinusoïdales équivalentes (l'équivalence concerne ici les valeurs efficaces, suivant § 178).

Lorsque dans les §§ 240 à 247 nous parlerons du déphasage entre le courant et la tension dans un élément quelconque du circuit il faudra comprendre le déphasage comme l'angle entre un courant sinusoïdal équivalent et une tension sinusoïdale équivalente.

§ 240. Construction d'une caractéristique courant-tension d'un circuit en série à ferrorésonance. Le circuit représenté sur la fig. 272, *a* comprend une inductance non linéaire, une résistance active linéaire R

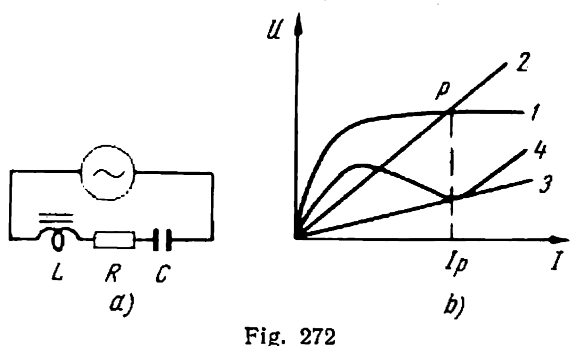


Fig. 272

et une capacité linéaire C couplées en série. La caractéristique courant-tension de la bobine à noyau d'acier $U_L = f(I)$ est représentée par la courbe *1* de la fig. 272, *b*. La caractéristique courant-tension de la capacité $U_C = \frac{1}{\omega C} I$ est la droite *2*, tandis que la caractéristique courant-tension de la résistance active $U_R = RI$ est la droite *3*.

Les points appartenant à la caractéristique courant-tension résultante du circuit, autrement dit à la courbe *4*, sont obtenus de la manière suivante:

Soit I un certain courant pour lequel nous trouvons la différence de tension $U_L - U_C$ (la tension aux bornes de l'inductance et celle aux bornes de la capacité sont en opposition de phases) et la tension U_R; la tension résultante U est égale à l'hypoténuse d'un triangle construit sur les côtés de l'angle droit U_R et $U_L - U_C$.

Lorsque la résistance active R est relativement faible, la caractéristique courant-tension résultante de ce circuit comporte un tronçon tombant et la caractéristique elle-même a une forme en N. Lorsque R augmente, le tronçon tombant de la caractéristique disparaît.

§ 241. Effet de basculement dans un circuit en série à ferrorésonance. La courbe *4* de la fig. 272, *b* est reproduite à part sur la fig. 273, *a*. Augmentons progressivement à partir de zéro la tension de la source de la F.E.M. du schéma de la fig. 272, *a*. Dans ces conditions le point figuratif de la fig. 273, *a* se déplace du point *0*, passe par le point *1* et s'approche du point *2*. Si on continue d'augmenter la tension, le point figuratif saute du point *2* au point *4* et, ensuite, il parcourt le tronçon *4—5*.

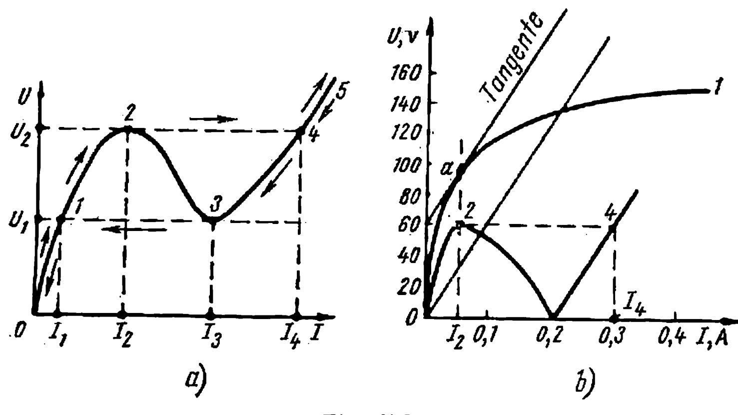


Fig. 273

Lorsque la tension diminue, le point figuratif se déplace du point *5*, en passant par le point *4*, vers le point *3* et, ensuite, fait un saut au point *1*; après ceci le déplacement se poursuit du point *1* vers le point 0. Ainsi on constate une augmentation par saut du courant de la valeur I_2 à la valeur I_4 en cas d'augmentation progressive du tension et lorsque cette dernière atteint la valeur U_2. Dans ces conditions, l'angle de déphasage entre le courant dans le circuit et la tension appliquée au circuit varie brusquement: au point *2* le courant est en retard sur la tension ($U_L > U_C$) et au point *4* il est en avance sur cette dernière ($U_C > U_L$). Lorsque la tension de la source de la F.E.M. diminue progressivement et atteint la valeur U_1, le courant dans le circuit diminue par saut et passe de la valeur I_3 à la valeur I_1.

Une variation brusque du courant dans le circuit, due à une faible variation de la tension à l'entrée dudit circuit, est appelée *effet de basculement dans un circuit en série à ferrorésonance*.

Si on applique au circuit de la fig. 272, *a* une tension U dont la valeur se trouve dans l'intervalle entre U_1 et U_2, l'un des deux régimes possibles suivants s'établit dans ce circuit. Le premier régime correspond à la présence du point de fonctionnement sur le tronçon de la caractéris-

tique se trouvant entre les points *1* et *2* et le deuxième régime — à la position de ce point entre les points *3* et *4*.

Le point de fonctionnement se trouve en réalité sur l'un ou l'autre des deux tronçons mentionnés suivant le caractère du phénomène transitoire se déroulant dans le circuit par suite de son branchement à la source de la F.E.M.

§ 242. Ferrorésonance de tensions. On appelle ferrorésonance de tensions le régime de fonctionnement du circuit de la fig. 272, *a*, pour lequel le premier harmonique du courant dans ce circuit est en phase avec la tension U de la source de la F.E.M. Pour la fig. 272, *b* sur laquelle on voit les caractéristiques courant-tension tracées suivant les valeurs efficaces, la ferrorésonance de tensions correspond approximativement au point p.

Le ferrorésonance de tensions peut être obtenue en faisant varier la tension ou la fréquence de la source d'alimentation du circuit ou en faisant varier la capacité ou les paramètres de la bobine à noyau d'acier, faisant partie du circuit.

Exemple 114. La courbe *1* de la fig. 273, *b* est la caractéristique courant-tension d'une inductance non linéaire. Trouver, en négligeant la résistance active, la capacité qu'il faut brancher en série avec l'inductance non linéaire (schéma de la fig. 272, *a*), afin que l'effet de basculement ait lieu pour 60 V. Calculer l'accroissement relatif du courant I_4 circulant après le saut, par rapport au courant I_2, existant avant ce saut; $\omega = 314\ s^{-1}$.

Solution. Traçons en partant du point $U = 60\ V$; $I = 0$, la tangente à la caractéristique courant-tension de l'inductance non linéaire. Elle touchera la courbe au point a. La caractéristique courant-tension de la capacité (qui est une droite) doit être tracée à partir de l'origine des coordonnées, parallèlement à la tangente. La tangente de l'angle formée par cette tangente et l'axe des abscisses est numériquement égale à $\frac{1}{\omega C}$.

Trouvons en partant de la fig. 273, *b*;

$$\frac{1}{\omega C} = 690\,\Omega; \quad C = \frac{10^6}{314 \cdot 690} = 4{,}52\ \mu F.$$

A la suite du saut le courant passe de $I_2 = 0{,}06\ A$ à $I_4 = 0{,}29\ A$; $\frac{I_4}{I_2} = 4{,}83$.

§ 243. Caractéristique courant-tension d'un couplage en parallèle d'un condensateur et d'une bobine à noyau de fer. Ferrorésonance de courants. La courbe *3* de la fig. 274 est la caractéristique courant-tension résultante pour le circuit de la fig. 275. Le courant I dans la partie non ramifiée du circuit est égal à la somme algébrique des courants I_L et I_C. Les abscisses de la courbe *3* sont égales à la différence des abscisses correspondantes des courbes *2* et *1*.

Jusqu'au point p, le courant I_C a un module plus grand que celui du courant I_L. Les courbes *1* et *2* se coupent au point p. Au-dessus du

point p, le courant I_L a un module plus grand que celui du courant I_C. On appelle ferrorésonance des courants dans le circuit de la fig. 275 un régime de fonctionnement de ce circuit pour lequel la composante réactive du premier harmonique de courant I_L est égale au courant I_C.

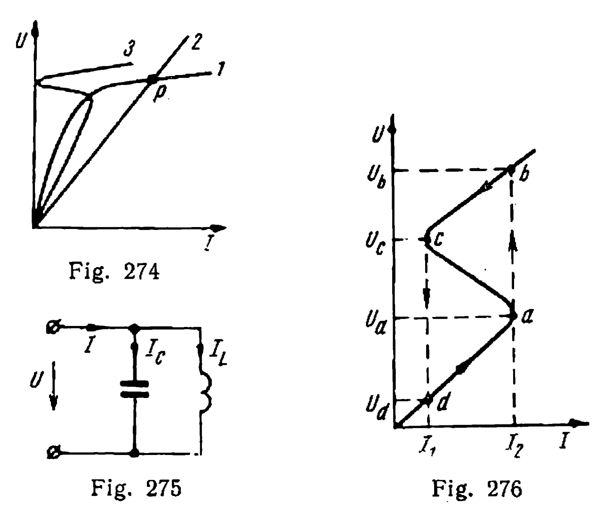


Fig. 274

Fig. 275

Fig. 276

En ce régime (point c de la fig. 276) le courant dans la partie non ramifiée du circuit n'est pas nul et comprend une composante active et les harmoniques supérieurs du courant I_L.

§ 244. Effet de basculement dans un circuit en parallèle à ferrorésonance. La caractéristique courant-tension résultante du circuit de la fig. 275 est représentée sur la fig. 276.

Si on prend comme source d'alimentation du circuit une source de courant et si l'on commence à augmenter progressivement (à partir de zéro) le courant I, circulant dans ce circuit, la tension à l'entrée du circuit augmente par saut de la valeur U_a jusqu'à la valeur U_b, lorsque le courant a atteint la valeur I_2.

Lorsque le courant diminue progressivement jusqu'à la valeur I_1, la tension diminue par saut et passe de la valeur U_c à la valeur U_d.

E x e m p l e 115. La caractéristique courant-tension de l'inductance non linéaire, utilisée dans le circuit de la fig. 275, est représentée par la courbe *1* de la fig. 277. En négligeant la résistance active et les harmoniques supérieurs, calculer la valeur de la capacité C qu'il faut brancher au circuit de la fig. 275 pour que l'effet de basculement ait lieu pour un courant $I_2 = 0{,}15\ A$, $\omega = 314\ s^{-1}$.

S o l u t i o n. Traçons à partir de l'origine des coordonnées plusieurs rayons (a, b, c, d). Trouvons sur la caractéristique courant-tension de l'inductance non linéaire les points dans lesquels les tangentes à la courbe sont parallèles aux rayons précédemment tracés. Ainsi, la tangente à la caractéristique courant-tension de l'inductance au point a est parallèle au rayon a, la tangente au point b est parallèle au rayon b,

etc. Construisons la courbe *2*. Elle passe par les points similaires au point *a* de la fig. 276, pour diverses valeurs de la capacité.

L'intersection de la verticale $I_2 = 0{,}15\ A$ et de la courbe *2* donne la valeur de la tension U_2.

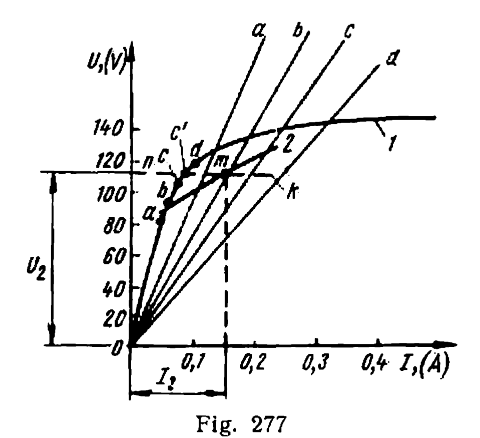


Fig. 277

La caractéristique courant-tension de la capacité cherchée doit passer par le point *k*. Ce point se trouve sur l'horizontale passant par le point *m*. Le tronçon

$$\overline{nk} = \overline{nm} + \overline{nc'}\ *.$$

Le point *k* correspond au courant $I_k = 0{,}235\ A$:

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{U_2}{I_k} = \frac{112}{0{,}235} = 478\ \Omega;$$

$$C = 6{,}68\ \mu F.$$



§ 245. Stabilisateur de tension à ferrorésonance le plus simple. Le principe de stabilisation de la valeur de la tension à courant alternatif est en fait le même que celui de la tension à courant continu (§ 40), à savoir : la tension de sortie est prélevée d'un tronçon de circuit, choisi de manière que la tension à ses bornes reste pratiquement constante lorsque la tension d'entrée varie.

Pour stabiliser une tension à courant alternatif, on utilise largement divers montages à ferrorésonance. Le montage le plus simple est représenté sur la fig. 278, *a*. Il comprend un circuit en parallèle à ferrorésonance et une inductance linéaire, couplée en série avec circuit.

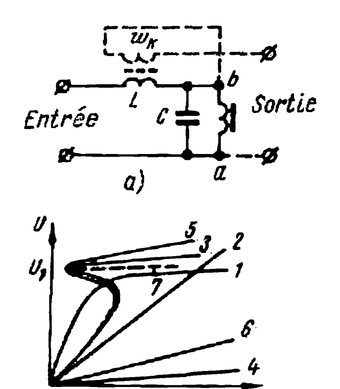
La courbe *1* représentée sur la fig. 278, *b* est la caractéristique courant-tension de l'inductance non linéaire; droite *2* — caractéristique courant-tension de la capacité; courbe *3* — caractéristique courant-tension du circuit en parallèle à ferrorésonance; droite *4* — caractéristique courant-tension de l'inductance linéaire *L*; courbe *5* — caractéristique courant-tension résultante pour l'ensemble du circuit: ses ordonnées sont égales à la somme des ordonnées des courbes *3* et *4*.

Bobinons sur le noyau d'une inductance linéaire un enroulement additionnel w_k et raccordons-le au circuit principal, comme ceci est représenté en pointillé sur la fig. 278, *a*.

La tension à la sortie du stabilisateur est égale à la différence de la tension aux bornes *ab* et de la F.E.M. induite dans l'enroulement w_k. Cette dernière est une fonction linéaire du courant *I* (droite *6* de la fig. 278, *b*). La tension à la sortie du stabilisateur est représentée par la courbe *7*. Ses ordonnées sont égales à la différence des ordonnées respectives de la courbe *5* et de la droite *6*. La tension U_{sor} à la sortie du stabi-

* Le point *c'* se trouve à l'intersection de la droite *nk* avec la caractéristique courant-tension de l'inductance non linéaire.

lisateur est représentée sur la fig. 278, *c* en fonction de la tension à l'entrée U_{ent}, pour la marche à vide du stabilisateur. Pour construire cette courbe il faut attribuer au courant des valeurs arbitraires et pour chacune d'elles trouver à l'aide de courbes *7* et *5* les valeurs correspondantes de U_{sor} et U_{ent}.



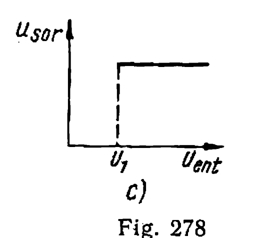
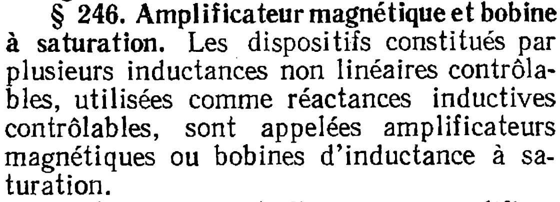


Fig. 278

La stabilisation a lieu seulement lorsque $U_{ent} > U_1$. Par conséquent la courbe n'est pas prolongée dans la région $U_{ent} < U_1$ de la fig. 278, *c*.

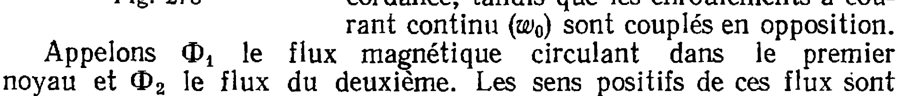


§ 246. Amplificateur magnétique et bobine à saturation. Les dispositifs constitués par plusieurs inductances non linéaires contrôlables, utilisées comme réactances inductives contrôlables, sont appelées amplificateurs magnétiques ou bobines d'inductance à saturation.

Sur le schéma de la fig. 279, un amplificateur magnétique et la charge R_{ch} sont branchés en série à la source de F.E.M. à tension U_s et à fréquence f.

L'amplificateur magnétique est encadré en pointillé sur le schéma de la fig. 279. Il est constitué par deux inductances non linéaires contrôlables identiques.

Les enroulements à courant alternatif de ces inductances ($w\sim$) sont branchés en concordance, tandis que les enroulements à courant continu (w_0) sont couplés en opposition.



Appelons Φ_1 le flux magnétique circulant dans le premier noyau et Φ_2 le flux du deuxième. Les sens positifs de ces flux sont indiqués par des flèches sur la fig. 279.

Par suite de la symétrie des deux moitiés de l'amplificateur magnétique par rapport à la verticale $A - A$ (fig. 279) et de la symétrie de la courbe $U_s = f(\omega t)$ par rapport à l'axe de temps ωt, les variations de Φ_1 et Φ_2 en fonction du temps doivent également avoir un caractère symétrique.

Cette symétrie consiste dans la possibilité d'obtenir la courbe $\Phi_2 = f(\omega t)$ à partir de la courbe $\Phi_1 = f(\omega t)$ en déplaçant cette dernière d'une alternance et en prenant sa symétrique par rapport à l'axe de temps. En d'autres termes, on peut écrire la relation suivante

$$\Phi_2(\omega t) = -\Phi_1(\omega t - \pi).$$

Il résulte de la fig. 279 que le flux magnétique total à travers les enroulements $w_\sim$ est égal à $w_\sim(\Phi_1 + \Phi_2)$, tandis que le flux magnétique total à travers les enroulements w_0 est égal à $w_0(\Phi_1 - \Phi_2)$.

Si on désigne la valeur instantanée du courant dans le circuit à courant alternatif par i et la valeur instantanée du courant dans le circuit de commande par i_0, on peut écrire conformément à la deuxième loi de

Kirchhoff l'équation (a) pour le circuit à courant alternatif et l'équation (b) pour le circuit de commande

$$iR_{ch} + w_{\sim} \frac{d}{dt}(\Phi_1 + \Phi_2) = \sqrt{2}U_s \cos \omega t; \qquad (a)$$

$$i_0 R_0 + w_0 \frac{d}{dt}(\Phi_1 - \Phi_2) = E_0. \qquad (b)$$

Dans le cas général le courant i_0 comprend une composante continue $I_0 = \frac{E_0}{R_0}$ et une composante alternative $i_{0\sim}i_0 = I_0 + i_{0\sim}$. La forme de la courbe du flux $\Phi_1 = f(\omega t)$ et de la courbe Φ_2 $f(\omega t)$, symétrique à la première, dans le sens indiqué plus haut, dépend de plusieurs facteurs, à savoir : de la forme de la courbe d'aimantation $B = f(H)$, de la résistance R_0 et de la résistance R_{ch}, de la F.E.M. E_0 et de l'amplitude de la tension de la F.E.M. sinusoïdale. Mais quelle que soit la forme des flux, du fait de la relation $\Phi_2(\omega t) = -\Phi_1(\omega t - \pi)$ la somme des flux $\Phi_1 + \Phi_2$ ne peut comprendre que des harmoniques impairs, tandis que la différence des flux $\Phi_1 - \Phi_2$ ne peut comprendre qu'une composante continue et des harmoniques pairs.

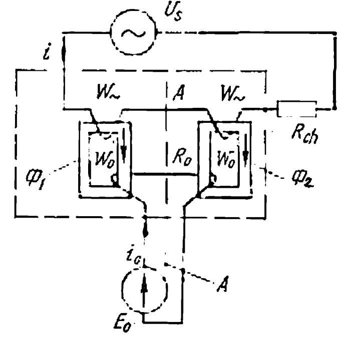


Fig. 279

A titre d'exemple, nous avons tracé sur la fig. 280, *a* les flux Φ_1, Φ_2 et les différences des flux $\Phi_1 - \Phi_2$ ainsi que les sommes des flux $\Phi_1 + \Phi_2$, en fonction du temps, pour un cas particulier de fonctionnement du schéma de la fig. 279, lorsque la résistance de la charge $R_{ch} \approx 0$ et la résistance du circuit de commande R_0 est très faible.

La fig. 280, *b* donne les lois de variation en fonction du temps pour les mêmes grandeurs que celles de la fig. 280, *a* mais pour un régime de fonctionnement différent, à savoir lorsque R_0 est très grand (R_0 tend théoriquement vers l'infini), tandis que R_{ch} est toujours très petit.

Comparons les courbes de la fig. 280, *a* aux courbes correspondantes de la fig. 280, *b*. Pour les deux figures la condition $\Phi_2(\omega t) = -\Phi_1(\omega t - \pi)$ est satisfaite. Dans les deux cas la composante continue du flux Φ_1 est égale et de signe contraire à la composante continue du flux Φ_2 et dans les deux cas la somme des flux $\Phi_1 + \Phi_2$ donne une sinusoïde à la fréquence de la source d'alimentation, tandis que la différence de ces flux comprend une composante continue et des harmoniques d'ordre impair. La différence des signes affectant les composantes continues des flux Φ_1 et Φ_2 s'explique par le fait que la composante continue de la F.M.M. du premier noyau est dirigée en concordance avec Φ_1, tandis que la composante continue de la F.M.M. du deuxième noyau est dirigée en sens contraire du Φ_2.

L'analyse du schéma de la fig. 280 peut être faite par des méthodes différentes. On a recours le plus souvent aux deux méthodes suivantes :

celle du premier harmonique et celle d'approximation linéaire par morceaux de la courbe d'aimantation.

La méthode du premier harmonique est utilisée lorsque les noyaux de l'amplificateur magnétique sont exécutés en matériau ferromagnétique, en acier magnétique Э4A et XBП, par exemple, dont les courbes d'aimantation ont un caractère régulier sans coude brusque.

Si, par contre, les noyaux d'un amplificateur magnétique sont exécutés en matériau, dont la courbe d'aimantation se rapproche de la courbe idéale rectangulaire (fig. 261, *b*), comme par exemple en matériau 65HП ou 50HП, il est préférable d'effectuer l'analyse du schéma de la fig. 279 par la méthode d'approximation linéaire par morceaux (les

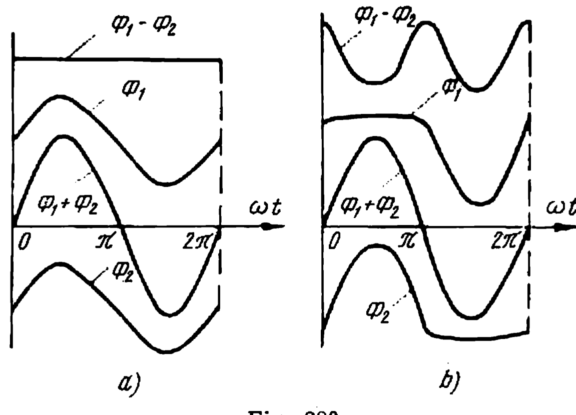


Fig. 280

bases de cette méthode ont été données au § 228 et un exemple de son utilisation a été examiné au § 235).

Par la suite nous effectuerons l'analyse des schémas de la fig. 279 par la méthode du premier harmonique, comme ceci est d'usage dans les manuels d'électrotechnique théorique.

Nous avons déjà indiqué que pour l'analyse des circuits à inductance non linéaire contrôlable on utilise la famille des caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques.

Les caractéristiques courant-tension suivant les premiers harmoniques (voir § 204) donnent la valeur efficace du premier harmonique de la tension aux bornes d'une inductance non linéaire, en fonction de la valeur efficace du premier harmonique de courant circulant dans cette inductance, le courant de commande I_0 étant pris comme paramètre.

Il découle nettement des considérations précédentes, ainsi que des courbes de la fig. 280, *a* et *b*, que pour un régime quelconque de fonctionnement d'un amplificateur magnétique, la composante continue du flux Φ_1 est égale numériquement à la composante continue du flux Φ_2, tandis que l'amplitude du premier harmonique du flux Φ_1 est égale à l'amplitude du premier harmonique du flux Φ_2. En outre et pour un régime de fonctionnement quelconque du schéma de la fig. 279, la com-

posante continue de la F.M.M. du premier noyau est égale à la composante continue de la F.M.M. du deuxième noyau, chacune d'elles étant égale à $I_0 w_0$.

L'amplificateur magnétique est constitué par deux inductances non linéaires, couplées en série.

Les caractéristiques courant-tension de ces deux inductances sont identiques et au point de vue qualitatif ont la même forme que les courbes de la fig. 242, *b*. Par conséquent, la famille des caractéristiques courant-tension d'un amplificateur magnétique est similaire à la famille des courbes de la fig. 242, *b*.

§ 247. Utilisation d'un amplificateur magnétique comme amplificateur de puissance. Pour expliquer le principe de fonctionnement du schéma de la fig. 279, rapportons-nous à la fig. 281.

La fig. 281 représente le schéma équivalent du schéma de la fig. 279, suivant le premier harmonique. La tension U_s de la source d'alimentation et la résistance R_{ch} dans le schéma de la fig. 281 sont les mêmes que dans le schéma de la fig. 279, tandis que l'amplificateur magnétique est remplacé par sa réactance inductive X_1 suivant le premier harmonique. La réactance X_1 est une fonction du courant d'aimantation I_0 et de la tension aux bornes des enroulements $w_{\sim}$ de l'amplificateur magnétique et doit être calculée en principe comme la réactance inductive suivant le premier harmonique d'une inductance non linéaire seule (voir § 208).

Pour le circuit de la fig. 281, la valeur efficace du premier harmonique du courant alternatif est

$$I = \frac{U_s}{\sqrt{X_1^2 + R_{ch}^2}}.$$

Puissance active dégagée dans la résistance R_{ch}:

$$P_{ch} = I^2 R_{ch}.$$

Si le courant magnétisant (de commande) I_0 de l'amplificateur magnétique est faible, la réactance X_1 se trouve être relativement grande, tandis que le courant I et la puissance P_{ch} sont comparativement faibles. Lorsque le courant magnétisant I_0 croît, X_0 diminue et le courant I ainsi que la puissance P_{ch} augmentent.

Ainsi, en faisant varier le courant magnétisant, on peut contrôler la valeur du courant alternatif, ainsi que la puissance active dégagée dans la résistance R_{ch}.

Si on réduit suffisamment la résistance du circuit d'aimantation R_0, la puissance active $I_0^2 R_0$, dégagée dans le circuit d'aimantation et *dépensée pour contrôler le régime de fonctionnement de l'amplificateur magnétique* est nettement moindre que la puissance $I^2 R_{ch}$, qui est dégagée dans la charge R_{ch} du circuit à courant alternatif. Dans ces conditions l'amplificateur magnétique fonctionne comme amplificateur de puissance.

La possibilité d'utiliser un amplificateur magnétique comme amplificateur de puissance est caractérisée par la valeur de son gain en puis-

sance k_{gp}. On appelle gain en puissance le rapport de l'accroissement de la puissance dégagée dans la charge R_{ch} à la puissance dépensée dans le circuit de commande:

$$k_{gp} = \frac{R_{ch}(I^2 - I_{mv}^2)}{R_0 I_0^2} \qquad (9.64)$$

où: I_{mv} — courant I circulant dans la charge pour $I_0 = 0$, R_0 — résistance du circuit de commande.

Pour obtenir les relations quantitatives pour le schéma de la fig. 279, utilisons la famille des caractéristiques courant-tension, représentée sur la fig. 282.

Nous appellerons U_{am} la valeur efficace du premier harmonique de la chute de tension dans l'amplificateur magnétique.

La tension aux bornes de l'inductance (de l'amplificateur magnétique) et la tension aux bornes de la résistance active sont déphasées de 90° l'une par

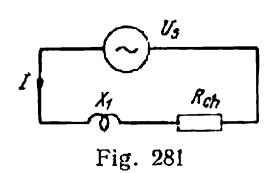


Fig. 281

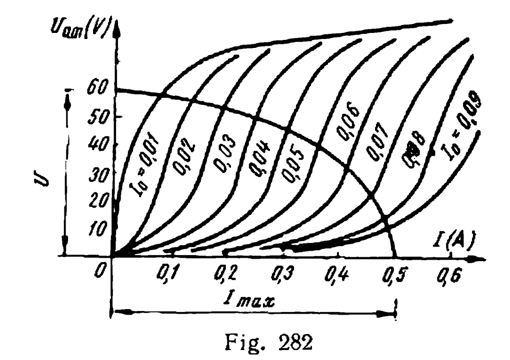


Fig. 282

rapport à l'autre. La somme des carrés des chutes de tension dans l'amplificateur magnétique et dans la charge est égale au carré de la tension secteur. Par conséquent,

$$U_{am}^2 + (IR_{ch})^2 = U_s^2.$$

Divisons les deux parties de l'égalité par U_s^2 et notons $I_{max} = \frac{U_s}{R_{ch}}$: nous aurons alors

$$\left(\frac{U_{am}}{U_s}\right)^2 + \left(\frac{I}{I_{max}}\right)^2 = 1. \qquad (9.65)$$

L'équation (9.65) est celle d'une ellipse. L'un de ses demi-axes est égal à la tension secteur U_s et l'autre au courant I_{max}. L'arc de cet ellipse est représenté sur la fig. 282. Les points d'intersection de cet arc avec la famille des caractéristiques courant-tension de l'amplificateur magnétique donnent les valeurs I et I_0 respectives.

Exemple 116. Construire la courbe $I = f(I_0)$ pour l'amplificateur magnétique, dont la famille des caractéristiques courant-tension est représentée sur la fig. 282: $U_s = 60\ V$; $R_{ch} = 120\,\Omega$.

Solution. Calculons les demi-axes de l'ellipse. L'un des demi-axes $U_s = 60\ V$ et l'autre

$$I_{max} = \frac{60}{120} = 0,5\ A.$$

Cette ellipse est construite sur la fig. 282. D'après ses points d'intersection avec la famille des caractéristiques courant-tension, construisons la courbe $I = f(I_0)$. Cette courbe est représentée sur la fig. 283.

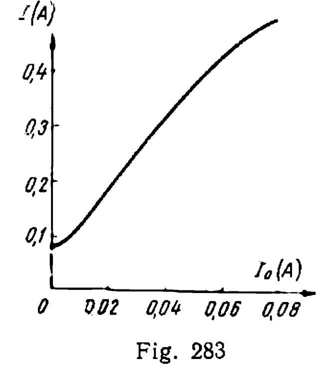


Fig. 283

Exemple 117. La résistance du circuit de l'enroulement de commande de l'amplificateur magnétique de l'exemple 116 est égale à $R_0 = 100\,\Omega$. Calculer le gain en puissance pour $I = 0{,}462\ A$.

Solution. Trouvons conformément à (9.64):

$$k_{gp} = \frac{120\,(0{,}462^2 - 0{,}075^2)}{100 \cdot 0{,}08^2} = 38{,}8.$$

Examinons en conclusion une relation importante existant dans les amplificateurs magnétiques.

La valeur moyenne pendant une alternance de la F.M.M., créée par le courant alternatif i est égale à la composante continue de la F.M.M., créée par le courant de commande, c'est-à-dire

$$|iw\sim|_{moy} = I_0 w_0. \tag{a}$$

Cette relation, rigoureusement parlant, n'est satisfaite que pour les amplificateurs magnétiques dont les noyaux ont une courbe d'aimantation parfaitement rectangulaire; cependant elle est approximativement vraie même pour les amplificateurs magnétiques dont les courbes d'aimantation diffèrent quelque peu de la forme rectangulaire.

Pour justifier la relation (a), supposons que les noyaux de l'amplificateur magnétique (fig. 279) soient en matériau à courbe d'aimantation rectangulaire et que la symétrie, décrite au § 246 existe dans le fonctionnement de ce dispositif; grâce à cette symétrie, le flux magnétique total varie au cours de la première alternance dans un seul noyau, le premier par exemple de $-\psi_m$ jusqu'à une certaine valeur de ψ, inférieure à ψ_m, tandis qu'au cours de la deuxième alternance c'est le flux magnétique total dans le deuxième noyau qui varie de $+\psi_m$ à ψ, dont le module est inférieur à $|-\psi_m|$.

Si pendant une certaine partie de l'alternance le flux magnétique total varie et ensuite pendant chaque partie de l'alternance $|\psi|$ reste inférieur à $|\psi_m|$, cela veut dire que le point figuratif se déplace d'abord suivant le tronçon vertical de la courbe de l'inductance magnétique B du noyau, tracée en fonction du champ H noyau du considéré, et que pendant la partie restante de l'alternance ce point figuratif reste sur ce tronçon vertical de la fonction $B = f(H)$ en question.

Sur le tronçon vertical de la courbe $B = f(H)$ le champ H et, par conséquent, la F.M.M. résultante du noyau, créant ce champ, sont nuls.

Mais la F.M.M. résultante du noyau est égale à la somme de la F.M.M. de commande $i_0 w_0$ et de la F.M.M. créée par le courant alternatif $iw\sim$,

c'est-à-dire

$$i_0w_0 + iw\sim = 0.$$

La valeur moyenne de cette somme pendant une alternance est également nulle. C'est là-dessus que repose la relation (a).

§ 248. Application de la méthode symbolique au calcul des circuits non linéaires et construction des diagrammes vectoriels pour ces circuits. Nous avons examiné aux §§ 240—247 par la méthode graphique certains phénomènes relativement grossiers, en utilisant les caractéristiques courant-tension suivant les valeurs efficaces et les premiers harmoniques.

Des phénomènes analogues peuvent être également étudiés par la méthode analytique. Il est important de souligner ici que la méthode symbolique peut être employée pour les circuits électriques non linéaires et qu'on peut construire un diagramme vectoriel pour chacun des harmoniques. Si les harmoniques supérieurs ne se manifestent que faiblement, des diagrammes vectoriels peuvent être parfois construits également pour les valeurs efficaces de diverses grandeurs. La méthode analytique de calcul suivant le premier harmonique est illustrée dans l'exemple 118.

L'application de la méthode symbolique et la construction d'un diagramme vectoriel pour les valeurs efficaces sont décrites aux §§ 249 et 250.

E x e m p l e 118. Soit pour le schéma de la fig. 284, *a* $E_0 = 106,2\ V$, $R = 2\ k\Omega$.

Quelle doit être la valeur de l'inductance L et de la F.E.M. E_1 pour qu'une résonance suivant le premier harmonique ait lieu dans le circuit, si un condensateur

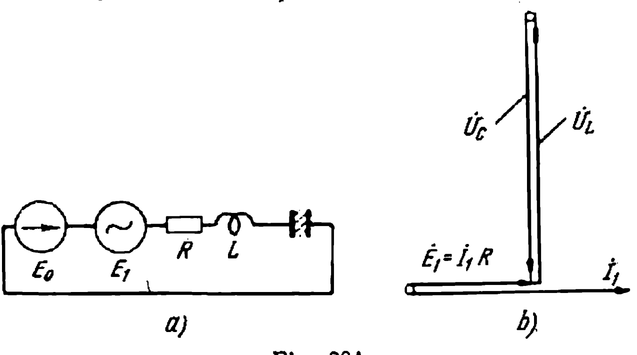


Fig. 284

non linéaire, ayant la même caractéristique que dans l'exemple 109 est branché dans ce circuit? Fréquence angulaire $\omega = 3140\ s^{-1}$; courant dans le circuit $I_{1m} = 18,45\ mA$.

S o l u t i o n. Le phénomène de résonance suivant le premier harmonique consiste dans l'égalité du premier harmonique de la tension aux bornes de la capacité au premier harmonique de la tension aux bornes de l'inductance; dans ces conditions le premier harmonique de courant, circulant dans le circuit, est en phase avec la F.E.M. E_1.

Utilisons les données de l'exemple 111a. En partant de ces données, trouvons l'amplitude du premier harmonique de tension aux bornes de la capacité:

$$U_{C1m} = 217,5\ V.$$

Par conséquent,

$$\omega L I_{1m} = U_{C1m} = 217{,}5\ V.$$

d'où il résulte

$$L = \frac{217{,}5}{0{,}01845 \cdot 3140} = 3{,}76\ H.$$

La force électromotrice

$$E_1 = I_1 R = \frac{0{,}01845}{\sqrt{2}} \cdot 2000 = 26{,}2\ V.$$

Du fait qu'il n'existe pas de courant continu dans ce circuit, la composante continue de la tension aux bornes du condensateur U_{C0} est égale à la F.E.M. E_0.

Le diagramme vectoriel pour le régime de résonance suivant le premier harmonique dans le circuit de la fig. 284, *a* est représenté sur la fig. 284, *b*. Du fait qu'on ne tient pas compte des pertes dans le condensateur, la tension aux bornes de ce dernier est en retard exactement de 90° sur le courant.

Lorsque nous avons examiné au § 207 les caractéristiques d'une inductance non linéaire contrôlable, discuté aux §§ 240—244, les propriétés essentielles des schémas à ferrorésonance et étudié au § 246 un amplificateur magnétique et un stabilisateur de tension au § 245, nous avons considéré l'inductance non linéaire comme parfaite; autrement dit, nous n'avons pas tenu compte des pertes dans son noyau, ni de la présence d'un flux de fuites et d'une chute de tension dans la résistance active de l'enroulement lui-même.

Ceci a été fait sciemment pour que les propriétés essentielles des circuits et dispositifs énumérés ne soient pas masqués par les facteurs mentionnés ci-dessus.

Maintenant nous allons procéder à l'étude d'un diagramme vectoriel d'une résistance non linéaire en tenant compte de tous les facteurs précédemment omis.

§ 249. Diagramme vectoriel d'une inductance non linéaire. Une inductance non linéaire est représentée sur la fig. 285, *a*. Soit R la résistance active propre de son enroulement w.

Le courant circulant dans cet enroulement crée un flux magnétique dans le noyau. La plus grande partie de ce flux, le flux Φ_m, se ferme le long du noyau et sa partie restante, le flux Φ_s, se ferme dans l'air. Le flux Φ_m est appelé flux principal et le flux Φ_s — flux de fuite.

Habituellement le flux Φ_s n'est que de quelques pour-cent du flux Φ_m. Cependant, peuvent exister des régimes de fonctionnement, pour lesquels le flux Φ_s devient commensurable avec le flux Φ_m. Ces régimes peuvent avoir lieu lorsque le noyau se trouve pratiquement saturé ou lorsqu'il comporte un entrefer δ relativement grand.

En construisant le diagramme vectoriel remplaçons le courant non sinusoïdal et le flux non sinusoïdal existant en réalité, par des grandeurs sinusoïdales équivalentes.

Le rapport du flux magnétique total de fuite à travers w $\psi_s = w\Phi_s$ au courant I, appelé inductance de fuites, est désigné par L_s:

$$L_s = \frac{\psi_s}{I} = \frac{w\Phi_s}{I}. \tag{9.66}$$

La réactance inductive $X_s = \omega L_s$, est appelée réactance inductive de fuite.

Le schéma équivalent d'une inductance non linéaire est représenté sur la fig. 285, *b*. Il diffère du schéma de la fig. 230, *a* par l'adjonction de la réactance de fuites X_s. La résistance active R de l'enroulement w et la réactance inductive de fuite X_s sont intercalées dans la partie non ramifiée du circuit.

Deux branches existent dans la partie *cb* du circuit. La branche droite est constitutée par l'inductance non linéaire idéalisée, parcourue par le courant magnétisant I_μ. La branche gauche est constituée par une résistance active, les pertes dans laquelle sont égales aux pertes

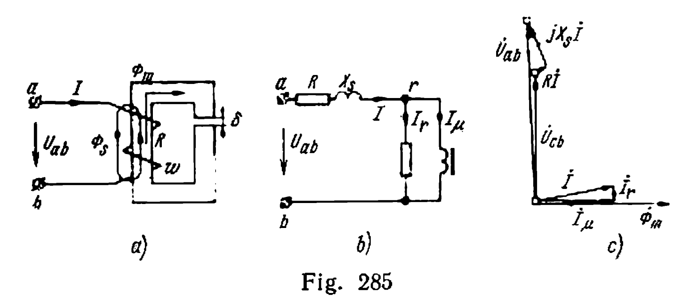


Fig. 285

P_r par hystérésis et courants de Foucault dans le noyau de l'inductance non linéaire. La branche gauche est parcourue par le courant

$$I_r = \frac{P_r}{U_{cb}} . \tag{9.67}$$

La fig. 285, *c* représente le diagramme vectoriel d'une inductance non linéaire, construit conformément au schéma de la fig. 285, *b*. Ce diagramme vectoriel est établi comme pour les circuits linéaires habituels.

Commençons sa construction par celle du flux $\dot\Phi_m$.

Les deux flux ($\dot\Phi_m$ et $\dot\Phi_s$) traversent l'enroulement w de la fig. 285, *a* et y induisent une F.E.M. d'auto-induction.

La tension $\dot U_{cb}$, aux bornes de l'inductance non linéaire idéalisée est au signe près, égale, à la F.E.M. d'auto-induction, engendrée dans l'enroulement w du circuit de la fig. 285, *a* sous l'effet du flux principal $\dot\Phi_m$:

$$U_{cb} = j\omega w \frac{\dot\Phi_m}{\sqrt{2}} .$$

La division de $\dot\Phi_m$ par $\sqrt{2}$ s'explique par remplacement de la valeur d'amplitude du flux par sa valeur efficace. La tension $\dot U_{cb}$ est en avance de 90° sur le flux $\dot\Phi_m$.

Le courant $\dot{I}_\mu$ est le courant circulant dans l'inductance idéalisée (c'est-à-dire dans l'inductance dont le noyau ne donne pas lieu à des pertes d'énergie). Il est en retard de 90° sur la tension $\dot{U}_{cb}$ et est en phase avec le flux $\dot{\Phi}_m$. Le courant $\dot{I}_r$ est en phase avec la tension $\dot{U}_{cb}$. Nous indiquerons dans le paragraphe suivant la manière de calculer les courants $\dot{I}_\mu$ et $\dot{I}_r$.

Conformément à la première loi de Kirchhoff $\dot{I} = \dot{I}_\mu + \dot{I}_r$.

La tension $\dot{U}_{ab}$ à l'entrée du circuit est égale à la somme géométrique de la tension U_{cb}, de la chute de tension $\dot{I}R$ dans la résistance active et de la chute de tension $j\dot{I}X_s$ dans la réactance inductive de fuite.

Il y a lieu de rappeler que la valeur du courant I_μ et celle du courant I_r ne sont pas proportionnelles à la valeur de la tension U_{cb} et par conséquent, à celle de la tension U_{ab} à l'entrée du circuit.

En d'autres termes, si on augmente la tension U_{ab} de 1,3 fois par exemple, les courants I_μ et I_r augmentent non pas de 1,3 fois, mais davantage.

En construisant le diagramme vectoriel, nous avons supposé que la valeur de la tension U_{cb} soit connue. En partant de la tension U_{cb} nous avons calculé les courants I_μ et I_r et, ensuite, nous avons trouvé la tension U_{ab} aux bornes d'entrée de la bobine d'inductance.

Cependant, on connaît habituellement la tension U_{ab}, tandis que la tension U_{cb} est inconnue. Par conséquent, en construisant un diagramme vectoriel en partant de U_{ab} donnée, il faut commencer par voir si la tension U_{cb} peut, pour le régime étudié du circuit, différer nettement de la tension U_{ab}.

Si les chutes de tension dans les résistances R et X_s sont petites par rapport à U_{ab}, n'étant que de 3 à 8% cette dernière, par exemple, on peut en première approximation estimer que $U_{cb} \approx U_{ab}$. Si, par contre, les chutes de tension dans les R et X_s sont du même ordre que la tension U_{cb} on est obligé pour calculer la tension U_{cb} effectuer certaines opérations complémentaires, à savoir : construire des diagrammes vectoriels pour plusieurs valeurs de U_{cb}, égales par exemple à 1 ; 0,9 ; 0,8 et 0,7 de U_{ab}, pour chacune de ces valeurs U_{cb} trouver la valeur U_{ab}, qui lui correspond, et construire ensuite en partant des résultats obtenus la courbe auxiliaire $U_{cb} = f(U_{ab})$; ensuite à l'aide de cette courbe trouver U_{cb} pour une U_{ab} donnée et construire après le diagramme vectoriel cherché.

§ 250. Calcul du courant magnétisant et de la valeur du courant de pertes. Le courant I_0 et ses composantes I_μ et I_r, sont soit relevés par voie expérimentale, soit calculés par la méthode analytique.

Fig. 286

Examinons leur calcul par la méthode analytique. Soit l — longueur (en m) de la ligne magnétique moyenne dans l'acier (fig. 286), δ — longueur (en m) de l'entrefer, existant dans le circuit magnétique, B—valeur instantanée de l'induction magnétique (en T), H—valeur instantanée du champ dans le noyau (en A/m); dans ces conditions, la valeur instantanée du courant

magnétisant i (en A) est en vertu de la loi du courant total :

$$i_\mu = \frac{Hl + 0{,}8B\delta \cdot 10^6}{w_1} \qquad (9.68)$$

Portons sur le diagramme vectoriel la valeur efficace du courant magnétisant I_μ.

Pour calculer la valeur efficace du courant magnétisant il faut substituer à B dans l'expression (9.68) $B_m \sin \omega t$, où $B_m = \frac{\Phi m}{S}$; remplacer H par $\alpha \operatorname{sh} (\beta B_m \sin \omega t)$, développer le sinus hyperbolique de l'argument périodique en série de fonctions de Bessel (voir expression 9.14) et utiliser (8.11') à l'aide de laquelle on calcule la valeur efficace du courant en fonction des amplitudes de ses divers harmoniques. On obtient ainsi

$$I_\mu = \frac{\sqrt{2}\alpha l}{w_1} \sqrt{\left[-jJ_1(j\beta B_m) + \frac{0{,}8\delta\beta B_m \cdot 10^6}{2\alpha l \beta}\right]^2 +} \\ + \sqrt{+[jJ_3(j\beta B_m)]^2 + [-jJ_5(j\beta B_m)]^2 + \ldots} \qquad (9.69)$$

Si l'entrefer $\delta = 0$, (9.69) se simplifie:

$$I_\mu = \frac{\sqrt{2}\alpha l}{w_1} \sqrt{[-jJ_1(j\beta B_m)]^2 + [jJ_3(j\beta B_m)]^2 + [-jJ_5(j\beta B_m)]^2 + \ldots} \qquad (9.70)$$

A son tour, le courant I_r, dû aux pertes dans le noyau d'acier, est calculé comme quotient des pertes dans le noyau par suite des courants de Foucault et de l'hystérésis par la F.E.M., induite par le flux utile Φ_m dans l'enroulement w_1 et égale à la tension U_{cb}:

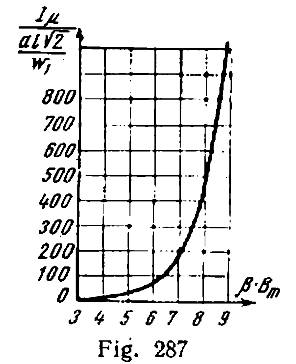


Fig. 287

$$I_r = \frac{P_f}{U_{cb}}, \qquad (9.71)$$

$$U_{cb} = \frac{\omega w_1 \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4{,}44 f w_1 \Phi_m,$$

où P_f — pertes totales dans l'acier, dues aux courants de Foucault et à l'hystérésis :

$$P_f = m p_f;$$

ici m — masse du noyau en kg;
p_f — pertes par kg du noyau.

La fig. 287 représente la courbe de la fonction $\frac{I_\mu w_1}{\sqrt{2}\alpha l} = f(\beta B_m)$, construite conformément à (9.70). A l'aide de cette courbe on trouve en fonction de βB_m et, ensuite, on calcule I_μ (w_1, α et l étant connus).

Les pertes par kilogramme de l'acier magnétique pour des inductions de 1,0 et de 1,5 T, à une fréquence de 50 Hz, sont réglementées dans la Norme soviétique GOST 802-58. Désignons par : $p_{1,0}$ — pertes par kilogramme de l'acier pour $B_m = 1T$ et $f = 50$ Hz; $p_{1,5}$ — pertes par kilogramme de l'acier pour $B_m = 1{,}5T$ et $f = 50$ Hz.

Les valeurs de $p_{1,0}$ et $p_{1,5}$ sont données au tableau suivant :

Nuance de l'acier	Epaisseur de la tôle, *mm*	$p_{1,0}$, *W/kg*	$p_{1,5}$, *W/kg*
Э41	0,5	1,6	3,6
Э42	0,5	1,4	3,2
Э43	0,5	1,25	2,9
Э41	0,35	1,35	3,2
Э42	0,35	1,2	2,8
Э43	0,35	1,05	2,5

Les pertes pour d'autres valeurs d'induction et pour des fréquences différant peu de 50 *Hz* sont calculées à l'aide de l'expression empirique suivante:

$$p_f = p_{1,0}B^n = \left(\frac{f}{50}\right)^{1,3} \ W/kg; \tag{9.71}$$

$$n = 5{,}69 \lg \frac{p_{1,5}}{p_{1,0}}.$$

§ 251. Relations essentielles pour les transformateurs à noyau d'acier. Nous avons examiné au § 116 les relations caractérisant le fonctionnement d'un transformateur pour lequel nous avons admis que le champ fût une fonction linéaire du flux dans le noyau et avons négligé les pertes dans ce noyau.

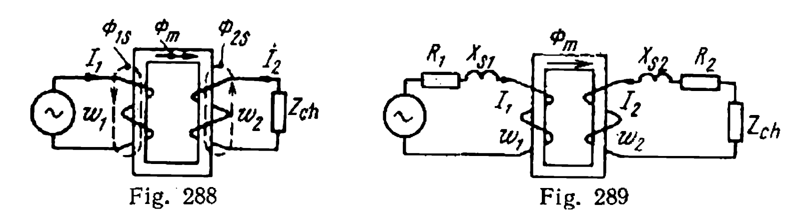


Fig. 288 Fig. 289

Pour améliorer le couplage magnétique entre les enroulements primaire (w_1) et secondaire (w_2) d'un transformateur, son noyau est exécuté en matériau ferromagnétique *.

Dans le paragraphe présent nous examinerons les relations caractérisant le fonctionnement d'un transformateur réel, dans lequel le champ est une fonction non linéaire du flux dans le noyau ferromagnétique (en acier) et en tenant compte des pertes dues à l'hystérésis et aux courants de Foucault dans le noyau.

Pour réduire le courant à vide, le noyau du transformateur est exécuté avec un entrefer aussi petit que possible, disposé perpendiculairement au flux magnétique ou sans entrefer du tout.

* Sur les fig. 288 et 289 pour plus de clarté les enroulements w_1 et w_2 sont représentés sur deux noyaux différents. En pratique on les monte habituellement sur le même noyau.

La loi de la variation du flux en fonction du champ dans un noyau n'étant pas linéaire, les courants circulant dans les enroulements du transformateur ne sont pas linéaires non plus *.

Effectuons l'analyse du fonctionnement du transformateur en remplaçant les courants et les flux non sinusoïdaux en réalité, par leurs équivalents efficaces.

Soit $\dot{I}_1$ — expression complexe de la valeur efficace du courant, circulant dans l'enroulement primaire, $\dot{I}_2$ — expression complexe de la valeur efficace du courant dans l'enroulement secondaire; Φ_m — amplitude du flux magnétique principal passant par le noyau du transformateur; il traverse les deux enroulements w_1 et w_2, y induisant une F.E.M.

Par suite de la présence de fuites, le flux $\dot{\Phi}_{1s}$, petit par rapport à $\dot{\Phi}_m$ et appelé *flux de fuites du premier enroulement*, se referme dans l'air en ne traversant que l'enroulement w_1. Un autre flux, également petit par rapport à Φ_m, appelé *flux de fuites du deuxième enroulement* Φ_{2s} se referme de même dans l'air en ne traversant que l'enroulement w_2.

On admet que le flux magnétique total traversant l'enroulement w_1 du fait du flux Φ_{1s} soit proportionnel au courant $\dot{I}_1$:

$$\dot{\psi}_{1s} = w_1\dot{\Phi}_{1s} = L_{1s}\dot{I}_s. \tag{9.72}$$

Le coefficient de proportionnalité L_{1s} entre le flux magnétique total $\dot{\psi}_{1s}$ et le courant $\dot{I}_1$ est appelé *inductance de fuites de l'enroulement primaire*; L_{1s} est fonction du nombre de spires et de l'exécution de l'enroulement.

On admet également que le flux total $\dot{\psi}_{2s}$ traversant l'enroulement w_2 et dû au flux $\dot{\Phi}_{2s}$ est proportionnel au courant du circuit secondaire $\dot{I}_2$:

$$\dot{\psi}_{2s} = w_2\dot{\Phi}_{2s} = L_{2s}\dot{I}_2. \tag{9.73}$$

Le coefficient de proportionnalité L_{2s} entre le flux magnétique total $\dot{\psi}_{2s}$, dû au flux de fuites $\dot{\Phi}_{2s}$, et au courant $\dot{I}_2$ est appelé *inductance de fuites de l'enroulement secondaire*; L_{2s} dépend du nombre de spires et de l'exécution de l'enroulement secondaire.

La réactance de l'enroulement primaire, due au flux de fuites Φ_{1s}, est désignée par X_{1s}:

$$X_{1s} = \omega L_{1s}. \tag{9.74}$$

De même on désigne la réactance de l'enroulement secondaire, due au flux de fuites Φ_{2s}, par

$$X_{2s} = \omega L_{2s}. \tag{9.75}$$

Soit R_1 — résistance active de l'enroulement primaire,
R_2 — résistance active de l'enroulement secondaire,
Z_{cs} — impédance de la charge.

* Le caractère non sinusoïdal des courants se manifeste essentiellement lors du fonctionnement en régimes proches de la marche à vide.

Sur la fig. 289 on voit le schéma du transformateur représenté sur la fig. 288, mais ici les résistances actives et les réactances inductives, dues aux flux de fuites, sont figurées séparément sous forme de résistances R_1, X_{s1}, R_2, X_{s2}. Ecrivons les équations suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour les deux circuits.

Nous avons pour le circuit primaire

$$\dot{I}_1 R_1 + jX_{s1}\dot{I}_1 + j\omega w_1 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}} = \dot{U}_1 \tag{9.76}$$

Et pour le circuit secondaire

$$\dot{I}_2 R_2 + jX_{s2}\dot{I}_2 + j\omega w_2 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}} + \dot{U}_{ch} = 0. \tag{9.77}$$

Ici $j\omega w_1 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$ est la tension numériquement égale à la F.E.M., induite dans l'enroulement w_1 par le flux principal $\dot{\Phi}_m$. La division de $\dot{\Phi}_m$ par $\sqrt{2}$ s'explique par le passage de la valeur d'amplitude à la valeur efficace. De même $j\omega w_2 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$ est la tension numériquement égale à la F.E.M. induite dans l'enroulement w_2 par le flux principal $\dot{\Phi}_m$.

Désignons le courant $\dot{I}_1$ pour la marche à vide du transformateur par $\dot{I}_0$. La force magnétomotrice du transformateur en marche à vide est égale à $\dot{I}_0 w_1$. La F.M.M. du transformateur en présence du courant $\dot{I}_2$ est égale à $\dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2$.

Les transformateurs sont construits habituellement de manière que les chutes de tension $\dot{I}_1 R_1$ et $\dot{I}_1 X_{s1}$ soient de plusieurs fois inférieures à la chute de tension $\omega w_1 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$. En tenant compte de cette remarque on peut écrire pour les transformateurs construits correctement l'équation (9.76) sous la forme suivante:

$$j\omega w_1 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}} \approx \dot{U}_1. \tag{9.76'}$$

Cette dernière équation est satisfaite à vide, comme en charge. En d'autres termes, lorsqu'on passe de la marche à vide au fonctionnement en charge, le flux Φ_m conserve une valeur pratiquement constante.

Mais si pour ces deux régimes Φ_m a la même valeur, les F.M.M., auxquelles il est dû, doivent être de même égales en ces deux régimes, c'est-à-dire

$$\dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2 = \dot{I}_0 w_1 \tag{9.78'}$$

On obtient ensuite, en divisant les deux membres de cette égalité par w_1:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_0 + \dot{I}_2', \tag{9.78}$$

où

$$\dot{I}_2' = -\dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1}$$

Ainsi le courant $\dot{I}_1$, dans le circuit primaire, peut être représenté comme la somme géométrique de deux courants: du courant en marche à vide $\dot{I}_0$ et du courant $\dot{I}'_2$. On appelle le courant $\dot{I}'_2$ le courant réduit (au nombre de spires de l'enroulement primaire) secondaire. Il est égal numériquement au courant I_2, réduit dans le rapport $\frac{w_2}{w_1}$.

En outre, pour des transformateurs correctement conçus, les chutes de tension $\dot{I}_2R_2$ et $\dot{I}_2X_{s2}$ sont faibles par rapport à $\omega w_2 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$; par conséquent, on peut déduire approximativement de (9.77)

$$j\omega w_2 \frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}} \approx -\dot{U}_{ch}. \qquad (9.79)$$

Si on divise membre à membre (9.76′) par (9.79) et si on passe aux modules, on obtient:

$$\frac{U_1}{U_{ch}} \approx \frac{w_1}{w_2} \qquad (9.80)$$

c'est-à-dire que le rapport de la tension à l'entrée d'un transformateur à la tension à sa sortie (aux bornes de la charge) est approximativement égal au rapport du nombre de spires de l'enroulement primaire au nombre de spires de l'enroulement secondaire.

Dans les transformateurs correctement construits et pour une charge voisine de la nominale, le courant I_0 n'est que de 1 à 10% du courant I_1; par conséquent, l'expression (9.78) peut être approximativement écrite comme suit:

$$\dot{I}_1 w_1 \approx -\dot{I}_2 w_2.$$

Le rapport approximatif suivant existe entre les modules des courants I_1 et I_2 pour une charge voisine de la nominale:

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{w_2}{w_1}. \qquad (9.81)$$

En d'autres termes, le courant I_1 est pratiquement proportionnel au courant I_2.

Cette proportionnalité n'est pas rigoureuse du fait du courant à vide I_0.

Une énergie est dégagée dans les résistances actives du circuit secondaire. Cette énergie est transférée par le flux magnétique du circuit primaire au circuit secondaire et doit être compensée par la source d'alimentation du transformateur.

§ 252. Diagramme vectoriel d'un transformateur à noyau d'acier. Le diagramme vectoriel du transformateur à charge inductive est représenté sur la fig. 290, *a*

$$Z_{ch} = R_{ch} + jX_{ch}.$$

Commençons la construction du diagramme par le courant $\dot{I}_2$ en l'orientant d'une manière arbitraire. Traçons le vecteur de tension aux

bornes de la charge $\dot{U}_{ch}$ sous un angle φ_{ch} – arc tg $\frac{X_{ch}}{R_{ch}}$ par rapport au vecteur courant. Ajoutons à $\dot{U}_{ch}$ les vecteurs $\dot{I}_2R_2$ * et $\dot{I}_2jX_{s2}$. La somme des chutes de tension dans le circuit secondaire est nulle. Ceci permet de construire le vecteur $j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$. Construisons ensuite le vecteur $\dot{\Phi}_m$ (qui est en retard de 90° sur le vecteur $j\omega w_2\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$).

Il existe dans le noyau du transformateur, de même que dans le noyau d'une inductance non linéaire, des pertes dues à l'hystérésis et

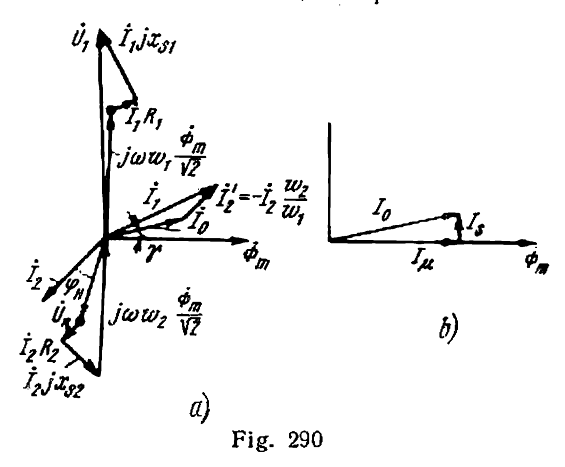


Fig. 290

aux courants de Foucault. Grâce à ceci le courant à vide $\dot{I}_0$ est la somme géométrique du courant magnétisant $\dot{I}_\mu$ et du courant de pertes $\dot{I}_p$ (fig. 290, *b*):

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_\mu + \dot{I}_p.$$

Le courant $\dot{I}_\mu$ est en phase avec le flux $\dot{\Phi}_m$ et le courant $\dot{I}_p$ est en avance de 90° sur ce flux.

On calcule les courants I_μ et I_p de même que pour une inductance non linéaire.

Le courant de marche à vide $\dot{I}_0$ est en avance d'un certain angle γ sur le flux $\dot{\Phi}_m$.

Conformément à (9.78), le courant $\dot{I}_1$ est égal à la somme géométrique du courant $\dot{I}_0$ et du courant $\dot{I}_2' = -\dot{I}_2\frac{w_2}{w_1}$. La somme géométrique des chutes de tension $\dot{I}_1R_1$, $\dot{I}_1jX_{s1}$ et $j\omega w_1\frac{\dot{\Phi}_m}{\sqrt{2}}$ donne la tension à l'entrée du circuit primaire $\dot{U}_1$.

* Sur la fig. 290, *a* le vecteur $\dot{I}_2R_2$ doit être parallèle au vecteur $\dot{I}_2$.

Afin de faciliter la lecture de la fig. 290, *a*, nous n'avons pas respecté en la traçant les rapports réels entre les modules des tensions ainsi que entre les modules des courants.

Exemple 119. Soit un transformateur élévateur dont le noyau est fait en acier pour transformateur Э41 (épaisseur des tôles 0,5 *mm*). La courbe d'aimantation est $H = 0{,}71 \operatorname{sh}(5{,}75B)$. Le noyau est exécuté en plaques ayant la forme d'anneaux et ne comportant pas d'entrefer, $w_1 = 250$, $w_2 = 1750$; $S = 2{,}2\ cm^2$; $l = 25\ cm$. En négligeant R_1 et X_{s1} calculer le courant de marche à vide I_0 pour $U_1 = 15\ V$ et $f = 50\ Hz$.

Solution. $B_m = \dfrac{U}{4{,}44\, f w_1 S} = 1{,}22\ T$.

Calculons le produit $\beta B_m = 5{,}75 \cdot 1{,}22 = 7{,}02$. Trouvons sur la courbe de la fig. 287 pour $\beta B_m = 7{,}02$

$$\frac{w_1 I_\mu}{\alpha l \sqrt{2}} = 185.$$

Mais

$$\frac{\alpha l \sqrt{2}}{w_1} = \frac{0{,}71 \cdot 0{,}25 \sqrt{2}}{250} = 10^{-3}.$$

Par conséquent, $I_\mu = 185 \cdot 10^{-3} = 0{,}185\ A$. La masse du noyau $m = 7{,}8\ g/cm^3 \cdot 2{,}2\ cm^2 \cdot 25\ cm = 0{,}428\ kg$. Nous trouvons à partir des tables $p_{1,0} = 1{,}6\ W/kg$, $p_{1,5} = 3{,}6\ W/kg$:

$$n = 5{,}69 \lg \frac{3{,}6}{1{,}6} \approx 1{,}13.$$

Les pertes spécifiques dans l'acier pour $B_m = 1{,}22\ T$:

$$p_f = 1{,}6 \cdot 1{,}22^{1{,}13} \cdot 1 = 2{,}1\ W/kg.$$

Les pertes dans un noyau ayant une masse de 0,428 *kg*

$$P_f = 0{,}428 \cdot 2{,}1 = 0{,}9\ W.$$

Le courant dû aux pertes dans l'acier $I_f = \dfrac{P_f}{U_1} = \dfrac{0{,}9}{15}$ 0,06 A. Le courant à vide I_0 est pratiquement égal au courant I_μ.

Exemple 120. Une charge de caractère inductif $Z_{ch} = 300 + j300\ \Omega$ est branchée à l'enroulement secondaire du transformateur de l'exemple précédent. En négligeant les résistances actives et les inductances de fuites des enroulements trouver le courant $\dot{I}_1$.

Solution. Orientons le flux $\dot{\Phi}_m$ suivant l'axe des valeurs réelles (fig. 290, *a*). Tension aux bornes de la charge $U_2 = U_1 \dfrac{w_2}{w_1} = 15 \cdot \dfrac{1750}{250} = 105\ V$

Tension complexe $\dot{U}_2 = 105\ e^{-j\,90^\circ}\ V$.

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_{ch}} = \frac{105 e^{-j90^\circ}}{423 e^{j45^\circ}} = 0{,}248 e^{-j135^\circ} = 0{,}176 - j0{,}176\ A.$$

Courant réduit

$$\dot{I}'_2 = -\dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1} = 1{,}23 + j\,1{,}23\ A.$$

Le courant cherché est ainsi égal à

$$\dot{I} = \dot{I}_0 + \dot{I}'_2 = 0{,}185 + j0{,}06 + 1{,}23 + j1{,}23 = 1{,}92 e^{j42^\circ 20'}\ A.$$

CHAPITRE X

PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES DANS LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES LINÉAIRES

§ 253. **Introduction.** Jusqu'ici nous nous sommes bornés au calcul et à l'étude des propriétés des circuits électriques à courant continu, sinusoïdal et périodique non sinusoïdal. Nous n'avons pas examiné encore la manière dont s'établit un régime dans un circuit lors de branchement et de débranchement de sources de F.E.M., ni les lois de la transition d'un régime à un autre, lorsque les paramètres du circuit varient, ou lors qu'on met en et hors circuit les diverses branches d'un circuit, ou par suite de courts-circuits et d'autres phénomènes similaires.

Nous étudierons les phénomènes dits transitoires au chapitre présent. On appelle *phénomènes transitoires*, les phénomènes de transition d'un régime d'un circuit électrique (régime périodique en général) à un autre régime (également périodique en général, qui diffère en quoi que ce soit du régime précédent; cette différence peut se rapporter par exemple à la valeur de l'amplitude, de la phase, de la forme ou de la fréquence de la F.E.M. agissant dans le circuit, aux valeurs des paramètres du circuit, ainsi qu'à la configuration de ce dernier.

a)   b)

Fig. 291

Les régimes périodiques qu'on rencontre habituellement sont le régime à courant sinusoïdal, le régime à courant continu, de même que le régime d'absence de courant dans les branches du circuit.

Les régimes transitoires sont dus aux « commutation » dans les circuits. On appelle « commutation » l'action d'ouverture ou de fermeture des interrupteurs à couteaux ou autres, existant dans le circuit.

La manœuvre exécutée par l'interrupteur est indiquée par une flèche sur les figures. Ainsi, l'opération de fermeture d'un interrupteur est indiquée en général sur les schémas conformément à la fig. 291, *a*, tandis que l'opération d'ouverture d'un interrupteur est indiquée conformément à la fig. 291, *b*.

Les phénomènes transitoires sont en général des phénomènes se déroulant très rapidement: leur durée est de l'ordre de dixièmes, de centièmes et parfois même de millioniémes de seconde; on ne rencontre que rarement des phénomènes transitoires dont la durée est de l'ordre d'une seconde ou des dizaines de secondes. Néanmoins, l'étude des phénomènes transitoires est très importante, car elle permet de mettre en évidence les surtensions éventuelles dans les différents tronçons du circuit, ces surtensions pouvant être dangereuses pour l'isolement de l'installation; elle permet également de se rendre compte des augmentations éventuelles des amplitudes de courant, pouvant dépasser des dizaines de fois l'amplitude du courant du phénomène périodique permanent.

L'étude des phénomènes transitoires permet également de résoudre les problèmes tels que la déformation de la forme et de l'amplitude des signaux lorsqu'ils circulent dans les amplificateurs, filtres ou autres dispositifs radiotechniques.

§ 254. Un problème concernant un phénomène transitoire dans un circuit linéaire quelconque à paramètres localisés se ramène à la solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants *. Ecrivons les équations suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour le circuit de la fig. 292, l'interrupteur étant fermé. La somme des chutes de tension dans l'inductance L et dans la résistance R est égale à la F.E.M. E:

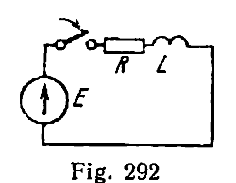


Fig. 292

$$u_L + Ri = E,$$

ou

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E. \qquad (10.1)$$

Une équation contenant une fonction inconnue (i dans notre cas) et ses dérivées ($L\frac{di}{dt}$ dans le cas présent) est appelée équation différentielle.

Ainsi, le problème de calcul de courant considéré comme une fonction du temps n'est en réalité qu'un problème de solution d'une équation différentielle.

Nous avons appris au cours de mathématiques que la solution d'une équation différentielle n'est autre chose que la recherche d'une fonction, satisfaisant à cette équation différentielle. La substitution de cette fonction et de ses dérivées dans l'équation différentielle la transforme en une identité.

Les équations différentielles linéaires seront résolues dans ce chapitre par les trois méthodes suivantes: classique, opérationnelle et par celle utilisant l'intégrale de Duhamel.

Avant d'aborder l'étude de ces méthodes, il y a lieu d'examiner les propriétés communes des circuits linéaires au cours des phénomènes transitoires, ainsi que les lois générales qui régissent les phénomènes transitoires dans les circuits électriques linéaires.

Les §§ 255—278 sont consacrés à l'étude de toutes ces questions.

Les problèmes examinés aux §§ 255—278 concernent l'ensemble des méthodes de calcul des phénomènes transitoires énumérées ci-dessus; toutefois, une partie de ces paragraphes (§§ 255, 261, 263, 264, et 265) doivent être considérés également comme *introduction à la méthode classique de calcul des phénomènes transitoires.*

§ 255. Composantes forcées et libres des courants et des tensions. Il a été indiqué également au cours de mathématiques que l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution complète de l'équation homogène dite aussi sans second membre.

---

* Nous avons en vue les circuits à paramètres R, L, C, M invariables dans le temps.

La solution particulière de l'équation (10.1) est égale à $\frac{E}{R}$ (E — F.E.M. continue).

On obtient une équation homogène en annulant le second membre de l'équation initiale. Dans notre cas particulier

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0. \qquad (10.2)$$

La solution de l'équation homogène est une fonction exponentielle de la forme Ae^{pt}.

Convenons de considérer pour tous les phénomènes transitoires comme origine de temps ($t=0$) le moment de la commutation.

A et p sont certaines constantes, indépendantes du temps. Donnons leurs valeurs pour l'exemple considéré, sans les établir:

$$A=-\frac{E}{R} \text{ et } p=-\frac{R}{L}.$$

Par conséquent, la solution de l'équation (10.1) peut être écrite comme suit:

$$i=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (10.3)$$

Ici le terme $\frac{E}{R}$ est la solution particulière de l'équation non homogène (10.1), tandis que le terme $-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ est la solution générale de l'équation homogène (10.2). En substituant (10.3) dans (10.1), nous obtenons l'identité:

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)+R\left(\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)=$$

$$=-L\frac{E}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}+E-Ee^{-\frac{R}{L}t}=E.$$

Par conséquent, (10.3) est en effet la solution de l'équation (10.1).

Appelons la solution particulière de l'équation différentielle non homogène composante *forcée* du courant (ou de la tension, respectivement) et considérons la solution générale de l'équation homogène comme composante *libre* (propre).

Ainsi pour l'exemple examiné la composante forcée du courant est égale à $\frac{E}{R}$ et sa composante libre est $-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$. Afin de savoir quel est le courant dont on parle (total, forcé ou libre), affectons l'indice f à la composante forcée, l'indice l à la composante libre et laissons la valeur totale sans indice. Nous aurons ainsi

$$i=i_f+i_l.$$

En plus des indices f et l, les courants et les tensions peuvent avoir d'autres indices complémentaires, correspondant aux numéros des branches du circuit.

La composante forcée du courant ou de la tension est au point de vue physique la composante, qui varie à la même fréquence que la F.E.M. agissant, dans le circuit. Ainsi, si le circuit subit l'action d'une F.E.M. sinusoïdale à fréquence ω, la composante forcée d'un courant ou d'une tension quelconques dans ce circuit sont respectivement un courant sinusoïdal ou une tension sinusoïdale de fréquence ω.

Les composantes forcées dans un circuit à courant sinusoïdal sont calculées à l'aide de la méthode symbolique (voir chapitre V). Si une source de F.E.M. continue agit dans le circuit (comme, par exemple, dans le circuit de la fig. 292), le courant forcé est un courant continu et il peut être calculé à l'aide des méthodes étudiées au premier chapitre.

Il ne faut pas perdre de vue que le courant continu ne peut circuler à travers une capacité et, par conséquent, la composante forcée du courant à travers une capacité dans les circuits à sources de F.E.M. continue est nécessairement nulle. En outre, rappelons que la chute de tension aux bornes d'une inductance, due à un courant qui ne varie pas en fonction du temps, est également nulle, ce qui est parfaitement évident.

Dans tous les circuits électriques linéaires les composantes libres des courants et des tensions sont amorties en fonction du temps suivant la loi exponentielle e^{pt}. Ainsi, dans l'exemple examiné ci-dessus

$$i_l = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Lorsque le temps t croît, le facteur $e^{-\frac{R}{L} t}$ décroît rapidement. La composante « libre » est appelée ainsi car cette composante est la solution d'une équation indépendante de la force agissante (d'une équation sans second membre).

Parmi les trois courants (total, forcé et libre) et les trois tensions (totale, forcée et libre) le courant total et la tension totale jouent le rôle le plus important.

Le courant total est le courant qui circule *en réalité* dans telle ou autre branche du circuit pendant le phénomène transitoire. On peut le mesurer et l'enregistrer sur un oscillogramme. De même la tension totale, c'est la tension qui existe en réalité entre certains points du circuit électrique au cours d'un phénomène transitoire. Elle peut être également mesurée et enregistrée sur un oscillogramme.

En ce qui concerne les composantes forcées et libres des courants et des tensions au cours d'un phénomène transitoire, ces composantes ne jouent qu'un rôle auxiliaire; ce sont des éléments utilisés dans *les calculs* et dont la somme donne les valeurs réelles.

Les deux considérations fondamentales suivantes sont toujours respectées, quels que soient les phénomènes transitoires ou permanents étudiés: le courant dans une inductance et la tension aux bornes d'une capacité ne peuvent varier brusquement (par sauts). Examinons ces affirmations.

§ 256. **Le courant dans une inductance et la tension aux bornes d'une capacité ne peuvent varier brusquement (par sauts)** *. Utilisons le schéma de la fig. 292 pour démontrer que le courant dans une inductance ne peut varier brusquement. Ecrivons, conformément à la deuxième loi de Kirchhoff

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E.$$

Le courant i et la F.E.M. E ne peuvent avoir que des valeurs finies (mais non pas des valeurs infiniment grandes).

Supposons que le courant i puisse varier par sauts. Le saut du courant indique que pendant un intervalle de temps infiniment petit Δt, qui tend vers zéro, le courant a varié d'une valeur finie Δi. On a alors $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta i}{\Delta t}=\infty$. Si on remplace $L\frac{di}{dt}$ dans l'équation (10.1) par ∞, le premier membre de l'équation n'est plus égal au second et la deuxième loi de Kirchhoff n'est plus satisfaite.

Par conséquent, la possibilité d'une discontinuité du courant à travers une inductance est en contradiction avec la deuxième loi de Kirchhoff.

L'impossibilité d'un saut du courant, dans une inductance L, découle également des considérations énergétiques. En effet, si on admet que le courant dans L puisse varier par sauts, l'énergie accumulée dans le champ magnétique de la bobine d'inductance (Δw_M) varie par sauts également. Une augmentation finie d'énergie du champ magnétique Δw_M peut être représentée sous forme de produit de la puissance de la source d'énergie P par le temps Δt, au cours duquel cette augmentation a eu lieu. Il en découle que

$$P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta w_M}{\Delta t}=\infty.$$

Cependant, aucune source d'énergie ne peut céder au circuit une puissance infiniment grande.

Le courant circulant dans L ne peut varier par sauts, mais la tension aux bornes de l'inductance, égale à $L\frac{di}{dt}$ peut varier par sauts. Ceci ne contredit pas la deuxième loi de Kirchhoff et les considérations énergétiques.

La démonstration du fait que *la tension aux bornes d'une capacité ne peut varier par sauts* va être faite par une méthode analogue à celle utilisée dans la démonstration précédente.

Rapportons-nous au circuit le plus simple comprenant une capacité (fig. 293, *a*). Ecrivons pour ce circuit l'équation suivant la deuxième loi de Kirchhoff:

$$Ri+u_C=E.$$

---

* Ils ne peuvent varier que continûment, sans sauts brusques.

Dans cette équation E — F.E.M. de la source, et, par conséquent, une valeur finie, u_C — tension aux bornes de la capacité.

Du fait que

$$i = C\frac{du_C}{dt},$$

on a

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E. \tag{10.4}$$

Si on admet que la tension u_C puisse varier par sauts, $\frac{\Delta u_c}{\Delta t} \approx \frac{du_c}{dt} = \infty$, et le premier membre de l'équation (10.4) n'est pas égal à son second membre. Il en découle que la possibilité d'une variation par sauts de la tension aux bornes d'une capacité contredit la deuxième loi de Kirchhoff.

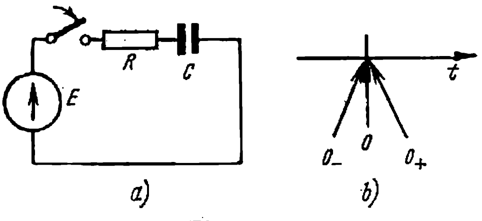


Fig. 293

On peut aussi démontrer que l'hypothèse de la possibilité d'un saut de u_C contredit également les considérations énergétiques *.

Cependant, le courant circulant dans la capacité, égal à $C\frac{du_c}{dt}$, peut varier par sauts; ceci ne contredit pas la deuxième loi de Kirchhoff, ni les considérations énergétiques.

Deux lois de commutation découlent des deux considérations fondamentales exposées ci-dessus.

§ 257. Première loi de commutation. Le courant circulant dans une inductance quelconque immédiatement avant l'instant de la commutation, et que nous désignerons $i_L(0_-)$, est égal au courant circulant dans la même inductance immédiatement après la commutation, désigné $i_L(0_+)$, autrement dit

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) \tag{10.5}$$

Le temps $t = 0_-$ est le temps immédiatement avant la commutation, tandis que $t = 0_+$ est le temps immédiatement après la commutation (fig. 293, *b*). L'égalité (10.5) exprime la première loi de commutation.

§ 258. Deuxième loi de commutation. Désignons par $u_c(0_-)$ la tension aux bornes d'une capacité immédiatement avant la commutation et par $u_C(0_+)$ la tension aux bornes de cette capacité immédiatement après la commutation.

Conformément à l'impossibilité d'un saut de tension aux bornes d'une capacité, écrivons:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+). \tag{10.6}$$

L'égalité (10.6) exprime la deuxième loi de commutation.

---

* Cette démonstration est faite d'une manière analogue à la démonstration de l'impossibilité du saut du courant, se basant sur des considérations énergétiques.

Avant d'aborder l'étude des méthodes de calcul des phénomènes transitoires il faut préciser certaines définitions complémentaires.

§ 259. **Que doit-on entendre par valeurs initiales de diverses grandeurs?** On appelle valeurs initiales (appelées également conditions initiales dans les ouvrages spécialisés) les valeurs des courants et des tensions dans un circuit pour $t = 0$.

Comme nous l'avons déjà dit, les valeurs des courants circulant dans les inductances et celles des tensions aux bornes des capacités immédiatement après la commutation sont toujours égales aux valeurs qu'ils avaient immédiatement avant la commutation. Quant aux autres grandeurs: tensions aux bornes des inductances, tensions aux bornes des résistances actives, courant circulant dans les capacités, courant circulant dans les résistances actives, toutes ces grandeurs peuvent varier par sauts et, par conséquent, leurs valeurs immédiatement après la commutation sont le plus souvent différentes des valeurs qu'ils avaient avant la commutation.

Par conséquent, il faut distinguer les valeurs initiales avant et après la commutation.

§ 260. **Valeurs initiales avant et après la commutation.** On appelle valeurs initiales avant la commutation celles des courants et des tensions immédiatement avant la commutation (pour $t = 0_{-}$). Les valeurs initiales après la commutation sont celles des courants et des tensions immédiatement après la commutation (pour $t = 0_{+}$).

§ 261. **Valeurs initiales indépendantes et dépendantes (après la commutation).** On peut écrire les équations suivant les lois de Kirchhoff, après la commutation qui a eu lieu dans le circuit quelconque. En partant de ces équations on peut calculer les valeurs des courants dans toutes les branches et les tensions aux bornes des tronçons quelconques du circuit pour le régime après la commutation (pour $t = 0_{+}$).

A cette fin, il faut écrire, que les valeurs des courants dans les branches comprenant des inductances et les valeurs des tensions aux bornes des condensateurs sont égales aux valeurs qu'ils avaient en régime précédant immédiatement la commutation, pour $t = 0-$, tandis que les valeurs que les autres courants et tensions ont après la commutation sont calculées en partant des équations de Kirchhoff, puisque une partie de leurs termes est connue. Nous allons appeler les valeurs des courants circulant dans les inductances et des tensions aux bornes des capacités, connues à partir du régime avant la commutation,— *valeurs initiales indépendantes.*

Les valeurs des autres courants et tensions pour $t = 0_{+}$, dans le circuit résultant de la commutation, calculées d'après les valeurs initiales indépendantes à l'aide des lois de Kirchhoff, seront appelées *valeurs initiales dépendantes.*

§ 262. **Conditions initiales nulles et non nulles.** Si à l'instant de commencement du phénomène transitoire, immédiatement avant la commutation, tous les courants et toutes les tensions dans les éléments passifs du circuit sont nuls, on dit que les *conditions initiales nulles* existent dans ce circuit. Si, par contre, au commencement du phénomène tran-

sitoire, les courants et les tensions dans le circuit ne sont pas nuls, on dit que les conditions initiales non nulles existent dans ce circuit.

A conditions initiales nulles, les courants dans les inductances et les tensions aux bornes des capacités commencent à varier à partir de zéro, et à conditions initiales non nulles ils varient à partir des valeurs qu'ils avaient immédiatement avant la commutation.

§ 263. Etablissement des équations pour les courants et les tensions libres. Pour le circuit résultant de la commutation, les équations suivant les lois de Kirchhoff pour les courants et les tensions totaux sont établies comme ceci se faisait précédemment. Pour le faire il faut commencer par désigner les courants dans les branches et choisir arbitrairement les sens positifs pour ces courants. Ecrire ensuite les équations suivant la première et la deuxième lois de Kirchhoff. Ainsi, pour le circuit de la fig. 294, nous pouvons écrire après choix des sens positifs pour les courants

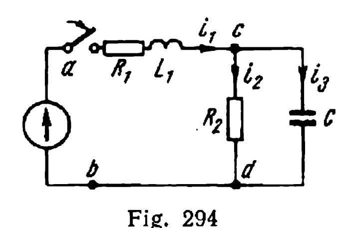


Fig. 294

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$
$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + i_2 R_2 = E;$$
$$i_2 R_2 - \frac{1}{C} \int i_3 \, dt = 0.$$

Dans ces équations i_1, i_2 et i_3 sont les courants totaux. Chacun d'eux est constitué par les courants libre et forcé. Afin de passer de ce système d'équations aux équations pour les courants libres, « libérons » le système des F.E.M. appliquées (de la F.E.M. E dans le cas considéré) et au lieu de i_1 écrivons i_{1l}; au lieu de i_2, i_{2l}, etc. Nous obtenons ainsi

$$\left. \begin{aligned} & i_{1l} - i_{2l} - i_{3l} = 0; \\ & L_1 \frac{di_{1l}}{dt} + R_1 i_{1l} + i_{2l} R_2 = 0; \\ & i_{2l} R_2 - \frac{1}{C} \int i_{3l} \, dt = 0. \end{aligned} \right\} \qquad (10.7)$$

Rappelons que pour une maille quelconque d'un circuit électrique quelconque la somme des chutes de tension dues aux composantes libres des courants est nulle.

§ 264. Forme algébrique du système d'équations pour les courants libres. Nous avons indiqué au § 255 que le courant libre est donné par la solution d'une équation différentielle homogène (équation sans son second membre).

Il a été indiqué au cours de mathématiques que la solution de l'équation différentielle homogène est écrite sous forme de fonctions exponentielles Ae^{pt}. Ainsi chaque courant libre peut être représenté sous la forme :

$$i_l = Ae^{pt}.$$

Chaque courant libre a sa constante d'intégration A, tandis que les exposants d'amortissement p sont les mêmes pour tous les courants libres.

Au point de vue physique les exposants d'amortissement sont les mêmes pour tous les courants libres parce que l'ensemble du circuit est soumis au même phénomène transitoire (commun).

Ecrivons la dérivée du courant libre:

$$\frac{di_l}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = p\,Ae^{pt} = pi_l.$$

Par conséquent, la dérivée d'un courant libre peut être remplacée par le produit pi_l, et la tension libre aux bornes d'une inductance, $L\frac{di_l}{dt}$ par Lpi_l. Trouvons l'intégrale du courant libre:

$$\int i_l\,dt = \int Ae^{pt}\,dt = \frac{Ae^{pt}}{p} = \frac{i_l}{p}.$$

Nous avons considéré que la constante d'intégration est nulle, puisque les composantes libres ne comportent pas de termes indépendants du temps.

Par conséquent, l'intégrale du courant libre peut être remplacée par $\frac{i_l}{p}$ et la tension libre aux bornes du condensateur, $\frac{1}{C}\int i_l dt$, par $\frac{i_l}{Cp}$.

Substituons dans le système d'équations différentielles des courants libres Lpi_l à $L\frac{di_l}{dt}$ et écrivons $\frac{i_l}{Cp}$ à la place de $\frac{1}{C}\int i_l dt$. Nous obtenons ainsi:

$$\left.\begin{array}{l} i_{1l} - i_{2l} - i_{3l} = 0; \\ (L_1p + R_1)\,i_{1l} + i_{2l}R_2 = 0; \\ i_{2l}R_2 - \frac{i_{3l}}{Cp} = 0. \end{array}\right\} \qquad (10.8)$$

Le système d'équations (10.8) est un système d'équations algébriques, écrites par rapport à i_{1l}, i_{2l}, i_{3l}, qui, contrairement au système initial, ne contient ni dérivées ni intégrales.

Ainsi, les équations (10.8) sont les équations différentielles des courants libres (10.7), écrites sous leur forme algébrique.

§ 265. Etablissement de l'équation caractéristique du système. Le nombre d'équations algébriques est égal au nombre des courants libres inconnus. Supposons p connu (en réalité la valeur de p n'est pas encore trouvée et sera calculée par la suite) et résolvons le système (10.8) par rapport à i_{1l}, i_{2l} et i_{3l}. Nous obtenons

$$i_{1l} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad i_{2l} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad i_{3l} = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Ici Δ — déterminant du système. Dans l'exemple considéré

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ L_1p + R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix}$$

Δ_1 est obtenu en partant du déterminant Δ du système et en substituant à sa première colonne le second membre des équations (10.8):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix}$$

Δ_2 est obtenu à partir de Δ en substituant la deuxième colonne par le second membre du système (10.8).

Puisque des zéros figurent comme secondes membres du système (10.8), l'une des colonnes sera constituée par des zéros pour chacun des déterminants.

Lorsque dans un déterminant l'une des colonnes est constituée par des zéros, on sait qu'un tel déterminant est égal à zéro. Par conséquent $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 0$; $\Delta_3 = 0$.

Il découle nettement de considérations physiques que chacun des courants libres ne peut pas être nul, car alors les lois de la commutation ne seraient pas satisfaites.

Cependant, il découle de ce qui précède

$$i_{1l} = \frac{0}{\Delta}; \quad i_{2l} = \frac{0}{\Delta}; \quad i_{3l} = \frac{0}{\Delta}.$$

Les courants libres seront non nuls, que si le déterminant Δ du système est nul:

$$\Delta = 0. \tag{10.9}$$

Dans ces conditions chacun des courants sera représenté par une indétermination:

$$i_{1l} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{0}; \quad i_{2l} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{0}; \ \ldots;$$

en levant cette indétermination on peut obtenir la valeur réelle de chacun des courants libres.

Nous ne nous occuperons pas ici à lever ces indéterminations, nous bornant à indiquer que le déterminant Δ du système d'équations sous forme algébrique est nécessairement nul.

L'équation $\Delta = 0$ est appelée *équation caractéristique*. La seule inconnue de cette équation est p. Dans l'exemple examiné, ayant développé l'équation $\Delta = 0$, nous obtenons:

$$\frac{R_2}{Cp} + R_2(L_1p + R_1) + \frac{L_1p + R_1}{Cp} = 0,$$

ou

$$\frac{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1R_2}{Cp} = 0$$

Si cette fraction est nulle, son numérateur est nul également. Par conséquent,

$$p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2 = 0. \tag{10.10}$$

Les racines de cette équation quadratique sont:

$$p_{1,2}=\frac{-(R_1R_2C+L_1)\pm\sqrt{(R_1R_2C+L_1)^2-4(R_1+R_2)R_2L_1C}}{2R_2L_1C}. \quad (10.11)$$

Nous avons indiqué tout au début du § 264 que la solution pour le courant libre est prise sous la forme Ae^{pt}. Si l'équation caractéristique a non pas une racine, mais plusieurs, n par exemple, chaque courant libre doit être pris sous la forme:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}.$$

Exemple 121. Trouver les racines de l'équation caractéristique du schéma de la fig. 294 pour les trois valeurs suivantes de C: 1) $C = 1\mu F$; 2) $C = 10\mu F$; 3) $C = 100\mu F$. $R_1 = R_2 = 100\Omega$; $L_1 = 1H$.

Solution. Pour $C = 1\mu F$

$$R_1R_2C+L_1=100\cdot 100\cdot 10^{-6}+1=1{,}01;$$
$$4(R_1+R_2)R_2L_1C=4\cdot 200\cdot 100\cdot 10^{-6}=0{,}08;$$
$$2R_2L_1C=2\cdot 100\cdot 10^{-6}=2\cdot 10^{-4};$$
$$p_{1,2}=\frac{-1{,}01\pm\sqrt{1{,}01^2-0{,}08}}{2\cdot 10^{-4}};$$
$$p_1=-250s^{-1};\quad p_2=-9850s^{-1}.$$

Pour $C=10\mu F$

$$R_1R_2C+L_1=1{,}1;\quad 4(R_1+R_2)R_2L_1C=0{,}8;$$
$$2R_2L_1C=2\cdot 10^{-3};$$
$$p_1=-230s^{-1};\quad p_2=-870s^{-1}.$$

Pour $C=100\mu F$

$$R_1R_2C+L_1=2;\quad 4(R_1+R_2)R_2L_1C=8;$$
$$2R_2L_1C=2\cdot 10^{-2};$$
$$p_1=-100+100j;\quad p_2=-100-100j.$$

§ 266. Etablissement d'une équation caractéristique à partir de l'expression pour l'impédance d'entrée d'un circuit en courant alternatif. L'équation caractéristique utilisée pour calculer p est souvent établie par un procédé plus simple que celui décrit au paragraphe précédent. A cette fin on écrit l'expression de l'impédance d'entrée d'une branche quelconque d'un circuit en courant alternatif [désignons-la par $Z(j\omega)$], on remplace dans cette expression $j\omega$ par p [on obtient ainsi $Z(p)$] et on écrit $Z(p) = 0$.

L'équation $Z(p) = 0$ coïncide toujours avec l'équation caractéristique. Assurons-nous-en sur les exemples suivants.

Exemple 122. Pour le circuit de la fig. 294 l'impédance d'entrée par rapport aux bornes *ab* est

$$Z_{ab}(j\omega)=j\omega L_1+R_1+\frac{R_2\frac{1}{j\omega C}}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}.$$

Remplaçons dans cette expression $j\omega$ par p, à la place de $Z_{ab}(j\omega)$ écrivons $Z_{ab}(p)$ et égalons à zéro:

$$Z_{ab}(p)=pL_1+R_1+\frac{R_2\frac{1}{Cp}}{R_2+\frac{1}{Cp}}=0,$$

d'où

$$\frac{p^2L_1CR_2+p(L_1+R_1R_2C)+R_1+R_2}{1+R_2Cp}=0,$$

ou

$$p^2L_1CR_2+p(L_1+R_1R_2C)+R_1+R_2=0. \qquad (10.10')$$

L'équation (10.10') correspond exactement à (10.10) établie par une méthode différente.

L'équation (10.10') a été établie en partant de l'expression pour l'impédance d'entrée de la première branche du circuit de la fig. 294, par rapport aux bornes *ab*. Nous obtenons exactement la même équation si l'expression de l'impédance d'entrée est prise pour une autre branche quelconque de ce circuit.

Exemple 123. S'assurer que l'équation (10.10) peut être obtenue en écrivant l'impédance d'entrée de la troisième branche de la fig. 294, en y remplaçant $j\omega$ par p et en annulant $Z(p)$.

Solution. Impédance d'entrée pour la troisième branche

$$Z_{cd}(j\omega)=\frac{1}{j\omega C}+\frac{R_2(R_1+j\omega L_1)}{R_2+R_1+j\omega L_1}.$$

Remplaçons-y $j\omega$ par p et annulons $Z(p)$:

$$Z_{cd}(p)=\frac{1}{pC}+\frac{R_2(R_1+pL_1)}{R_2+R_1+pL_1}=0.$$

D'où

$$p^2L_1CR_2+p(L_1+R_1R_2C)+R_1+R_2=0. \qquad (10.10'')$$

L'équation (10.10'') correspond exactement à (10.10).

§ 267. Subdivision des valeurs initiales indépendantes en valeurs essentielles et non essentielles. Il peut se trouver pour des circuits compliqués à grand nombre d'accumulateurs d'énergie que le nombre des valeurs initiales indépendantes (des conditions initiales) soit supérieur au degré de l'équation caractéristique et, par conséquent, supérieur au nombre des constantes d'intégration.

Dans ce cas on utilise pour calculer les constantes d'intégration non pas toutes les conditions initiales indépendantes, mais une partie d'elles seulement.

Convenons d'appeler conditions initiales indépendantes *essentielles* ceux des courants circulant dans les inductances et des tensions aux bor-

nes des capacités qui peuvent être donnés indépendamment des autres. Appelons *non essentielles* les autres conditions initiales indépendantes.

Pour illustrer cette subdivision, rapportons-nous au circuit de la fig. 295. Il comprend trois inductances et une capacité.

Ce circuit comporte quatre valeurs initiales indépendantes seulement (quatre conditions initiales):

$$1)\ i_1(0_+)=0;\ 2)\ i_2(0_+)=0;\ 3)\ i_3(0_+)=0;\ 4)\ u_c(0_+)=0.$$

Trois de ces valeurs sont essentielles et l'une est non essentielle. Le choix des valeurs essentielles est quelque peu arbitraire. Ainsi, si on prend comme valeur essentielle, les première, deuxième et quatrième conditions, la condition $i_3(0_+)=0$ est non essentielle. Cette condition découle automatiquement de la première loi de Kirchhoff, indépendamment de l'existence ou de l'absence d'une inductance dans la troisième branche du circuit.

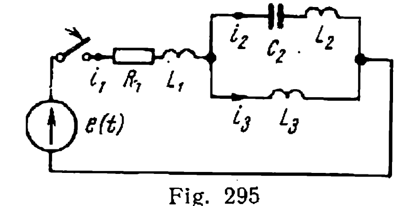


Fig. 295

Si par contre on prend comme conditions essentielles les première, troisième et quatrième conditions, c'est la deuxième condition qui devient non essentielle.

Exemple 124. S'assurer que pour le circuit de la fig. 295 l'équation caractéristique sera de troisième et non pas de quatrième degré.

Solution. Ecrivons l'expression pour l'impédance d'entrée

$$Z(p)=R_1+pL_1+\frac{\left(pL_2+\frac{1}{C_2p}\right)pL_3}{pL_2+pL_3+\frac{1}{pC_2}}=0.$$

D'où

$$(R_1+pL_1)\left[1+p^2C_2(L_2+L_3)\right]+pL_3(1+C_2L_2p^2)=0.$$

Par conséquent, l'équation caractéristique est du troisième degré.

§ 268. Comment déterminer le degré d'une équation caractéristique ? Il faut savoir déterminer rapidement le degré de l'équation caractéristique d'un circuit, rien qu'en regardant le schéma du circuit, dont on veut étudier les phénomènes transitoires. La solution rapide de cette question permet d'évaluer à priori la complexité des calculs à exécuter et de reconnaître plus facilement une erreur éventuelle dans l'établissement de l'équation caractéristique.

Le degré de l'équation caractéristique est égal au nombre des conditions initiales indépendantes essentielles dans le circuit après la commutation, une fois que ce circuit a été simplifié au maximum ; ce degré ne dépend nullement de la nature de la F.E.M. dans le circuit.

La simplification que nous venons de mentionner consiste dans le remplacement des inductances couplées en série et en parallèle par une seule inductance équivalente de même qu'on doit substituer aux capacités couplées en série et en parallèle une capacité équivalente *.

* Nous supposons qu'il n'y ait pas d'autres résistances, des résistances actives, par exemple, dans les branches comportant des capacités, que les tensions initiales aux bornes des capacités couplées en série soient inversement proportionnelles à ces capacités et que les courants initiaux circulant dans les inductances couplées en série soient les mêmes.

Ainsi, en ce qui concerne le circuit de la fig. 296, les L'_1 et L''_1, couplées en série, doivent être remplacées par $L_1 = L'_1 + L''_1 \pm 2M$, s'il existe un couplage magnétique entre elles ($M = 0$ s'il n'existe pas de couplage magnétique) et on doit substituer les capacités C'_3, C''_3 et C_4 par la capacité

$$C_5 = C_4 + \frac{C'_3 C''_3}{C'_3 + C''_3}.$$

La valeur initiale de la tension aux bornes de la capacité C_5 est égale à la valeur initiale de la tension aux bornes de C_4.

Du fait de ces simplifications, le circuit de la fig. 296 est réduit au circuit de la fig. 297. Ce dernier comprend deux inductances et une capacité et ces trois valeurs initiales indépendantes sont des valeurs essentielles. Par conséquent, l'équation caractéristique sera de troisième degré.

Deux inductances L_1 et L_2, couplées en parallèle (et ne comportant pas de résistances actives), entre lesquelles il existe une inductance

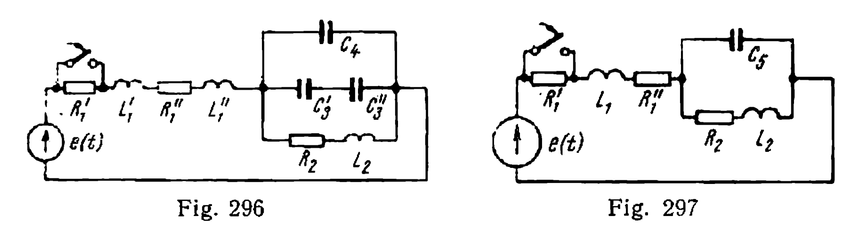


Fig. 296 Fig. 297

mutuelle M, et pour lesquelles les valeurs initiales des courants sont $i_1(0)$ et $i_2(0)$, peuvent être remplacées par l'inductance équivalente suivante:

$$L_e = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}.$$

Le signe —, figurant au dénominateur, correspond au branchement en concordance et le signe + indique le branchement en opposition. La valeur initiale du courant circulant dans L_e est égale à $i_1(0) + i(0)$.

Remarquons en conclusion que le degré de l'équation caractéristique ne dépend pas de l'existence ou de l'absence de couplage magnétique entre les inductances du circuit.

§ 269. Considérations sur les racines des équations caractéristiques. Le nombre des racines d'une équation caractéristique est égal au degré de cette équation. Lorsque l'équation caractéristique est une équation du premier degré, elle n'a qu'une seule racine, si elle est de deuxième degré, elle a deux racines, si elle est de troisième degré, elle a trois racines, etc. Une équation du premier degré a toujours une racine réelle (et non pas une racine imaginaire ou complexe).

L'équation du deuxième degré peut avoir:

a) deux racines réelles négatives différentes;

b) deux racines réelles négatives égales;

c) deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative.

Une équation du troisième degré peut avoir.

a) trois racines réelles négatives différentes;

b) trois racines réelles négatives, dont deux égales;

c) trois racines réelles négatives égales;

d) une racine réelle négative et deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative.

§ 270. **Toutes les racines réelles des équations caractéristiques sont toujours négatives, tandis que les racines complexes ont toujours leurs parties réelles négatives.** Les phénomènes transitoires libres se déroulent dans un circuit libéré des sources de F.E.M. Ces phénomènes sont décrits par des termes de la forme Ae^{pt}. Les courants libres ne peuvent circuler dans un circuit libéré des sources de F.E.M. pendant un temps indéterminé, puisqu'il n'existe pas dans ce circuit des sources d'énergie pouvant compenser les pertes par effet Joule, dues aux courants libres, pendant un temps indéterminé. En d'autres termes, les courants libres s'amortissent inévitablement.

Mais si les termes e^{pt} doivent s'amortir en fonction du temps, la partie réelle de p doit être négative.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous les valeurs numériques de la fonction exponentielle

$$e^{-at} = f(at).$$

at	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
e^{-at}	1	0,905	0,819	0,741	0,67	0,606	0,549	0,5
at	0,8	0,9	1	1,5	2	3	4	5
e^{-at}	0,45	0,406	0,368	0,223	0,135	0,05	0,018	0,0067

Examinons le caractère des variations des composantes libres au cours des phénomènes transitoires les plus simples dans les circuits à équation caractéristique du premier et deuxième degrés.

Si le nombre des racines de l'équation caractéristique est supérieur à deux, le phénomène libre peut être représenté comme la combinaison de plusieurs phénomènes les plus simples.

§ 271. **Nature du phénomène transitoire libre lorsque l'équation caractéristique n'a qu'une seule racine.** Dans ces conditions le courant libre peut être exprimé comme:

$$i_l = Ae^{-at} \tag{10.11}$$

où $p = -a$ ne dépend que des paramètres du circuit, et A est fonction des paramètres du circuit, de la F.E.M. et de l'instant d'enclenchement. Le caractère des variations de i_l pour $A > 0$ est illustré par la fig. 298.

Pendant l'intervalle de temps $t = \tau = \frac{1}{a}$ la fonction Ae^{-at} diminue de $e = 2{,}71$ fois. En effet, pour $t = \tau = \frac{1}{a}$

$$at = a\tau = a\frac{1}{a} = 1\,;$$

$$e^{-at} = e^{-a\tau} = e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2{,}71}.$$

La grandeur $\tau = \frac{1}{a} = \frac{1}{|p|}$ est appelée *constante de temps du circuit* *; τ dépend de la nature du circuit et de ses paramètres. Ainsi pour le circuit de la fig. 292 $\tau = \frac{L}{R}$, pour le circuit de la fig. 293, *a* $\tau = RC$, pour le circuit de la fig. 308 $\tau = \frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$, etc.

§ 272. Nature du phénomène transitoire libre pour une équation caractéristique à deux racines réelles différentes. Soit $p_1 = -a$ et $p_2 = -b$. Pour fixer les idées, supposons $b > a$:

$$i_l = A_1e^{-at} + A_2e^{-bt}. \qquad (10.12)$$

Le caractère de variation du courant libre pour des constantes d'intégration A_1 et A_2 de signe et valeurs différents est illustré qualitativement par les courbes en gros trait des fig. 299, *a*, *b*, *c*, *d*. Sur toutes ces figures la courbe *1* représente la fonction A_1e^{-at} et la courbe *2* — la fonction A_2e^{-bt}. La courbe résultante (en gros trait) est obtenue en additionnant les ordonnées des courbes *1* et *2*.

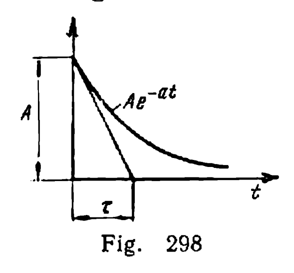


Fig. 298

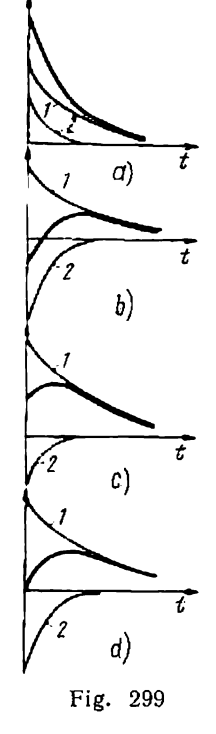


Fig. 299

Pour la fig. 299, *a* $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$.
Pour la fig. 299, *b* $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| > A_1$.
Pour la fig. 299, *c* $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| < A_1$.
Pour la fig. 299, *d* $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $|A_2| = A_1$.

* L'appellation « constante de temps » se rapporte à la constance de la valeur de la sous-tangente à l'exponentielle: la sous-tangente à l'exponentielle $e^{-\frac{t}{\tau}}$ est numériquement égale à τ.

§ 273. Nature du phénomène transitoire libre pour deux racines égales. Il a été dit au cours de mathématiques que lorsque parmi les racines d'une équation caractéristique il existe deux racines égales $p_1 = p_2 = -a$, la solution doit être prise sous la forme suivante:

$$A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt} = (A_1 + A_2 t)\, e^{-at}. \qquad (10.13)$$

Cinq courbes différentes ont été tracées sur la fig. 300. Ces courbes montrent l'allure possible de variation de la fonction $(A_1 + A_2 t)\, e^{-at}$ pour des signes différents des constantes d'intégration A_1 et A_2, ainsi que lorsqu'une des constantes est nulle.

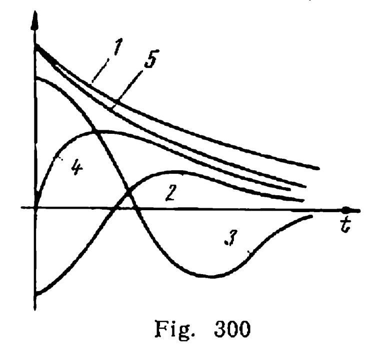


Fig. 300

Courbe *1* pour $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$.
Courbe *2* pour $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$.
Courbe *3* pour $A_1 > 0$ et $A_2 < 0$.
Courbe *4* pour $A_1 = 0$ et $A_2 > 0$.
Courbe *5* pour $A_1 > 0$ et $A_2 = 0$.

§ 274. Nature du phénomène transitoire libre pour deux racines complexes conjuguées. Les racines complexes sont toujours conjuguées deux par deux. Ainsi, si l'une des racines $p_1 = -\delta + j\omega_0$, l'autre racine est $p_2 = -\delta - j\omega_0$. On sait que le terme de la solution qui leur correspond, i_l par exemple, doit être pris sous la forme suivante:

$$i_l = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu) \qquad (10.14)$$

L'expression (10.14) décrit une oscillation sinusoïdale amortie (fig. 301). Cette oscillation a une fréquence angulaire ω_0 et une phase initiale ν. L'enveloppe de l'oscillation est déterminée par la courbe $Ae^{-\delta t}$. Le phénomène oscillatoire s'amortit d'autant plus rapidement que la valeur de δ est grande; A et ν dépendent des valeurs des paramètres du circuit, des conditions initiales et de la valeur de la F.E.M. de la source; ω_0 et δ ne dépendent que des paramètres du circuit après la commutation; ω_0 est appelé fréquence angulaire des oscillations libres; δ est le coefficient (exposant) d'amortissement.

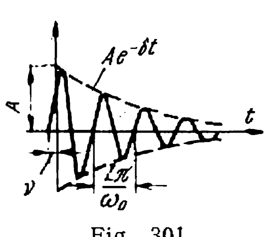


Fig. 301

§ 275. Certaines particularités des phénomènes transitoires. Nous avons déjà indiqué que la valeur totale d'une grandeur quelconque (du courant, de la tension, de la charge) est égale à la somme des composantes forcée et libre. Si parmi les racines de l'équation caractéristique il existe des racines complexes conjuguées $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$, si la valeur de la fréquence angulaire des oscillations libres ω_0 est pratiquement égale à la fréquence angulaire ω de la source de la F.E.M. sinusoïdale (de la source d'alimentation) et si enfin le coefficient d'amortissement δ est petit (circuit à pertes faibles), l'addition des composantes

forcée et libre donne une oscillation caractérisée par des battements de l'amplitude, suivant la fig. 302.

L'oscillation représentée sur la fig. 302 diffère des battements examinés au § 180 par la diminution lente de l'amplitude d'une des composantes de l'oscillation.

Si la fréquence angulaire de l'oscillation libre ω_0 est exactement égale à la fréquence angulaire de la source de la F.E.M. sinusoïdale, l'oscillation résultante a la forme représentée sur la fig. 303.

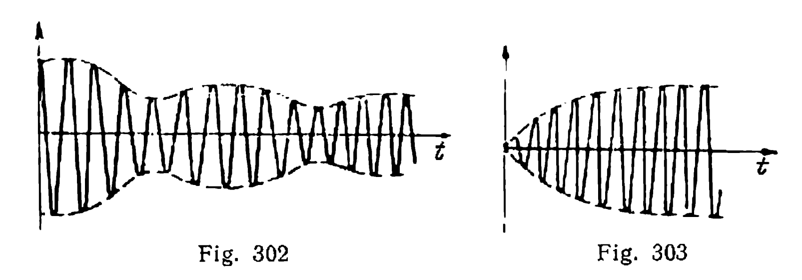


Fig. 302 Fig. 303

L'exemple le plus simple des oscillations de ce type est l'oscillation engendrée aux bornes du condensateur de la fig. 305, du fait de l'addition de l'oscillation forcée U_{Cm} cos ωt et de l'oscillation libre — $U_{Cm}e^{-\delta t}$ cos ωt:

$$U_C = U_{Cm}(1 - e^{-\delta t}) \cos \omega t.$$

L'amplitude de l'oscillation résultante croit suivant une loi exponentielle.

Lorsqu'une capacité (ou des capacités) existe dans un circuit, des pointes initiales de courant importantes, plusieurs fois supérieures à

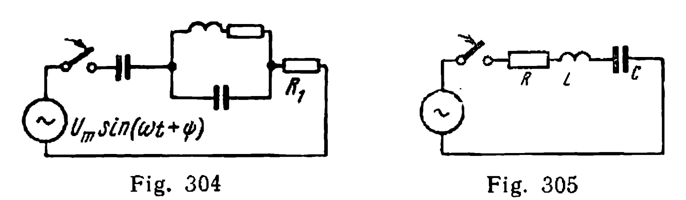


Fig. 304 Fig. 305

l'amplitude du courant en service permanent, peuvent apparaître dans ce circuit. Ainsi dans le circuit de la fig. 304, pour des conditions initiales nulles, la tension aux bornes des capacités est nulle et le courant dans la partie non ramifiée du circuit est égal à $\frac{U_m \sin \psi}{R_1}$ à l'instant suivant la fermeture de l'interrupteur. Si $\psi = 90°$, le courant immédiatement après la fermeture de l'interrupteur est égal à $\frac{U_m}{R}$. Dans les circuits inductifs des surtensions dangereuses apparaissent aux bornes de certains de leurs tronçons après ouverture des interrupteurs. Cette question sera examinée au § 277.

E x e m p l e 125. Il résulte de l'examen des oscillogrammes, que lorsqu'on branche le circuit de la fig. 305 à une source de tension sinusoïdale à fréquence angulaire $\omega = 10\,100$ *rad/s*, le phénomène transitoire est accompagné des battements de l'amplitude, conformément à la fig. 302.

La période de ces battements est égale à 0,1255*s*. L'amplitude diminue de e fois par battement. Trouver les valeurs de L et R du circuit, si on sait que $C = 1\mu F$.

S o l u t i o n. Désignons comme auparavant par ω_0 la fréquence angulaire des oscillations propres. La fréquence des battements sera alors, conformément au § 180,

$$\omega_b = \frac{\omega - \omega_0}{2} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}1255} = 50 \ rad/s \ *.$$

Par conséquent,

$$\omega_0 = \omega - 2\omega_b = 10^4 \ rad/s.$$

D'après les conditions imposées, l'amplitude de l'oscillation résultante diminue de e fois pendant le temps $T = 0{,}1255$ *s*. Par conséquent, $e^{-\delta t} = e^{-1}$, ou

$$\delta = \frac{1}{0{,}1255} = 7{,}97 \ s^{-1}.$$

En résolvant l'équation caractéristique pour le circuit de la fig. 305, on obtient:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{4LC - (RC)^2}}{2LC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \delta^2,$$

où

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

D'où

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 + \delta^2 \approx 10^8 \text{ et } L = \frac{1}{C \cdot 10^8} = 0{,}01 \ H;$$

$$R = \delta \cdot 2L = 7{,}97 \cdot 0{,}02 = 0{,}159 \ \Omega.$$

§ 276. Phénomènes transitoires donnant lieu à l'amorçage d'un arc. Si le phénomène transitoire est dû à l'ouverture d'un interrupteur intercalé dans un circuit électrique comprenant des inductances, un arc peut s'amorcer dans certaines conditions entre le contact fixe et le couteau de l'interrupteur. Lorsqu'on a affaire à un tel arc, le calcul du phénomène transitoire devient très difficile et ne peut être fait par les méthodes exposées dans le présent chapitre. Ceci s'explique par la non-linéarité de la résistance de l'arc en fonction du courant qui y circule. On peut alors, si on connaît la caractéristique courant-tension de l'arc, utiliser pour le calcul des phénomènes transitoires les méthodes exposées dans l'appendice *C*.

---

* L'expression pour ω_b a été établie au § 180 dans l'hypothèse que les amplitudes A_1 et A_2 des deux oscillations à additionner sont constantes (ne varient pas en fonction du temps). Nous admettons ici que cette expression soit approximativement vraie, même lorsque l'amplitude de l'une des oscillations, de l'amplitude A_1, par exemple, ne varie que très lentement en fonction du temps $\left(\frac{dA_1}{dt} \ll \omega A_1\right)$.

Exemple 126. Examiner l'éventualité de l'amorçage d'un arc (des étincelles), lors de l'ouverture de l'interrupteur intercalé dans le circuit de la fig. 306.

Solution. Avant l'ouverture de l'interrupteur le régime permanent suivant existait dans ce circuit

$$i(0_-)=\frac{E}{R+\frac{R}{2}}=\frac{2}{3}\frac{E}{R};\quad i_2(0_-)=\frac{i(0_-)}{2}=\frac{1}{3}\frac{E}{R}.$$

Supposons que l'arc ne s'amorce pas, si l'ouverture de l'interrupteur est suffisamment lente. Dans ces conditions le courant i_1 tombe instantanément à zéro, tandis que le courant $i(0_+)$ doit être égal à $i_2(0_+)$. Mais ceci ne peut avoir lieu en réalité, car aucun de ces courants (i et i_2) ne peut varier brusquement, conformément à la première loi de commutation.

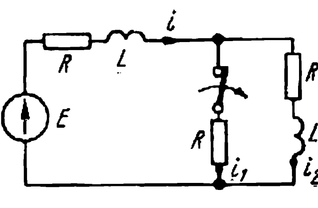


Fig. 306

Par conséquent, on peut s'attendre à ce que, lorsque l'ouverture des couteaux de l'interrupteur est suffisamment lente, un arc (des étincelles) peuvent apparaître dans certaines conditions déterminées.

§ 277. Surtensions dangereuses dues à la rupture des branches des circuits comprenant des inductances. Des tensions très supérieures à celles établies peuvent apparaître dans certains tronçons des circuits électriques, comprenant des inductances importantes, lors de l'ouverture des interrupteurs intercalés dans ces circuits. On appelle surtensions les tensions de valeur supérieure à celles établies en service permanent. Ces surtensions peuvent être tellement importantes qu'elles provoquent le percement de l'isolement et la mise hors service de l'appareillage de mesure.

Exemple 127. Examinons l'exemple numérique suivant.

Un voltmètre (fig. 307) est branché aux bornes d'une bobine d'inductance $R = 100\ \Omega$, $L = 10\ H$. Résistance du voltmètre: $R_V = 3\ 000\ \Omega$; $E = 100\ V$. Trouver la tension aux bornes du voltmètre pour $t = 0$, en admettant que l'ouverture de l'interrupteur ait eu lieu instantanément et qu'il n'y ait pas eu d'arc.

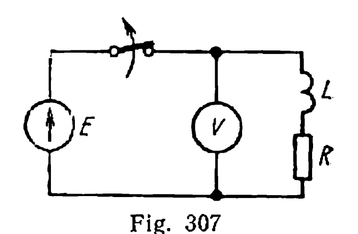


Fig. 307

Solution. Avant l'ouverture de l'interrupteur, le courant $i=\frac{E}{R}=1A$ circule dans l'inductance L. Une énergie magnétique $\frac{Li^2}{2}$ a été accumulée dans cette inductance. Si on admet que l'ouverture de l'interrupteur se soit produite instantanément, qu'il n'y ait pas eu d'arc et étant donné que le courant circulant dans l'inductance doit rester égal à $1A$, le circuit fermé constitué par le voltmètre et la bobine au premier instant après ouverture de l'interrupteur est parcouru par un courant de $1A$, dû à l'énergie accumulée dans le champ magnétique de l'inductance. Dans ces conditions le voltmètre indique une pointe de tension de l'ordre de $3\ 000\ V$. Une impulsion de courant aussi importante traversant le voltmètre peut griller la bobine de cet appareil et le mettre hors service.

Lorsque les contacts de l'interrupteur du circuit de la fig. 307 s'ouvrent avec une vitesse finie, un arc peut s'amorcer entre ces contacts. De ce fait la valeur de la tension aux bornes du voltmètre sera plus basse, que dans le cas idéalisé, exa-

miné plus haut, lorsque l'interrupteur s'ouvrait instantanément sans donner lieu à un arc *.

Pour ne pas « griller » le voltmètre intercalé dans le circuit de la fig. 307, il faut commencer par le débrancher et n'ouvrir l'interrupteur qu'ensuite.

Les surtensions se manifestent d'autant plus fortement que les inductances L des circuits sont importantes. Ces surtensions sont particulièrement dangereuses dans les circuits à courant continu, comprenant des inductances de l'ordre de plusieurs henries ou plusieurs dizaines de henries. Dans ces circuits il faut prendre des précautions spéciales pour les couper (l'interrupteur ne doit être coupé qu'après insertion de résistances actives additionnelles dans le circuit).

Ceci termine l'examen général du caractère des variations des courants et tensions libres et de certaines particularités générales des phénomènes transitoires; nous allons aborder maintenant l'étude des méthodes d'analyse et de calcul des phénomènes transitoires eux-mêmes.

Commençons par examiner certains traits communs aux diverses méthodes.

§ 278. Généralités sur les méthodes d'analyse des phénomènes transitoires dans les circuits électriques linéaires. Le calcul des phénomènes transitoires dans un circuit électrique linéaire quelconque comprend les opérations principales suivantes:

1. Choix des sens positifs pour les courants dans les branches du circuit.
2. Calcul des courants et des tensions immédiatement avant la commutation.
3. Etablissement de l'équation caractéristique et recherche de ses racines.
4. Etablissement des expressions en fonction du temps pour les courants et tensions cherchés.

Les méthodes les plus répandues de calcul des phénomènes transitoires sont les suivants:

1) méthode appelée « classique » dans les ouvrages spécialisés;
2) méthode opérationnelle;
3) méthode de calcul avec utilisation de l'intégrale de Duhamel.

Pour toutes ces méthodes les quatre opérations ou étapes de calcul, mentionnées ci-dessus, sont obligatoires.

Les trois premières opérations (qui ont été déjà examinées sommairement) sont parfaitement identiques pour toutes les méthodes et on doit les considérer comme partie de calcul commune à ces méthodes.

Une différence entre ces méthodes n'apparaît que dans la quatrième le plus fastidieuse étape de calcul.

Parmi les trois méthodes énumérées on utilise le plus fréquemment les méthodes classique et opérationnelle, et moins souvent, la méthode de calcul basée sur l'utilisation de l'intégrale de Duhamel. Plus loin, lorsque nous serons suffisamment familiarisés avec ces méthodes, nous

---

* Dans une étude plus détaillée de ce phénomène on aurait dû tenir compte de l'influence des capacités entre spires et des capacités par rapport à la terre (voir § 316). Si on néglige l'arc, les capacités réparties et les valeurs de l'inductance L, le calcul ci-dessus n'est que très approximatif et doit être considéré comme donné à titre illustratif.

donnerons leur évaluation respective et les domaines recommandés d'utilisation de chacune d'elles (voir § 307).

En radiotechnique on utilise en plus des trois méthodes énumérées, également une méthode d'analyse des phénomènes transitoires basée sur l'intégrale de Fourier. Certaines questions concernant l'intégrale de Fourier sont examinées sommairement dans l'appendice B.

§ 279. Définition de la méthode classique de calcul des phénomènes transitoires. On appelle méthode classique de calcul de phénomènes transitoires, la méthode pour laquelle la solution de l'équation différentielle est la somme des solutions forcée et libre et dans laquelle les constantes d'intégration figurant dans l'expression du courant (ou de la tension) libre sont déterminées en résolvant le système d'équations algébriques linéaires, suivant les valeurs connues des racines de l'équation caractéristique et les valeurs connues de la composante libre du courant et de ses dérivées, prises pour $t = 0_+$.

§ 280. Détermination des constantes d'intégration dans la méthode classique. Il découle de ce qui précède qu'un courant libre quelconque ou une tension libre quelconque peuvent être représentés sous forme d'une somme de termes exponentiels. Le nombre de termes de cette somme est égal au nombre des racines de l'équation caractéristique.

Ainsi pour deux racines réelles différentes on a

$$i_l = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

et pour trois racines réelles différentes :

$$i_l = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}.$$

En utilisant les équations de Kirchhoff et des lois de commutation on peut trouver pour un circuit quelconque :

1) la valeur numérique du courant libre cherché pour $t = 0_+$; nous la désignerons par $i_l(0_+)$ et 2) la valeur numérique de la première dérivée et, au besoin, des dérivées supérieures du courant libre, prises pour $t = 0_+$. La valeur numérique de la première dérivée du courant libre pour $t = 0_+$ est désignée par $i'_l(0_+)$. Désignons de même par $i''_l(0_+)$ la valeur numérique de la seconde dérivée du courant libre pour $t = 0_+$, etc.

Examinons la méthode de détermination des constantes d'intégration $A_1, A_2, \ldots$, en supposant $i_l(0_+)$, $i'_l(0_+)$, $i''_l(0_+)$ connus, ainsi que les valeurs des racines $p_1, p_2, \ldots$

Si l'équation caractéristique du circuit est une équation du premier degré, on a $i_l = Ae^{pt}$. La constante d'intégration A est déterminée d'après la valeur du courant libre $i_l(0_+)$:

$$A = i_e(0_+). \tag{10.15}$$

Si l'équation caractéristique est du deuxième degré et si ses racines sont réelles et différentes, on a

$$i_l = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \tag{10.16}$$

Dérivons cette équation par rapport au temps:

$$i_l' = p_1A_1e^{p_1t} + p_2A_2e^{p_2t}. \tag{10.16'}$$

Ecrivons les équations (10.16) et (10.16') pour $t = 0$ (n'oublions pas que $t = 0$ $e^{p_1t} = e^{p_2t} = 1$); nous obtenons

$$i_l(0_+) = A_1 + A_2; \tag{10.17}$$

$$i_l'(0_+) = p_1A_1 + p_2A_2. \tag{10.17'}$$

Dans ce système d'équations on connaît $i_l(0_+)$, $i_l'(0_+)$, p_1 et p_2; les inconnues sont A_1 et A_2.

La solution du système d'équations (10.17) et (10.17') donne

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{i_l'(0_+) - p_2 i_l(0_+)}{p_1 - p_2}; \\ A_2 &= i_l(0_+) - A_1. \end{aligned}\right\} \tag{10.17''}$$

Si les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées, le courant libre doit être pris sous la forme suivante:

$$i_l = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu) \tag{10.18}$$

La fréquence angulaire ω_0 et l'exposant d'amortissement δ sont connus à partir de la solution de l'équation caractéristique.

Dans ce cas aussi la détermination des deux inconnues A et ν se fait d'après les valeurs $i_l(0_+)$ et $i_l'(0_+)$.

Dérivons par rapport au temps l'équation (10.18); nous obtenons:

$$i_l' = -A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu) + A\omega_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \nu). \tag{10.18'}$$

Ecrivons l'équation (10.18') pour $t = 0_+$:

$$i_l'(0_+) = -A\delta\sin\nu + A\omega_0\cos\nu.$$

Ainsi pour calculer les deux inconnues A et ν nous disposons de deux équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} i_l(0_+) &= A\sin\nu; \\ i_l'(0_+) &= -A\delta\sin\nu + \omega_0 A\cos\nu. \end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

Pour un circuit, dont l'équation caractéristique est du troisième degré, le courant libre est:

$$i_l = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t} + A_3e^{p_3t}. \tag{10.20}$$

Trouvons la première dérivée et ensuite la seconde dérivée des premier et second membres de l'équation (10.20):

$$i_l' = p_1A_1e^{p_1t} + p_2A_2e^{p_2t} + p_3A_3e^{p_3t}; \tag{10.21}$$

$$i_l'' = p_1^2A_1e^{p_1t} + p_2^2A_2e^{p_2t} + p_3^2A_3e^{p_3t}. \tag{10.22}$$

Ecrivons (10.20), (10.21) et (10.22) pour $t=0_+$:

$$\left.\begin{aligned} i_l(0_+) &= A_1 + A_2 + A_3; \\ i'_l(0_+) &= p_1A_1 + p_2A_2 + p_3A_3; \\ i''_l(0_+) &= p_1^2A_1 + p_2^2A_2 + p_3^2A_3. \end{aligned}\right\} \qquad (10.23)$$

Le système d'équations (10.23) est un système de trois équations algébriques linéaires à trois inconnues: A_1, A_2 et A_3. Toutes les autres quantités faisant partie de ce système [p_1, p_2, p_3, $i_l(0_+)$, $i'_l(0_+)$, $i''_l(0_+)$ sont connues.

Il y a lieu de signaler ici que dans les circuits ramifiés compliqués comprenant plusieurs accumulateurs d'énergie et pour certaines relations particulières entre leurs paramètres, les valeurs initiales d'un ou de plusieurs courants ou tensions libres peuvent être nulles. Dans ces conditions le nombre de composantes libres de tel ou tel courant ou tension peut être inférieur au nombre des racines de l'équation caractéristique et ne pas être égal aux nombres des composantes libres des autres courants. Ce phénomène peut avoir lieu par exemple, si l'une des fréquences angulaires ω_0 des oscillations libres s'avère exactement égale à la fréquence angulaire propre d'un circuit résonnant série ou parallèle, faisant partie du schéma. Dans ce cas et pour cette fréquence de la composante libre, le circuit résonnant série (circuit accepteur) court-circuitera pratiquement le tronçon du schéma, aux bornes duquel il est raccordé, tandis que le circuit résonnant parallèle (circuit antirésonnant) coupera pour ainsi dire le circuit pour cette fréquence.

Examinons maintenant quelques exemples numériques des calculs des phénomènes transitoires par la méthode classique pour des circuits des premier et deuxième degrés, comprenant des sources de F.E.M. continue et sinusoïdale et à conditions initiales nulles ou non nulles.

Exemple 128. Supposons que les conditions initiales nulles suivantes existaient dans le circuit de la fig. 308, avant la fermeture de l'interrupteur: $E = 210\ V$; $R_1 = 1000\ \Omega$; $R_2 = 2000\ \Omega$; $C = 50\ \mu F$. On demande: 1) trouver les valeurs initiales des composantes totales forcées et libres de tous les courants et tensions aux bornes de la capacité du circuit; 2) déterminer la loi de variation en fonction de temps des courants dans toutes les branches du circuit et de la tension aux bornes de la capacité.

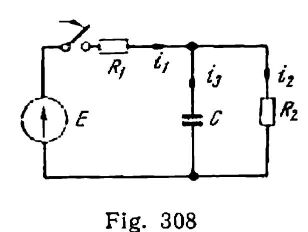


Fig. 308

Solution de la première partie du problème

Choisissons les sens positifs pour les courants dans les branches conformément à la fig. 308. Les sens positifs pour les tensions seront pris, comme ceci est fait habituellement, coïncidents à ceux des courants.

La tension aux bornes du condensateur était nulle avant la fermeture de l'interrupteur:

$$u_C(0_-) = 0.$$

Conformément à la deuxième loi de commutation, elle reste nulle immédiatement après la commutation, pour $t = 0_+$. Ecrivons les équa-

tions suivant les lois de Kirchhoff :

$$i_1 R_1 + u_C = E\,;$$
$$u_C = i_2 R_2\,;$$
$$i_1 = i_2 + i_3.$$

Récrivons les mêmes équations pour $t = 0_+$:

$$R_1 i_1(0_+) + u_C(0_+) = E\,;$$
$$u_C(0_+) = i_2(0_+) R_2\,;$$
$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+).$$

Etant donné que $u_C(0_+) = 0$, on a

$$i_1(0_+) = \frac{E}{R_1} = \frac{210}{1000} = 0{,}21\ A\,;$$
$$i_2(0_+) = 0\,;$$
$$i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = 0{,}21\ A.$$

La seule valeur initiale indépendante du circuit est

$$u_C(0_+) = 0.$$

Toutes les autres valeurs initiales sont dépendantes.

Trouvons les valeurs forcées des courants.

Une source de F.E.M. continue existe dans le circuit. Pour le courant continu, la capacité joue le rôle d'une rupture du circuit.

Par conséquent,

$$i_{3f} = 0$$
$$i_{1f} = i_{2f} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{210}{3000} = 0{,}07\ A.$$

La tension forcée aux bornes du condensateur est égale à la tension forcée aux bornes de la résistance R_2 :

$$u_{C_f} = u_{R_{2f}} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = 140\ V.$$

Trouvons maintenant les composantes libres des courants. A cette fin représentons chaque courant pour $t = 0_+$ sous forme de la somme des courants forcé et libre :

$$i_1(0_+) = i_{1l}(0_+) + i_{1f}(0_+)\,;$$

d'où

$$i_{1l}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1f}(0_+) = 0{,}21 - 0{,}07 = 0{,}14\ A\,;$$
$$i_{2l}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2f}(0_+) = 0 - 0{,}07 = -0{,}07\ A\,;$$
$$i_{3l}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3f}(0_+) = 0{,}21 - 0 = 0{,}21\ A\,;$$
$$u_{Cl}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cf}(0_+) = 0 - 140 = -140\ V.$$

Solution de la deuxième partie du problème

L'équation caractéristique (voir pour son établissement § 266):

$$pR_1R_2C + R_1 + R_2 = 0$$

n'a qu'une seule racine:

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C} = -30s^{-1}.$$

Du fait que l'équation caractéristique n'a qu'une seule racine, nous prendrons la composante libre de chacune des valeurs cherchées sous la forme Ae^{pt} (les constantes A seront écrites avec le même indice que les courants à calculer):

$$i_1 = i_{1f} + i_{1l} = \frac{E}{R_1 + R_2} + A_1e^{pt} = 0{,}07 + 0{,}14e^{-30t}\ A;$$

$$i_2 = i_{2f} + i_{2l} = \frac{E}{R_1 + R_2} + A_2e^{pt} = 0{,}07 - 0{,}07e^{-30t}\ A;$$

$$i_3 = i_{3f} + i_{3l} = 0 + A_3e^{pt} = 0{,}21e^{-30t}\ A;$$

$$u_C = u_{Cf} + u_{Cl} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} + A_4e^{pt} = 140 - 140e^{-30t}\ V.$$

Fig. 309

Les courbes des courants et de la tension u_c sont représentées qualitativement en fonction du temps sur la fig. 309.

La constante d'intégration A_1 est égale à la valeur de la composante libre du courant i_{1l} pour $t = 0_+$ c'est-à-dire

$$A_1 = i_{1l}(0_+) = 0{,}14\ A.$$

Les autres constantes d'intégration sont:

$$A_2 = i_{2l}(0_+) = -0{,}07\ A;$$

$$A_3 = i_{3l}(0_+) = 0{,}21\ A;$$

$$A_4 = u_{Cl}(0_+) = -140\ V.$$

Nous avons écrit ci-dessus la solution sous forme numérique. Ecrivons-la maintenant sous forme littérale:

$$A_1 = i_1(0_+) - i_{1f}(0_+) = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1 + R_2};$$

$$A_2 = i_2(0_+) - i_{2f}(0_+) = 0 - \frac{E}{R_1 + R_2};$$

$$A_3 = i_3(0_+) - i_{3f}(0_+) = \frac{E}{R_1} - 0 = \frac{E}{R_1};$$

$$A_4 = u_C(0_+) - u_{Cf}(0_+) = 0 - \frac{E}{R_1 + R_2}R_2.$$

Dans leur forme générale les valeurs cherchées peuvent être écrites comme suit

$$i_1 = \frac{E}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{pt}\right);$$

$$i_2 = \frac{E}{R_1+R_2}(1-e^{pt});$$

$$i_3 = \frac{E}{R_1}e^{pt}; \quad u_C = E\frac{R_2}{R_1+R_2}\quad(1-e^{pt}).$$

Exemple 129. Le régime permanent suivant existait dans le circuit de la fig. 310 avant la fermeture de l'interrupteur: $R_1 = R_1' = R_3 = 50\,\Omega$; $C = 100\,\mu F$; $E = 150\ V$.

On demande: 1) trouver les composantes totales, forcées et libres des courants et de la tension aux bornes du condensateur, ainsi que la valeur initiale de la dérivée de la tension libre aux bornes de ce condensateur: 2) calculer les courants i_1, i_2, i_3 et la tension u_c en fonction du temps.

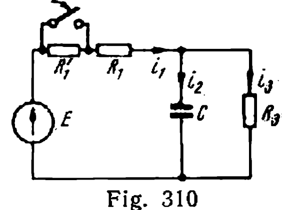


Fig. 310

Solution de la première partie du problème

Avant la commutation $i_2(0_-) = 0$ et

$$i_1(0_-) = i_3(0_-) = \frac{E}{R_1+R_1'+R_3} = \frac{150}{150} = 1A.$$

La tension aux bornes du condensateur était égale à la tension aux bornes de la résistance R_3

$$u_C(0_-) = i_3(0_-)R_3 = 1\cdot 50 = 50\ V.$$

Trouvons les valeurs forcées après la commutation

$$i_{1f} = i_{3f} = \frac{E}{R_1+R_3} = \frac{150}{100} = -1{,}5\ A;$$

$$u_{Cf}(0_+) = i_{3f}(0_+)R_3 = 1{,}5\cdot 50 = 75\ V.$$

Ecrivons, conformément à la deuxième loi de Kirchhoff, les équations pour le circuit constitué par les première et deuxième branches pour $t = 0_+$:

$$i_1(0_+)R_1 + u_C(0_+) = E,$$

mais

$$u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Par conséquent,

$$i_1(0_+) = \frac{E-u_C(0_-)}{R_1} = \frac{150-50}{50} = 2\ A.$$

En partant de l'équation

$$u_C(0_+) = i_3(0_+)R_3$$

on trouve :

$$i_3(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_3} = 1\ A.$$

Conformément à la première loi de Kirchhoff :

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+).$$

Par conséquent,

$$i_2(0_+) = i_1(0_+) - i_3(0_+) = 2 - 1 = 1\ A.$$

Les composantes libres seront trouvées comme différences entre leurs valeurs totales et forcées :

$$u_{Cl}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cf}(0_+) = 50 - 75 = -25\ V;$$
$$i_{1l}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1f}(0_+) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5\ A;$$
$$i_{2l}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2f}(0_+) = 1 - 0 = 1\ A;$$
$$i_{3l}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3f}(0_+) = 1 - 1{,}5 = -0{,}5\ A.$$

Puisque le courant libre circulant dans la capacité est

$$i_l = C\frac{du_{Cl}}{dt},$$

on a

$$\frac{du_{Cl}}{dt} = \frac{i_l}{C}$$

Dans l'exemple examiné

$$\left(\frac{du_{Cl}}{dt}\right)_{t=0_+} = \frac{i_{2l}(0_+)}{C} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} = 10^4\ V/s.$$

Solution de la deuxième partie du problème

L'équation caractéristique pour le circuit après la commutation n'a qu'une seule racine :

$$p = -\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3 C} = -400\ s^{-1}.$$

Chaque courant est égal à la somme des composantes forcée et libre Ae^{pt}, où A est égal à la valeur de la composante libre pour $t = 0_+$:

$$i_1 = 1{,}5 + 0{,}5e^{-400t}\ A;$$
$$i_2 = e^{-400t}\ A;$$
$$i_3 = 1{,}5 - 0{,}5e^{-400t}\ A;$$
$$u_C = 75 - 25e^{-400t}\ V.$$

Les courbes correspondantes sont représentées sur la fig. 311.

Exemple 130. Le régime permanent suivant existait dans le circuit de la fig. 312 avant la commutation : $R_1 = 40\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 160\ \Omega$; $L = 2H$; $E = 120\ V$.

On demande: 1) trouver les composantes libres des courants et la composante libre de la tension aux bornes de l'inductance pour $t = 0_+$; 2) trouver les courants i_1, i_2 et u_l en fonction du temps.

Solution de la première partie du problème

En régime permanent, avant la commutation (le courant continu ne donnant pas lieu à une chute de tension dans l'inductance), les courants sont calculés comme suit:

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) + i_3(0_-) = 2i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} = 1\ A.$$

Par conséquent, $i_2(O_-) = 0{,}5\ A$.

Les courants forcés après la commutation

$$i_{1f} = i_{2f} = \frac{E}{R_1+R_2} = 0{,}6\ A.$$

Fig. 311

Conformément à la première loi de commutation

$$i_2(0_-) = i_2(0_+) = 0{,}5\ A.$$

Nous obtenons $i_{2l}(0_+) = i_{1l}(0_+)$:

$$i_{2l}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2f}(0_+) = 0{,}5 - 0{,}6 = -0{,}1\ A.$$

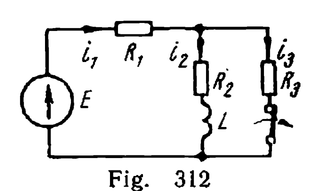


Fig. 312

Pour déterminer la tension libre aux bornes de l'inductance pour $t = 0_+$, écrivons l'équation suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour le circuit après la commutation:

$$i_{2l}(0_+)\ (R_1 + R_2) + u_{Ll}(0_+) = 0.$$

D'où

$$u_{Ll}(0_+) = 20\ V.$$

Solution de la deuxième partie du problème

L'équation caractéristique $pL + (R_1 + R_2) = 0$ n'a qu'une seule racine $p = -100\ s^{-1}$.

Les valeurs des composantes forcées et libres sont tirées de la première partie du problème. Nous avons:

$$i_1 = i_2 = 0{,}6 - 0{,}1e^{-100t}\ A$$
$$\text{et. } u_L = 20e^{-100t}\ V.$$

Les courbes i_1, i_2 et u_l sont représentées qualitativement sur la fig. 313.

Exemple 131. Dans le circuit de la fig. 314 le régime permanent suivant existait avant la fermeture de l'interrupteur : $R_1 = R_2 = 2\,\Omega$; $\omega L = 3\,\Omega$; $e(t) = 127 \sin(\omega t - 50°)\ V$.

On demande : 1) trouver $i_l(0_+)$; 2) déterminer la loi de variation du courant dans le circuit après la commutation.

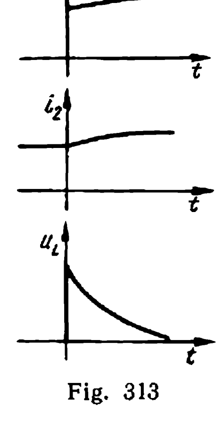


Fig. 313

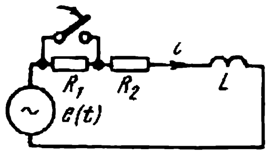


Fig. 314

Solution de la première partie du problème

Trouvons l'amplitude complexe du courant dans le circuit avant la commutation :

$$\dot{I}_m = \frac{127e^{-j50°}}{4+3j} = 25{,}4e^{-j86°50'}\ A.$$

Valeur instantanée du courant avant la commutation :

$$i = 25{,}4 \sin(\omega t - 86°50').$$

A l'instant de la commutation (pour $\omega t = 0$)

$$i(0_-) = 25{,}4 \sin(-86°50') = -25{,}35\ A.$$

Courant forcé après la commutation

$$\dot{I}_m = \frac{127e^{-j50°}}{2+3j} = 35{,}2e^{-j106°20'}.$$

Valeur instantanée du courant forcé

$$i_f = 35{,}2 \sin(\omega t - 106°20') ;$$

$$i_f(0_+) = 35{,}2 \sin(-106°20') = -33{,}8\ A.$$

Suivant la première loi de commutation

$$i(0_-) = i(0_+) = -25{,}35\ A.$$

Mais

$$i(0_+) = i_f(0_+) + i_l(0_+).$$

Par conséquent,

$$i_l(0_+) = i(0_+) - i_f(0_+) = -25{,}35 + 33{,}8 = 8{,}45\ A.$$

Solution de la deuxième partie du problème

L'équation caractéristique $pL + R_2 = 0$ a la racine suivante:

$$p = -\frac{R_2}{L} = -\frac{R_2}{\frac{\omega L}{\omega}} = -\frac{2 \cdot 314}{3} \approx -210\ s^{-1}.$$

Conformément aux données de la première partie du problème, le courant dans le circuit avant la commutation (courbe *1* de la fig. 315 avant $\omega t = 0$) est:

$$i = 25{,}4 \sin (\omega t - 86°50')\ A.$$

Courant forcé après commutation

$$i_f = 35{,}2 \sin (\omega t - 106°20')\ A \text{ (courbe 2, fig. 315)};$$

$$i_l (0_+) = 8{,}54\ A.$$

Par conséquent,

$$i = i_f + i_l = 35{,}2 \sin (\omega t - 106°20') + 8{,}54 e^{-210t}\ A.$$

La courbe *3* de la fig. 315 représente le courant libre, la courbe *4* est le courant total après la commutation (les ordonnées de la courbe *4* pour $\omega t \geqslant 0$ sont égales à la somme des ordonnées des courbes *2* et *3*).

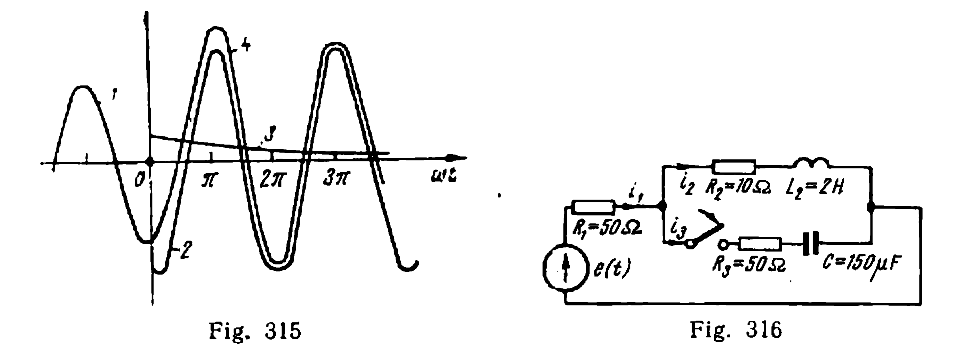


Fig. 315 Fig. 316

Exemple 132. On ferme l'interrupteur dans la troisième branche du circuit de la fig. 316. Le régime permanent suivant $e(t) - E = 120\ V$ existait dans le circuit avant cette opération.

On demande:

1) trouver

$$i_{2l}(0_+); \quad \left(\frac{di_{2l}}{dt}\right)_{t=0_+}; \quad u_{Cl}(0_+) \text{ et } \left(\frac{du_{Cl}}{dt}\right)_{t=0_+};$$

2) calculer $i_2(t)$ et $u_C(t)$.

S o l u t i o n d e l a p r e m i è r e p a r t i e d u p r o b l è m e

Avant la fermeture de l'interrupteur

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1+R_2} = \frac{120}{50+10} = 2\ A.$$

Cherchons les courants forcés et la tension aux bornes du condensateur après la commutation:

$$i_{1f} = i_{2f} = 2\ A.$$

Le courant continu ne traverse pas le condensateur et par conséquent,

$$i_{3f} = 0.$$

Il n'existe pas de chute de tension dans l'inductance du fait du courant continu, et par conséquent,

$$u_{L2f} = 0.$$

La tension forcée aux bornes du condensateur est égale à la chute de tension dans la résistance R_2, due au courant i_{2f}:

$$u_{Cf} = 2\cdot 10 = 20\ V.$$

Suivant la première loi de commutation

$$i_2(0_-) = i_2(0_+) = 2\ A.$$

Mais

$$i_2(0_+) = i_{2f}(0_+) + i_{2l}(0_+),$$

d'où

$$i_{2l}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2f}(0_+) = 2 - 2 = 0.$$
$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+),$$

ou

$$i_1(0_+) = 2 + i_3(0_+).$$

Ecrivons l'équation suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour une maille constituée par la première et la troisième branches:

$$i_1(0_+)R_1 + i_3(0_+)R_3 + u_C(0_+) = E.$$

Du fait que

$$u_C(0_+) = 0 \qquad \text{et} \qquad i_1(0_+) = 2 + i_3(0_+),$$

on a

$$i_3(0_+) = \frac{E - 2R_1}{R_1 + R_3} = \frac{120 - 2\cdot 50}{50+50} = 0{,}2\ A.$$

Trouvons $i_{3l}(0_+)$:

$$i_{3l}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3f}(0_+) = 0{,}2 - 0 = 0{,}2\ A.$$

Pour calculer $u_{Ll}(0_+)$ écrivons l'équation pour les composantes libres le long de la maille formée par la première et la deuxième branches:

$$i_{1l}(0_+)R_1 + i_{2l}(0_+)R_2 + u_{Ll}(0_+) = 0,$$

d'où

$$u_{Ll}(0_+) = -i_{1l}(0_+)R_1 - i_{2l}(0_+)R_2 = -0{,}2\cdot 50 + 0 = -10\ V.$$

Mais

$$u_{Ll} = L_2 \frac{di_{2l}}{dt}.$$

Par conséquent,

$$\left(\frac{di_{2l}}{dt}\right)_{t=0_+} = \frac{u_{Ll}(0_+)}{L_2} = \frac{-10}{2} = -5\ A/s.$$

Nous trouverons la tension libre aux bornes du condensateur pour $t = 0_+$ à l'aide de la deuxième loi de commutation:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+);$$
$$u_C(0_+) = u_{Cf}(0_+) + u_{Cl}(0_+);$$
$$0 = 20 + u_{Cl}(0_+),$$

d'où

$$u_{Cl}(0_+) = -20\ V.$$

Déterminons la vitesse de variation de la tension libre aux bornes du condensateur pour $t = 0_+$.

A cette fin utilisons l'expression

$$i_{3l} = C\frac{du_{Cl}}{dt}.$$

Par conséquent,

$$\left(\frac{du_{Cl}}{dt}\right)_{t=0_+} = \frac{i_{3l}(0_+)}{C} = \frac{0{,}2}{150\cdot 10^{-6}} = 1333\ V/s.$$

Solution de la deuxième partie du problème

L'équation caractéristique

$$p^2L_2C(R_1+R_3) + p[C(R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3) + L_2] + R_1 + R_2 = 0$$

a deux racines complexes conjuguées:

$$p_1 = -42{,}1 + j15{,}2\ s^{-1} \quad \text{et} \quad p_2 = -42{,}1 - j15{,}2\ s^{-1}.$$

Par conséquent, la composante libre doit être écrite sous la forme suivante:

$$Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu),$$

où $\delta = 42{,}1$ et $\omega_0 = 15{,}2$; A et ν sont déterminés à l'aide de la composante libre et de sa dérivée première pour $t = 0_+$.

En partant des données de la première partie du problème

$$i_{2f}=2\ A\ ;\ i_{2l}(0_+)=0\ ;\ i'_{2l}(0_+)=-5\ A/s\ ;$$
$$u_{Cf}=20\ V\ ;\ u_{Cl}(0_+)=-20\ V\ ;\ u'_{Cl}(0_+)=1333\ V/s.$$

La fonction $Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t+\nu)$ est égale à $A\sin\nu$ pour $t=0$. La dérivée de la fonction $Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t+\nu)$ est:

$$-A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t+\nu)+Ae^{-\delta t}\omega_0\cos(\omega_0 t+\nu).$$

La valeur de cette dérivée pour $t=0$ est:

$$-\delta A\sin\nu+\omega_0 A\cos\nu.$$

Trouvons les valeurs de A et ν pour la composante libre du courant i_2. Ecrivons pour ceci les deux équations suivantes:

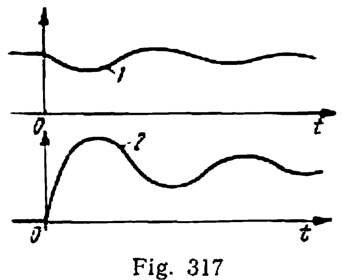


Fig. 317

$$i_{2l}(0_+)=0\quad\text{ou}\quad A\sin\nu=0;$$
$$i'_{2l}(0_+)=-5\quad\text{ou}$$
$$-\delta A\sin\nu+\omega_0 A\cos\nu=-5.$$

La solution en commun de ces deux équations donne:

$$\nu=0\ \text{et}\ A=-0{,}328\ A.$$

Par conséquent,

$$i_2=i_{2f}+i_{2l}=2-0{,}328e^{-42{,}1t}\sin 15{,}2t\ A.$$

La courbe *1* de la fig. 317 est celle de $i_2=f(t)$.

Cherchons A et ν pour la composante libre de la tension u_C:

$$u_{Cl}(0_+)=-20\quad\text{ou}\quad A\sin\nu=-20;$$
$$u'_{Cl}(0_+)=1333\quad\text{ou}\quad -\delta A\sin\nu+\omega_0 A\cos\nu=1333.$$

D'où

$$A=37{,}9\quad\text{et}\quad\nu=-31°52'.$$

Ainsi

$$u_C=u_{Cf}+u_{Cl}=20+37{,}9e^{-42{,}1t}\sin(15{,}2t-31°52')\ V.$$

La courbe *2* de la fig. 317 représente $u_C=f(t)$.

Exemple 133. Pour le circuit de la fig. 316

$$e(t)=127\sin(314t+40°)\ V.$$

Les paramètres de ce circuit sont les mêmes que dans l'exemple 132. Avant la fermeture de l'interrupteur le régime permanent suivant existait dans ce circuit:

$$u_C(0_-)=0.$$

On demande :
1) trouver

$$i_{2l}(0_+);\ \left(\frac{di_{2l}}{dt}\right)_{t=0_+};\ u_{Cl}(0_+)\ \text{et}\ \left(\frac{du_{Cl}}{dt}\right)_{t=0_+}$$

2) calculer $i_2(t)$ et $u_C(t)$.

Solution de la première partie du problème

On avait avant la commutation

$$\dot{I}_{1m}=\dot{I}_{2m}=\frac{127e^{j40^\circ}}{60+j628}=0{,}202e^{-j44^\circ30'}\ A;$$

$$i_1=i_2=0{,}202\sin(\omega t-44^\circ30');$$

$$i_1(0_-)=i_2(0_-)=0{,}202\sin(-44^\circ30')=-0{,}1415\ A.$$

Calculons les courants et les tensions forcés aux bornes du condensateur après la commutation.

Impédance d'entrée du circuit

$$Z_{ent}=R_1+\frac{(R_2+j\omega L_2)\left(R_3-\frac{j}{\omega C}\right)}{R_2+j\omega L_2+R_3-\frac{j}{\omega C}}=104{,}8e^{-j9^\circ50'};$$

$$\dot{I}_{1m}=\frac{\dot{E}_{1m}}{Z_{ent}}=\frac{127e^{j40^\circ}}{104{,}8e^{-j9^\circ50'}}=1{,}213e^{j49^\circ50'}\ A.$$

Valeur instantanée du courant forcé i_1 après la commutation

$$i_{1f}=1{,}213\sin(\omega t+49^\circ50');$$

$$i_{1f}(0_+)=1{,}213\sin 49^\circ50'=0{,}923\ A.$$

L'impédance complexe des deuxième et troisième branches couplées en parallèle

$$Z_{23}=\frac{(R_2+j\omega L_2)\left(R_3-\frac{j}{\omega C}\right)}{R_2+j\omega L_2+R_3-\frac{j}{\omega C}}=56{,}3e^{-j18^\circ35'}.$$

Tension complexe aux bornes du tronçon branché en parallèle

$$\dot{U}_{23m}=\dot{I}_{1m}Z_{23}=1{,}213e^{j49^\circ50'}\cdot 56{,}3e^{-j18^\circ35'}=68{,}2e^{j31^\circ15'}\ V;$$

$$\dot{I}_{2m}=\frac{\dot{U}_{23m}}{Z_2}=\frac{68{,}2e^{j31^\circ15'}}{10+j628}=0{,}1085e^{-j58^\circ45'};$$

$$\dot{I}_{3m}=\frac{\dot{U}_{23m}}{Z_3}=\frac{68{,}2e^{j31^\circ15'}}{50-j21{,}3}=1{,}253e^{j54^\circ20'}.$$

Valeurs instantanées des courants forcés i_2 et i_3 après la commutation :

$$i_2 = 0,1085 \sin(\omega t - 58°45') ;$$
$$i_3 = 1,253 \sin(\omega t + 54°20') ;$$
$$i_{2f}(0_+) = 0,1085 \sin(-58°45') = -0,0928\ A ;$$
$$i_{3f}(0_+) = 1,253 \sin 54°20' = 1,016\ A.$$

Tension forcée aux bornes du condensateur

$$\dot{U}_{Cm} = \dot{I}_{3m}\left(-\frac{j}{\omega C}\right) = 1,253 e^{j54°20'} \cdot 21,3 e^{-j90°} = 26,7 e^{-j35°40'}.$$

Valeur instantanée de la tension forcée aux bornes du condensateur après la commutation

$$u_{Cf} = 26,7 \sin(\omega t - 35°40') ;$$
$$u_{Cf}(0_+) = 26,7 \sin(-35°40') = -15,57\ V.$$

Cherchons $i_{2l}(0_+)$. Suivant la première loi de commutation

$$i_2(0_-) = i_2(0_+) = -0,1415 = i_{2f}(0_+) + i_{2f}(0_+) ;$$
$$i_{2f}(0_+) = -0,0928\ A ;$$
$$i_{2f}(0_+) = -0,1415 + 0,0928 = -0,0487\ A.$$

La tension libre aux bornes du condensateur $u_{Cl}(0_+)$ est trouvée à l'aide de la deuxième loi de commutation :

$$u_C(0_-) = u_{Cf}(0_+) + u_{Cl}(0_+) ;$$
$$u_{Cl}(0_+) + u_C(0_-) - u_{Cf}(0_+) = 0 - (-15,57) = 15,57\ V.$$

Pour calculer $i_{3l}(0_+)$ écrivons l'équation pour la maille constituée par les première et troisième branches :

$$i_{1l}(0_+) R_1 + i_{3l}(0_+) R_3 + u_{Cl}(0_+) = 0.$$

Substituons à $i_{1l}(0_+)$ dans cette expression

$$[-0,0487 + i_{3l}(0_+)]$$

en tenant compte que

$$u_{Cl}(0_+) = 15,57\ V.$$

Trouvons :

$$i_{3l}(0_+) = \frac{-15,57 + 2,43}{50 + 50} = -0,1314\ A ;$$
$$i_{1l}(0_+) = i_{2l}(0_+) + i_{3l}(0_+) = -0,18\ A.$$

Pour calculer

$$u_{Ll}(0_+) = L\left(\frac{di_{2l}}{dt}\right)_{t=0_+}$$

écrivons l'équation pour une maille constituée par les première et deuxième branches:

$$i_{1l}(0_+)R_1 + i_{2l}(0_+)R_2 + u_{Ll}(0_+) = 0,$$

d'où

$$u_{Ll}(0_+) = 9{,}487\ V;$$

$$\left(\frac{di_{2l}}{dt}\right)_{t=0_+} = \frac{u_{Ll}(0_+)}{L} = \frac{9{,}487}{2} = 4{,}74\ A/s;$$

$$\left(\frac{du_{Cl}}{dt}\right)_{t=0_+} = \frac{i_{3l}(0_+)}{C} = \frac{-0{,}1314}{150\cdot 10^{-6}} = -876\ V/s.$$

Solution de la deuxième partie du problème

En partant des données obtenues lors de la solution de la première partie du problème écrivons

$$i_{2f} = 0{,}1085 \sin(\omega t - 58°45'); \quad i_{2l}(0_+) = -0{,}0487\ A;$$

$$i'_{2l}(0_+) = 4{,}74\ A/s;$$

$$u_{Cf} = 26{,}7 \sin(\omega t - 35°40'); \quad u_{Cl}(0_+) = 15{,}57\ V;$$

$$u'_{Cl}(0_+) = -876\ V/s.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont les mêmes que dans l'exemple précédent. Pour calculer A et ν pour i_{2l} écrivons les deux équations suivantes:

$$A \sin \nu = -0{,}0487;$$

$$-\delta A \sin \nu + \omega_0 A \cos \nu = 4{,}74;$$

d'où

$$A = 0{,}184\ A \text{ et } \nu = -15°20'.$$

Par conséquent,

$$i_2 = i_{2f} + i_{2l} = 0{,}1085 \sin(\omega t - 58°45') + 0{,}184 e^{-42{,}1t}$$
$$\sin(15{,}2t - 15°20')\ A.$$

Pour calculer les constantes A et ν pour u_{Cl} écrivons les deux équations suivantes:

$$A \sin \nu = 15{,}57;$$

$$-\delta A \sin \nu + \omega_0 A \cos \nu = -876.$$

La solution en commun de ces équations donne:

$$A = 21{,}3 \text{ et } \nu = 136°50';$$

$$u_C = u_{Cf} + u_{Cl} = 26{,}7 \sin(\omega t - 35°40') +$$
$$+ 21{,}3 e^{-42{,}1t} \sin(15{,}2t + 136°50')\ V$$

* * *

Passons maintenant à l'étude de la deuxième méthode du calcul des phénomènes transitoires dans les circuits électriques linéaires, à savoir de la méthode opérationnelle.

Rappelons pour commencer certaines considérations déjà connues.

§ 281. Logarithme comme représentation d'un nombre. Nous avons appris à l'école secondaire qu'il est rationnel d'utiliser les logarithmes pour exécuter une multiplication, une division, une élévation de puissance ou une extraction de racine de nombres de plusieurs chiffres.

En effet, l'opération de multiplication se réduit à l'addition des logarithmes, l'opération de division à la soustraction des logarithmes, etc.

Ainsi, nous pouvons faciliter les calculs en réduisant une opération relativement compliquée à une opération plus simple.

Chaque nombre a un logarithme qui lui est propre et, par conséquent, le logarithme peut être considéré comme la représentation d'un nombre.

Ainsi 0,30103 est la représentation (le logarithme) du nombre 2, 10 étant la base de ce logarithme.

§ 282. Les valeurs complexes du courant et de la tension sont les représentations des fonctions sinusoïdales. Nous avons rencontré pour la deuxième fois la notion de la représentation (l'image) en étudiant la méthode symbolique du calcul des circuits à courant sinusoïdal. Conformément à la méthode symbolique l'amplitude complexe est la représentation d'une fonction sinusoïdale. Ainsi $\dot{I}_m$ est la représentation du courant sinusoïdal $I_m \sin(\omega t + \psi)$. Cependant il existe une différence essentielle entre la représentation d'un nombre sous forme de logarithme et la représentation d'une fonction sinusoïdale du temps sous forme d'un nombre complexe.

Dans le premier cas il s'agit de la représentation d'un nombre (et non pas d'une fonction) et dans le deuxième, de la représentation d'une fonction du temps.

De même que l'introduction des logarithmes a simplifié l'exécution des opérations sur les nombres, l'introduction des représentations complexes des fonctions sinusoïdales du temps a permis de simplifier les opérations à exécuter sur les fonctions du temps et de réduire ainsi les opérations de calcul des circuits à courant sinusoïdal aux opérations étudiées dans le premier chapitre « Circuits électriques linéaires à courant continu ».

§ 283. Introduction à la méthode opérationnelle. La méthode opérationnelle dont nous abordons l'étude est également basée sur l'utilisation de la notion de la représentation des fonctions du temps. Dans la méthode opérationnelle à chaque fonction du temps correspond une fonction d'une variable nouvelle, désignée par la lettre p, et, réciproquement, à chaque fonction de la variable p correspond une fonction déterminée du temps.

Le passage des fonctions du temps aux fonctions p est réalisé à l'aide de la transformation de Laplace.

Ainsi, la méthode opérationnelle de calcul des phénomènes transitoires est une méthode de calcul basée sur la transformation de Laplace.

Ici nous pouvons indiquer à l'avance que la méthode opérationnelle permet de réduire l'opération de différentiation à l'opération de multiplication et de remplacer l'opération d'intégration par celle de division. Ceci facilite grandement l'intégration des équations différentielles.

§ 284. Transformation de Laplace. Désignons par p le nombre complexe :

$$p = a + jb, \tag{10.24}$$

où a — partie réelle, b — partie imaginaire de ce nombre complexe.

Par la suite et conformément à l'usage, appelons le coefficient b, compte tenu de son signe, non pas coefficient de la partie imaginaire de la valeur complexe (ce qu'il est en réalité), mais « partie imaginaire ». La fonction du temps (courant, tension, F.E.M., charge) sera désignée par $f(t)$ et appelée l'originale. La fonction $F(p)$ qui lui correspond, appelée image, est définie comme suit :

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{10.25}$$

La correspondance entre la fonction $F(p)$ et la fonction $f(t)$ est écrite de la manière suivante :

$$F(p) \doteqdot f(t).$$

Le signe $\doteqdot$ est appelé signe de correspondance. (10.26)

La limite supérieure de l'intégrale (10.25) est égale à l'infini. Les intégrales à limite supérieure infinie sont appelées intégrales impropres. Si on obtient comme résultat d'intégration et après substitution des limites un nombre fini (et non pas l'infini), on dit que l'intégrale est convergente.

On démontre au cours de mathématiques que l'intégrale (10.25) qui comprend la fonction $e^{-pt} = e^{-at}\, e^{-jbt}$ n'est convergente que lorsque le module de la fonction $f(t)$, s'il augmente avec l'accroissement de t, il augmente en tout cas plus lentement que le module de la fonction e^{pt}, égal à e^{at}.

Pratiquement toutes les fonctions $f(t)$, auxquelles on a affaire en électricité, satisfont à cette condition.

Trouvons les images de certaines fonctions les plus simples.

§ 285. L'image d'une constante est égale à la constante elle-même divisée par p. On demande de trouver l'image de la fonction $f(t) = A$, où A est une constante.

A cette fin substituons A à $f(t)$ dans (10.25) et procédons à l'intégration :

$$F(p) = \int_0^\infty A e^{-pt}\, dt = A\left(-\frac{1}{p}\right) \int_0^\infty d\left(e^{-pt}\right) = -\frac{Ae^{-pt}}{p}\Bigg|_0^\infty = \frac{A}{p}.$$

Par conséquent, l'image d'une constante est la constante elle-même divisée par p :

$$A \doteqdot \frac{A}{p}. \tag{10.27}$$

A côté de la transformation de Laplace (10.25) on utilise souvent dans les ouvrages scientifiques et d'enseignement la transformation de Carson-Heaviside. Cette transformation diffère de celle de Laplace par la présence du facteur p devant l'intégrale dans (10.25) ; autrement dit en utilisant la transformation de Carson-Heaviside on écrit

$$E(p) = p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Suivant Carson-Heaviside l'image et l'original ont les mêmes dimensions et l'image de la constante A est égale à la constante elle-même.

Suivant Laplace les dimensions de l'original ne sont pas égales à celles de l'image et l'image de la constante A est égale à $\frac{A}{p}$.

§ 286. **Image de la fonction exponentielle $e^{\alpha t}$.** Substituons $e^{\alpha t}$ à $f(t)$ dans (10.25):

$$F(p)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty e^{-t(p-\alpha)}\,dt=\left(-\frac{1}{p-\alpha}\right)\int_0^\infty e^{-t(p-\alpha)}\,d[-t(p-\alpha)]=$$

$$=\frac{-1}{p-\alpha}e^{-t(p-\alpha)}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{p-\alpha}(0-1)-\frac{1}{p-\alpha}$$

Ainsi

$$e^{\alpha t}\doteq\frac{1}{p-\alpha}. \tag{10.28}$$

En établissant l'expression (10.28) (en y introduisant les limites) nous avons tenu compte que la partie réelle de l'opérateur p est plus grande que α, c'est-à-dire que $a>\alpha$. L'intégrale n'est convergente qu'à cette condition.

Un certain nombre de conséquences importantes découlent de l'expression (10.28).

En posant $\alpha=j\omega$ pour cette expression, nous obtenons:

$$e^{j\omega t}\doteq\frac{1}{p-j\omega}. \tag{10.29}$$

L'expression (10.29) permet de trouver l'image du courant sinusoïdal complexe:

$$I_m e^{j(\omega t+\psi)}=\dot{I}_m e^{j\omega t}.$$

A cette fin multiplions les deux membres de (10.29) par le nombre constant $\dot{I}_m$. Nous obtenons:

$$\dot{I}_m e^{j\omega t}\doteq\dot{I}_m\frac{1}{p-j\omega}. \tag{10.30}$$

De même l'image de la valeur complexe de la tension sinusoïdale est:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t}\doteq\dot{U}_m\frac{1}{p-j\omega}. \tag{10.31}$$

La fonction $e^{-\alpha t}$ a pour image $\frac{1}{p+\alpha}$ c.-à.-d.

$$e^{-\alpha t}\doteq\frac{1}{p+\alpha}. \tag{10.32}$$

§ 287. **Image de la dérivée première.** On sait que l'image $F(p)$ correspond à la fonction $f(t)$. On demande de trouver l'image de la dérivée première $\frac{df(t)}{dt}$, en sachant que la valeur de la fonction $f(t)$ pour $t=0$ est égale à $f(0)$.

Soumettons la fonction $\frac{df(t)}{dt}$ à la transformation de Laplace

$$\int_0^\infty\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty e^{-pt}\,d[f(t)].$$

Intégrons cette expression par parties; désignons

$$e^{-pt}=u \text{ et } d[f(t)]=dv;\quad \int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Par conséquent,

$$\int_0^\infty e^{-pt}\, d\,[f(t)] = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\, d\,[e^{-pt}].$$

Mais

$$e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty = [0 - f(0)] = -f(0),$$

et

$$-\int_0^\infty f(t)\, d\,(e^{-pt}) = p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = pF(p).$$

Ainsi

$$p \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt}\, dt = pF(p) - f(0),$$

ou

$$\frac{df(t)}{dt} \doteqdot pF(p) - f(0). \qquad (10.33)$$

§ 288. Image de la tension aux bornes d'une inductance. L'image du courant i est égale à $I(p)$. Ecrivons l'image de la tension aux bornes de l'inductance

$$u_L = L\frac{di}{dt}.$$

Conformément à (10.33)

$$\frac{di}{dt} \doteqdot pI(p) - i(0).$$

Ici $i(0)$ est la valeur du courant i pour $t = 0$ *.

Par conséquent,

$$L\frac{di}{dt} \doteqdot LpI(p) - Li(0). \qquad (10.34)$$

Si $i(0) = 0$, on a

$$L\frac{di}{dt} \doteqdot LpI(p). \qquad (10.34')$$

§ 289. Image de la dérivée seconde. Donnons, sans l'établir l'expression

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \doteqdot p^2 F(p) - pf(0) - \left[\frac{df(t)}{dt}\right]_{t=0}. \qquad (10.35)$$

Par conséquent, l'image de la dérivée seconde du courant i est:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} \doteqdot p^2 I(p) - pi(0) - i'(0).$$

---

* Pour simplifier les écritures, remplaçons $i(0_-)$ par $i(0)$; $i(0)$ peut être une valeur positive ou négative: $i(0)$ est positive lorsque le sens du courant $i(0)$ correspond au sens, arbitrairement choisi du courant circulant dans l'inductance L après la commutation.

§ 290. Image d'une intégrale. On demande de trouver l'image de la fonction $\int_0^t f(t)dt$, l'image de la fonction $f(t)$ étant $F(p)$.

A cette fin soumettons la fonction $\int_0^t f(t)dt$ à la transformation de Laplace:

$$\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\,dt\right] e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\,dt\right] d(e^{-pt}).$$

Désignons :

$$\int_0^t f(t)\,dt = u\,;\; d(e^{-pt}) = dv$$

et intégrons par parties

$$-\frac{1}{p}\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt\right] d(e^{-pt}) = -\frac{1}{p}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] e^{-pt}\Big|_0^\infty +$$

$$+\frac{\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt}{p} = \frac{F(p)}{p}.$$

Le premier terme du second membre s'annule aux limites supérieure et inférieure. En substituant la limite supérieure on obtient zéro par suite de la limitation précédemment imposée à la fonction $f(t)$ (voir § 284); nous avons dit en effet que la fonction $f(t)$ peut croître avec t, mais toujours plus lentement que la fonction e^{at}, où a est la partie réelle de p. En substituant la limite inférieure on obtient zéro du fait que $\int_0^t f(t)dt$ devient nul, Par conséquent, si $f(t) \doteqdot F$ (p) on a:

$$\int_0^t f(t)\,dt \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \qquad (10.36)$$

§ 291. Image d'une tension aux bornes d'un condensateur. La tension u_C aux bornes d'un condensateur est souvent écrite sous la forme suivante: $u_C = \frac{1}{C}\int idt$. Dans cette forme d'écriture les limites d'intégration par rapport au temps ne sont pas indiquées. Une forme plus complète d'écriture est l'expression suivante:

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt.$$

On a tenu compte dans cette dernière expression du fait, qu'à l'instant t la tension aux bornes d'un condensateur dépend non seulement du courant traversant ce condensateur dans l'intervalle de temps de 0 à t, mais également de la tension

u_C (0) qui existait à ses bornes pour $t = 0$. Conformément à (10.36) l'image $\frac{1}{C}\int\limits_0^t i\,dt$ est $\frac{I(p)}{Cp}$, tandis que l'image de la tension constante u_C (0) est égale à cette constante divisée par p *. Par conséquent, l'image de la tension aux bornes d'un condensateur doit être écrite comme suit

$$u_C \doteqdot \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}. \qquad (10.37)$$

Nous donnons dans le tableau ci-après les correspondances opérationnelles les plus simples; une partie de ces correspondances a été établie ci-dessus et les autres sont données sans déduction

1. $\frac{1}{p-\alpha} \doteqdot e^{\alpha t}$.

2. $\frac{1}{p+\alpha} \doteqdot e^{-\alpha t}$.

3. $\frac{1}{p-j\omega} \doteqdot e^{j\omega t}$.

4. $\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \doteqdot 1-e^{-\alpha t}$.

5. $\frac{1}{(p+\alpha)^2} \doteqdot te^{-\alpha t}$.

6. $\frac{p}{(p+\alpha)^2} \doteqdot (1-\alpha t)\,e^{-\alpha t}$.

7. $\frac{1}{p(p+\alpha)^2} \doteqdot \frac{1}{\alpha^2}[1-e^{-\alpha t}(1+\alpha t)]$.

8. $\frac{1}{p^2(p+a)} \doteqdot \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-at}}{a^2}$.

9. $\frac{p}{(p+a)(p+b)} \doteqdot \frac{1}{a-b}(ae^{-at} - be^{-bt})$.

10. $\frac{1}{(p+a)(p+b)} \doteqdot \frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$.

11. $\frac{1}{p(p+a)(p+b)} \doteqdot \frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a}\right)$.

12. $\frac{1}{p^2} \doteqdot t$.

§ 292. Loi d'Ohm sous forme opérationnelle. F.E.M. internes. Une partie d'un circuit électrique ramifié compliqué est représentée sur la fig. 318. La branche de ce circuit, intercalée entre les nœuds a et b, comprend R, L, C et une source de F.E.M. $e(t)$. Désignons par i le courant circulant dans cette branche.

---

* Pour simplifier les écritures, remplaçons $u_C(0)$ par $u_C(0)$; $u_C(0)$ peut être une valeur positive ou négative. Dans l'expression (10.37) $u_C(0)$ doit être considérée comme positive si le sens de la tension $u_C(0)$ correspond au sens, arbitrairement choisi, du courant circulant dans le condensateur après la commutation.

On ferme l'interrupteur K, existant dans ce circuit, ce qui donne lieu à un régime transitoire. Désignons le courant immédiatement avant la commutation par $i = i\,(0)$ et la tension aux bornes du condensateur par $u_C = u_C\,(0)$.

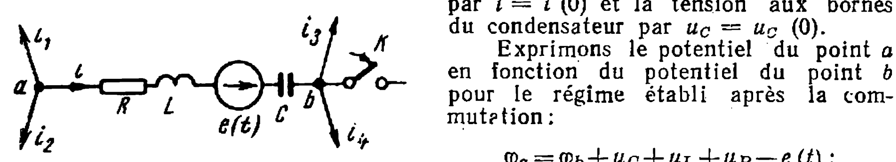


Fig. 318

Exprimons le potentiel du point a en fonction du potentiel du point b pour le régime établi après la commutation :

$$\varphi_a = \varphi_b + u_C + u_L + u_R - e\,(t)\,;$$
$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = u_R + u_L + u_C - e\,(t).$$

Ecrivons $L\frac{di}{dt}$ au lieu de u_L et au lieu de u_C écrivons

$$u_C\,(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt.$$

On a alors

$$u_{ab} = iR + L\frac{di}{dt} + u_C\,(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - e\,(t). \tag{10.38}$$

Appliquons la transformation de Laplace à l'équation (10.38). La transformation de Laplace est une transformation linéaire et, par conséquent, l'image de la somme est égale à la somme des images.

Remplaçons chaque terme de (10.38) par son image:
nous aurons alors $RI\,(p)$ au lieu de iR;
écrivons de même $U_{ab}(p)$ au lieu de u_{ab};

$$L\frac{di}{dt} \div LpI\,(p) - Li\,(0)\,; \qquad u_C\,(0) \div \frac{u_C\,(0)}{p}\,;$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \div \frac{I\,(p)}{Cp}\,; \qquad e\,(t) \div E\,(p).$$

Nous obtenons ainsi

$$U_{ab}\,(p) = I\,(p)\left(R + pL + \frac{1}{Cp}\right) - Li\,(0) + \frac{u_C\,(0)}{p} - E\,(p). \tag{10.39}$$

L'avantage de la transformation ainsi effectuée consiste dans le remplacement de l'équation différentielle (10.38) par une équation algébrique (10.39), liant l'image du courant $I\,(p)$ à celle de la F.E.M. $E\,(p)$ et à l'image de la tension $U_{ab}\,(p)$. Il découle de (10.39) que

$$I_p = \frac{U_{ab}\,(p) + Li\,(0) - \frac{u_C\,(0)}{p} + E\,(p)}{Z\,(p)}\,. \tag{10.40}$$

Ici

$$Z_{(p)} = R + pL + \frac{1}{Cp}\,.$$

$Z\,(p)$ — impédance opérationnelle du tronçon du circuit, intercalé entre les points a et b.

Sa structure est analogue à la structure de l'impédance complexe du même tronçon du circuit en courant alternatif, si on remplace $j\omega$ par p (voir § 266) *.

L'équation (10.40) peut être appelée loi d'Ohm sous forme opérationnelle pour un tronçon du circuit comprenant une F.E.M. Elle a été écrite ici pour des conditions initiales non nulles.

Le terme $Li(0)$ représente une F.E.M. interne, due à la réserve d'énergie dans le champ magnétique de l'inductance L, accumulée du fait du passage du courant $i(0)$ dans cette inductance immédiatement avant la commutation.

Le terme $\frac{u_C(0)}{p}$ représente une F.E.M. interne, due à la réserve d'énergie dans le champ électrique du condensateur, accumulée grâce à la présence de la tension $u_C(0)$ aux bornes de ce condensateur immédiatement avant la commutation.

Dans le cas particulier où il n'existe pas de F.E.M. $e(t)$ aux bornes du tronçon ab et lorsqu'à l'instant de la commutation $i(0)=0$ et $u_C(0)=0$, l'équation (10.40) prend la forme plus simple suivante:

$$I(p)=\frac{U_{ab}(p)}{Z(p)}. \tag{10.41}$$

L'équation (10.41) est l'expression mathématique de la loi d'Ohm dans sa forme opérationnelle, pour un tronçon de circuit ne comprenant pas de F.E.M. et des conditions initiales nulles.

§ 293. Première loi de Kirchhoff sous sa forme opérationnelle. Conformément à la première loi de Kirchhoff la somme algébrique des valeurs instantanées des courants arrivant ou partant d'un nœud quelconque du circuit est nulle. Ainsi, pour le nœud a du circuit de la fig. 318

$$i_1-i-i_2=0. \tag{10.42}$$

Appliquons la transformation de Laplace à l'équation (10.42) en profitant du fait que l'image de la somme est égale à la somme des images.

Nous avons

$$I_1(p)-I(p)-I_2(p)=0.$$

Et dans le cas général

$$\Sigma I(p)=0. \tag{10.43}$$

L'équation (10.43) exprime la première loi de Kirchhoff sous sa forme opérationnelle.

§ 294. Deuxième loi de Kirchhoff sous sa forme opérationnelle. Pour une maille quelconque d'un circuit électrique on peut écrire l'équation de la deuxième loi de Kirchhoff pour les valeurs instantanées des grandeurs qui en font partie.

On sait que pour cela il faut commencer par choisir le sens positif pour les courants circulant dans les diverses branches du circuit, ainsi que le sens positif du parcours de la maille.

Écrivons l'équation de la deuxième loi de Kirchhoff pour le circuit fermé de la fig. 319.

Ce circuit est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

Rappelons que les inductances L_1 et L_2 sont couplées magnétiquement. Pour les sens positifs choisis pour les courants i_1 et i_2, L_1 et L_2 sont couplés en concordance.

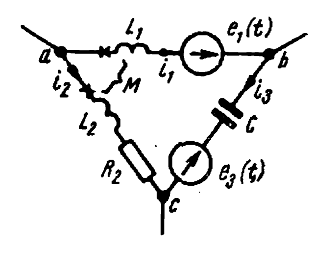


Fig. 319

* Ecrivons le nombre complexe $p=a+jb$ (voir § 284) de la manière suivante: $p=j\Omega$, où $\Omega=b-ja$ peut être appelé fréquence angulaire complexe. $Z(p)=Z(j\Omega)$ est l'impédance opposée par le circuit considéré à l'action de $Ue^{j\Omega t}$, de même que $Z(j\omega)$ est l'impédance opposée à une action de la forme $Ue^{j\omega t}$.

La chute de tension dans L_1 comprend deux termes $L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$. La chute de tension dans L_2 est égale à $L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$. En écrivant l'équation, il ne faut pas oublier que la tension initiale aux bornes du condensateur est égale à $u_C(0)$. Supposons qu'elle agisse en concordance avec le courant i_3. La valeur initiale du courant i_1 est égale à $i_1(0)$, tandis que la valeur initiale du courant i_2 est égale à $i_2(0)$. Nous avons ainsi

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_3\, dt - i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = e_1(t) - e_3(t). \tag{10.44}$$

Remplaçons chacun des termes de (10.44) par son image :

$$\left.\begin{aligned}
L_1 \frac{di_1}{dt} &\doteqdot L_1 p I_1(p) - L_1 i_1(0);\\
M \frac{di_2}{dt} &\doteqdot M p I_2(p) - M i_2(0);\\
\frac{1}{C} \int_0^t i_3\, dt &\doteqdot \frac{I_3(p)}{Cp};\\
i_2 R_2 &\doteqdot R_2 I_2(p);\\
L_2 \frac{di_2}{dt} &\doteqdot L_2 p I_2(p) - L_2 i_2(0);\\
M \frac{di_1}{dt} &\doteqdot M p I_1(p) - M i_1(0);\\
e_1(t) &\doteqdot E_1(p);\\
e_3(t) &\doteqdot E_3(p).
\end{aligned}\right\} \tag{10.45}$$

Substituons (10.45) dans (10.44), rassemblons les termes comprenant $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$, transportons dans le second membre $\frac{u_C(0)}{p}$, $L_1 i_1(0)$ et les autres F.E.M. internes; nous obtenons alors:

$$I_1(p) Z_1(p) + I_2(p) Z_2(p) + I_3(p) Z_3(p) = E_1(p) - E_3(p) + E_{int}(p). \tag{10.46}$$

Ici

$$Z_1(p) = p(L_1 - M); \quad Z_2(p) = p(M - L_2) - R_2; \quad Z_3(p) = \frac{1}{Cp};$$

$$E_{int}(p) = [(L_1 - M) i_1(0) + (M - L_2) i_2(0)] - \frac{u_C(0)}{p}.$$

Dans sa forme plus générale l'équation (10.46) peut être récrite ainsi :

$$\sum I_k(p) Z_k(p) = \sum E_k(p). \tag{10.47}$$

L'équation (10.47) est l'expression mathématique de la deuxième loi de Kirchhoff dans sa forme opérationnelle. Le terme $E_k(p)$ comprend en général les F.E.M. internes également.

§ 295. Toutes les méthodes examinées dans la section traitant le courant sinusoïdal peuvent être utilisées pour établir les équations pour les images. Des équations, écrites conformément aux lois de Kirchhoff pour les valeurs instantanées, découlent

des équations correspondantes, écrites conformément aux mêmes lois pour les images.

Les équations pour les images sont entièrement analogues par leur forme aux équations écrites pour le même circuit par la méthode symbolique pour les valeurs complexes des courants et des tensions.

Mais puisque à chaque équation écrite pour les valeurs complexes correspond une équation appropriée pour les images, on peut dire que toutes les méthodes et modes d'établissement des équations, basés sur les lois de Kirchhoff (méthode du générateur équivalent, méthode des courants fictifs maillés, méthode des potentiels de nœud, méthode de superposition, etc.) peuvent être utilisés pour établir les équations pour les images.

En écrivant les équations pour les images on doit tenir compte des conditions initiales non nulles en faisant appel aux F.E.M. « internes », dues aux courants initiaux, circulant dans les inductances et aux tensions initiales aux bornes des capacités.

§ 296. Ordre des opérations de calcul pour la méthode opérationnelle.

Le calcul comprend les deux étapes principales suivantes:

1. Composition de l'image de la fonction du temps cherchée.
2. Passage de l'image à la fonction du temps.

Montrons à l'aide de quelques exemples concrets comment on exécute à la première étape. La deuxième étape sera examinée au § 298.

Exemple 134. Le circuit de la fig. 320, se trouvant dans les conditions initiales nulles, on enclenche l'interrupteur qui en fait partie. Ecrire les images opérationnelles des courants i_1 et i_3 en utilisant la méthode des courants fictifs maillés.

Solution. Les sens des courants fictifs maillés i_{11} et i_{22} sont indiqués sur le schéma. Nous avons

$$i_{11}R_1 + L_1\frac{di_{11}}{dt} + R_2(i_{11} - i_{22}) = e(t);$$

$$\frac{1}{C}\int i_{22}dt + R_2(i_{22} - i_{11}) = 0.$$

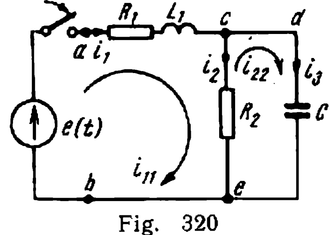


Fig. 320

Passons maintenant aux images:

$$I_{11}(p)(pL_1 + R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 = E(p);$$

$$-I_{11}(p)R_2 + I_{22}(p)\left(R_2 + \frac{1}{Cp}\right) = 0.$$

La solution en commun de ces deux équations à deux inconnues donne :

$$I_{11}(p) = \frac{E(p)(1 + R_2Cp)}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}; \qquad (10.48)$$

$$I_{22}(p) = \frac{E(p)R_2Cp}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}. \qquad (10.49)$$

L'image du courant fictif maillé $I_{11}(p)$ est égale à l'image du courant $I_1(p)$. L'image $I_{22}(p)$ est égale à l'image $I_3(p)$. Dans les expressions (10.48) et (10.49) $E(p)$ est l'image de la F.E.M. $e(t)$. Si $e(t) = E$, $E(p)$ est égale à $\frac{E}{p}$; si

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

on a

$$E(p) = \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega},$$

ect.

Exemple 135. Ecrire les images des courants i_1 et i_3 du circuit de la fig. 320, en utilisant les lois d'Ohm et de Kirchhoff.

Solution. Du fait que pour ce circuit les conditions initiales sont nulles et qu'il n'y existe pas de bobines d'inductance couplées magnétiquement, on peut établir les équations nécessaires d'une manière plus simple que par la méthode des courants fictifs maillés.

Image du courant

$$I_1(p)=\frac{E(p)}{E_{ent}(p)}.$$

$Z_{ent}(p)$ — impédance d'entrée du circuit par rapport aux bornes ab dans sa forme opérationnelle. Elle est déterminée de la même manière qu'une impédance d'entrée en courant alternatif, il suffit de remplacer $j\omega$ par p.

On a pour le courant alternatif

$$Z_{ent}=R_1+j\omega l_1+\frac{R_2\frac{1}{j\omega C}}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}.$$

Impédance opérationnelle d'entrée

$$Z_{ent}(p)=R_1+pL_1+\frac{R_2\frac{1}{Cp}}{R_2+\frac{1}{Cp}}=\frac{p^2L_1CR_2+p\,(L_1+R_1R_2C)+R_1+R_2}{1+R_2Cp}.$$

Par conséquent,

$$I_1(p)=\frac{E(p)}{Z(p)}=\frac{E(p)\cdot(1+R_2Cp)}{p^2L_1CR_2+p\,(L_1+R_1R_2C)+R_1+R_2}. \qquad (10.48')$$

L'équation (10.48′) concorde avec (10.48).

Trouvons l'image $I_3(p)$. A cette fin exprimons $I_3(p)$ en fonction de $I_1(p)$, ainsi que des résistances opérationnelles des deuxième et troisième branches. Faisons appel à l'analogie avec le courant alternatif. Nous avons pour ce dernier

$$\dot{I}_3=\dot{I}_1\frac{R_2}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}.$$

Par conséquent,

$$I_3(p)=I_1(p)\,\frac{R_2}{R_2+\frac{1}{Cp}}.$$

Si nous substituons dans cette dernière expression $I_1(p)$, prise de l'équation (10.48), nous obtenons l'équation (10.49).

Ainsi, peu importe la méthode utilisée pour déterminer l'image des courants : dans tous les cas le résultat est le même.

Exemple 136. Pour le circuit de la fig. 320 écrivons l'image de la tension aux bornes ce, en supposant que les conditions initiales sont nulles (de même que dans l'exemple 135).

S o l u t i o n. L'image de la tension aux bornes *ce* est égale au produit de l'image du courant $I_3(p)$ par la résistance opérationnelle du condensateur :

$$U_{ce}(p) = I_3(p)\frac{1}{Cp} = \frac{E(p)R_2}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2}. \quad (10.50)$$

§ 297. Image d'une fonction du temps peut être écrite sous la forme de rapport $\frac{N(p)}{M(p)}$ de deux polynômes en p. Ainsi pour le courant $I_{11}(p)$ de l'exemple 134, si on prend $E(p) = \frac{E}{p}$.

$$N(p) = E(1 + R_2Cp);$$

$$M(p) = [p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2]\,p.$$

Si pour le même exemple on suppose que

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

on obtient

$$E(p) = \dot{E}_m \frac{1}{p - j\omega} \quad \text{et} \quad N(p) = \dot{E}_m(1 + R_2Cp);$$

$$M(p) = (p - j\omega)[p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C + L_1) + R_1 + R_2].$$

Désignons la puissance la plus élevée de l'opérateur p dans le polynôme $N(p)$ par n et la puissance la plus élevée de p dans le polynôme $M(p)$ par m.

Dans tous les circuits électriques réalisables au point de vue physique et pour toutes les F.E.M. pouvant être rencontrées dans la pratique on a toujours $n < m$. Ce n'est que pour les circuits électriques ne pouvant être réalisés physiquement que n peut se trouver être égal à m, mais ces problèmes ne présentent pas d'intérêt.

L'exemple d'un circuit électrique irréalisable physiquement, pour lequel la puissance n est supérieure à la puissance m est donné sur la fig. 321. Si on suppose que la résistance active du circuit soit nulle, ce qui n'est pas réalisable physiquement, on a

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p}}{\frac{1}{Cp}} = \frac{ECp}{p}.$$

Dans ce cas $n = 1$ et $m = 1$.

§ 298. Du passage d'une image à une fonction du temps. Nous avons indiqué au § 296 que la deuxième étape de calcul des phénomènes transitoires à l'aide de la méthode opérationnelle est le passage de l'image à la fonction du temps. Cette opération peut être réalisée par des méthodes différentes. La première méthode consiste dans l'utilisation des expressions de la correspondance entre les fonctions de l'opérateur p et les fonctions du temps.

Un certain nombre de formules de correspondance a été donné au tableau sur la page 387. En outre il existe des ouvrages scientifiques consacrés à ces questions comprenant des tableaux très complets de formules de correspondance (1518 formules) embrassant tous les problèmes qu'on peut rencontrer dans la pratique. Il est recommandé d'utiliser les formules de correspondance données dans le tableau lorsque parmi les racines de l'équation $M(p) = 0$, il existe plusieurs racines identiques (racines multiples).

Dans la deuxième méthode on fait appel à la formule dite de décomposition (voir § 301). La formule de décomposition, donnée au § 301, a été établie en partant de l'hypothèse que l'équation $M(p) = 0$ n'a pas de racines multiples (en

présence de racines multiples la formule de décomposition doit être écrite différemment).

Pour la très grande majorité des problèmes cette restriction ne présente pas d'inconvénient.

On utilise largement la formule de décomposition dans la pratique et on la considère habituellement comme la voie principale pour passer de l'image à la fonction du temps.

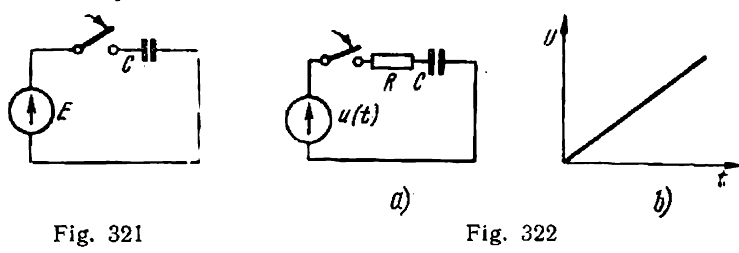


Fig. 321 Fig. 322

Examinons deux exemples d'emploi des formules de correspondance, et ensuite, après avoir étudié le problème de la décomposition d'une fraction complexe en fractions simples, procédons à l'établissement de la formule de décomposition.

Exemple 137. Dans le circuit de la fig. 322, *a*, la tension de la source varie suivant la loi $u(t) = 2500\,t\ V$ (fig. 322, *b*), $R = 400\,\Omega$, $C = 200\,\mu F$. Trouver la loi de variation de la tension aux bornes du condensateur, ainsi que la valeur de u_C pour $t = 0{,}1\ s$.

Solution. $Z(p) = R + \frac{1}{Cp} = \frac{RCp+1}{Cp}$.

L'image de la tension $2500t$ est égale à $\frac{2500}{p^2}$ (voir la correspondance 12 dans le tableau sur la page 387). Par conséquent,

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{2500Cp}{p^2(RCp+1)};$$

$$U_C(p) = I(p)\frac{1}{Cp} = \frac{2500}{RC}\,\frac{1}{p^2\left(p+\frac{1}{RC}\right)}. \qquad (10.51)$$

A l'aide du tableau nous trouvons

$$\frac{1}{p^2(p+a)} \doteqdot \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}(1-e^{-at}).$$

Dans l'exemple présent :

$$a = \frac{1}{RC} = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5\ s^{-1}; \quad \frac{1}{a^2} = \frac{1}{155} = 0{,}00645;$$

$$\frac{2500}{RC} = 31\,300; \quad u_C = 31\,300\left[\frac{t}{12{,}5} - 0{,}00645\,(1-e^{-12,5t})\right].$$

Pour $t = 0{,}1 s$

$$u_C = 31\,300\,(0{,}008 - 0{,}00645 \cdot 0{,}714) = 106{,}5\ V.$$

Exemple 138. Pour le circuit de la fig. 323

$$u(t) = 100e^{-at}\ V,$$

où :

$$a = 0{,}5 s^{-1}; \quad R = 2\,\Omega; \quad L = 4\,H.$$

Trouver $i = f(t)$ et $u_L = f(t)$, ainsi que les valeurs i et u_L pour $t = 1\ s$.

Solution. Il découle du tableau que la fonction e^{-at} a pour image $\frac{1}{p+a}$. Par conséquent,

$$U(p)=\frac{100}{p+a};$$

$$Z(p)=R+pL;$$

$$I(p)=\frac{U(p)}{Z(p)}=\frac{100}{(p+a)(pL+R)}=\frac{100}{L}\frac{1}{(p+a)(p+b)};$$

$$\frac{100}{L}=25\ A/s$$

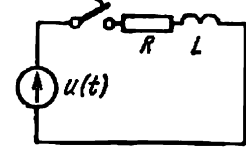


Fig. 323

Puisque $b=\frac{R}{L}=0{,}5=a$, on a

$$I(p)=\frac{100}{L}\frac{1}{(p+a)^2}.$$

A l'aide du tableau trouvons

$$\frac{1}{(p+a)^2}=te^{-at}.$$

Par conséquent,

$$i(t)=25\,te^{-at}.$$

Tension aux bornes de l'inductance

$$u_L=L\frac{di}{dt}=100e^{-0{,}5t}(1-0{,}5t).$$

Pour $t=1\ s$

$$i=25\cdot 1\cdot e^{-0{,}5}=15{,}15\ A;\qquad u_L=100\,e^{-0{,}5}(1-0{,}5)=30{,}3\ V.$$

§ 299. Décomposition d'une fraction compliquée en fractions simples. Il a été indiqué au cours de mathématiques qu'une fraction de la forme

$$\frac{N(x)}{M(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$

avec $n\leqslant m$ et le polynôme

$$M(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0=0$$

ne possédant pas de racines multiples, peut être représentée par une somme de fractions simples:

$$\frac{N(x)}{M(x)}=A_1\frac{1}{x-x_1}+A_2\frac{1}{x-x_2}+\ldots+A_m\frac{1}{x-x_m},\qquad(10.52)$$

ou

$$\frac{N(x)}{M(x)}=\sum_{k=1}^{m}A_k\frac{1}{x-x_k}$$

Ici x_k — racines de l'équation $M(x)=0$.

Les coefficients constants $A_1, A_2, \ldots, A_m$ peuvent être trouvés par deux méthodes différentes. La première d'entre elles, celle des coefficients indéterminés, est plus élémentaire, mais demande des calculs plus fastidieux, tandis que la deuxième, plus compliquée en apparence, est plus simple et plus commode en réalité et surtout plus « ordonnée ».

Exposons ces deux méthodes de détermination des coefficients.

La première méthode consiste à réduire le second membre de (10.52) à un dénominateur commun et, ensuite, en identifiant les coefficients des mêmes puissances de x à établir un système d'équations pour calculer les coefficients $A_1, A_2 \ldots$

Exemple 139. Décomposer la fraction $\frac{1}{x^2-5x+6}$ en une somme de fractions simples.

Solution. Dans l'exemple présent $N(x) = 1$ et $M(x) = x^2 - 5x+6$. Trouvons les racines de l'équation

$$M(x)=0;$$

$$M(x)=x^2-5x+6=0.$$

Il en découle que

$$x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}.$$

Par conséquent, $x_1=2$ et $x_3=3$. Donc

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=A_1\frac{1}{x-2}+A_2\frac{1}{x-3}$$

Réduisons le second membre à un dénominateur commun:

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A_1(x-3)+A_2(x-2)}{x^2-5x+6}.$$

L'identification des coefficients de x dans les deux membres donne:

$$A_1+A_2=0.$$

Identification des termes constants:

$$1=-3A_1-2A_1.$$

La solution en commun de ces deux équations permet d'obtenir le résultat suivant:

$$A_1=-1; \qquad A_2=1.$$

Ainsi:

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}.$$

Examinons maintenant la deuxième méthode de détermination des coefficients $A_1, A_2, \ldots$

Pour calculer le coefficient A_1, multiplions les membres de (10.52) par $(x - x_1)$. Nous obtenons

$$\frac{N(x)}{M(x)}(x-x_1)=A_1+(x-x_1)\sum_{k=2}^{k=m}A_k\frac{1}{x-x_k}. \qquad (10.53)$$

Examinons l'expression (10.53) lorsque x tend vers x_1. Son second membre donne A_1, tandis que son premier membre est une indétermination, puisque le facteur $(x - x_1)$ devient nul pour $x \to x_1$ et que le dénominateur $M(x)$ pour $x = x_1$ est également nul [x_1 est racine de l'équation $M(x) = 0$].

Levons l'indétermination à l'aide de la règle de L'Hôpital. A cette fin, divisons la dérivée du numérateur par la dérivée du dénominateur et trouvons la limite de la fraction ainsi obtenue:

$$\lim_{x\to x_1}\frac{(x-x_1)N(x)}{M(x)}=\lim_{x\to x_1}\frac{N(x)+(x-x_1)N'(x)}{M'(x)}=\frac{N(x_1)}{M'(x_1)}.$$

Ici $M'(x)$ — dérivée de $M(x)$ par rapport à x; $M'(x_1)$ — valeur de $M'(x)$ pour $x = x_1$; $N(x_1)$ — valeur de $N(x)$ pour $x = x_1$.

Par conséquent, en partant de (10.54) et pour $x \longrightarrow x_1$ nous obtenons l'équation suivante:

$$\frac{N(x_1)}{M'(x_1)} = A_1$$

d'où

$$A_1 = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)}. \tag{10.54}$$

De même

$$A_2 = \frac{N(x_2)}{M'(x_2)}. \tag{10.55}$$

Et en général :

$$A_k = \frac{N(x_k)}{M'(x_k)}. \tag{10.56}$$

Ainsi

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)} \frac{1}{x-x_1} + \frac{N(x_2)}{M'(x_2)} \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{N(x_m)}{M'(x_m)} \frac{1}{x-x_m}, \tag{10.57}$$

ou

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{N(x_k)}{M'(x_k)} \frac{1}{x-x_k}. \tag{10.58}$$

E x e m p l e 140. Trouver les coefficients de la décomposition de la fraction $\frac{1}{x^2-5x+6}$, en utilisant la deuxième méthode.

S o l u t i o n. Les racines de l'équation $M(x) = 0$ sont connues de l'exemple 139. Elles sont: $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.

$$M'(x) = 2x-5; \quad M'(x_1) = 2 \cdot 2 - 5 = -1; \quad N(x_1) = 1.$$

D'après (10.56)

$$M'(x_2) = 1; \quad N(x_2) = 1;$$

$$A_1 = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)} = \frac{1}{(-1)} = -1;$$

$$A_2 = \frac{N(x_2)}{M'(x_2)} = \frac{1}{1} = 1.$$

ce qui correspond aux résultats obtenus par la première méthode.

§ 300. Formule de décomposition. Le passage de l'image $\frac{N(p)}{M(p)}$ à la fonction du temps est fait souvent à l'aide de la formule:

$$\frac{N(p)}{M(p)} \doteqdot \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t} \tag{10.59}$$

qu'on appelle habituellement formule de décomposition.

Le premier membre de cette formule est une fonction de p et son second membre est la fonction correspondante du temps t.

§ 301. Etablissement de la formule de décomposition. Supposons que l'image d'une fonction quelconque du temps, du courant par exemple, soit écrite sous forme d'une fraction:

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Pour obtenir le courant en fonction du temps $i(t)$, représentons d'abord $\frac{N(p)}{M(p)}$ sous la forme d'une somme des fractions simples, autrement dit décomposons $\frac{N(p)}{M(p)}$. A cette fin remplaçons x par p dans (10.58):

$$I(p)=\frac{N(p)}{M(p)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\,\frac{1}{p-p_k}. \tag{10.60}$$

Passons maintenant de l'image à l'original. L'original du premier membre est $i(t)$. L'original du second membre est égale à la somme des originales de ses termes.

Rappelons que les facteurs $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$ des termes de la somme du second membre de (10.60) sont des nombres constants (et non des fonctions de p!). N'oublions pas non plus que les fonctions de p dans ce deuxième membre sont tous les facteurs $\frac{1}{p-p_k}$, auxquels correspondent des fonctions du temps de la forme $e^{p_k t}$ [voir (10.28)]. Par conséquent,

$$i(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\,e^{p_k t}. \tag{10.61}$$

Le passage de l'image (de la fonction de p) à l'original (fonction t) à l'aide de la formule de décomposition (10.61) repose sur l'écriture de l'image sous la forme d'une somme de fractions simples $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\,\frac{1}{p-p_k}$, les originaux de ces fractions étant des exponentielles $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\,e^{p_k t}$.

Le nombre des termes $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}\,e^{p_k t}$ est égal au nombre de racines de l'équation $M(p)=0$. Les coefficients $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$ peuvent être comparés aux constantes d'intégration d'une équation différentielle (ou des équations différentielles) d'un circuit dans la méthode classique de calcul.

Si parmi les racines de l'équation $M(x)=0$ on trouve $x=0$, il correspond à cette racine dans le second membre de (10.61) le terme

$$\frac{N(0)}{M'(0)}\,e^{0\cdot t}=\frac{N(0)}{M'(0)}.$$

Le terme $\frac{N(0)}{M'(0)}$ est une composante du courant cherché, ou de la tension cherchée respectivement, due aux F.E.M. continues. S'il n'existe pas de F.E.M. continues dans le circuit, $\frac{N(0)}{M'(0)}=0$.

Il y a lieu de faire ici les remarques suivantes sur la formule (10.61):

1. La formule de décomposition est utilisable pour des conditions initiales quelconques et pour des formes quelconques, pouvant exister dans la pratique, de la tension agissant sur le circuit considéré.

2. Si les conditions initiales ne sont pas nulles, ceci se manifeste par la présence dans $N(p)$ des F.E.M. « internes ».

3. Si l'équation $M(p)=0$ a des racines complexes conjuguées, les termes correspondant à ces racines dans (10.61) sont également complexes conjugués et leur somme donne un terme réel.

4. Si la F.E.M. agissant sur le circuit est sinusoïdale $[E_m \sin(\omega t + \psi)]$ et si on prend l'image de cette F.E.M. sous la forme $\dot{E}_m \frac{1}{p + j\omega}$, où l'amplitude complexe est $\dot{E}_m = E_m e^{j\psi}$, il faut, en utilisant la formule de décomposition, pour passer de la valeur complexe à la valeur instantanée, prendre dans son second membre le coefficient de j (prendre sa partie imaginaire) *.

De ce fait les F.E.M. « internes » qui peuvent apparaître dans le second membre de la formule de décomposition, lorsque les conditions initiales ne sont pas nulles dans les circuits à F.E.M. sinusoïdale, doivent être multipliées par le coefficient j.

Il faut multiplier les F.E.M. internes par j, parce que c'est sous cette seule condition que la présence des F.E.M. internes est enregistrée lorsqu'on prend la partie imaginaire du second membre de la formule de décomposition. Pour les circuits à F.E.M. continue, il n'y a pas lieu de multiplier les F.E.M. internes par j.

5. Si la tension agissant sur le circuit est sinusoïdale, la composante forcée de la solution fait partie des termes $\sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$ et est déterminée par la racine $p = j\omega$. Le calcul de la composante forcée sous forme du terme de cette somme, correspondant à la racine $p = j\omega$, pour les circuits compliqués, est en général quelque peu plus fastidieux que son calcul direct par la méthode symbolique. Par conséquent, pour les circuits compliqués à courant alternatif nous recommandons de calculer la composante forcée par la méthode symbolique et non pas comme celui des termes de la somme de (10.61), qui correspond à la racine $p = j\omega$.

Evidemment, on peut, en utilisant une expression similaire à (10,61), calculer non seulement les courants et les tensions, mais également d'autres fonctions quelconques du temps (charge d'un condensateur, vitesse de déplacement d'un corps quelconque d'un système mécanique, etc.).

Examinons deux exemples d'utilisation de la formule de décomposition.

Exemple 141. Calculer le courant $i_1(t)$ du circuit de la fig. 310 à l'aide de la formule de décomposition et comparer le résultat obtenu avec celui donné par la solution du problème par la méthode classique (voir exemple 129); soit $E = 150\ V$; $R = R_1' = R_3 = 50\,\Omega$, $C = 100\,\mu F$.

Solution. Ecrivons l'équation pour les images des courants conformément aux lois de Kirchhoff **. N'oublions pas que les conditions initiales ne sont pas nulles pour ce circuit:

$$I_1(p)\,R_1 + \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I_2(p)}{Cp} = \frac{E}{p};$$

$$I_1(p)\,R_1 + I_3(p)\,R_3 = \frac{E}{p};$$

$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0,$$

où $\frac{(0)\,u_c}{p} = 50\ V$ représente la F.E.M. « interne » due à la réserve d'énergie accumulée dans le champ électrique du condensateur avant le commencement du phénomène transitoire.

En partant du système à trois équations trouvons $I_1(p)$:

$$I_1(p) = \frac{[E - u_C(0)]\,R_3Cp + E}{p\,(R_1R_3Cp + R_1 + R_3)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

---

* On prend la partie imaginaire, et non pas la partie réelle de la formule de décomposition, car la F.E.M. $E_m \sin(\omega t + \psi)$ donnée est la partie imaginaire de l'expression complexe $E_m e^{j\omega t}$ (voir § 85).

** Les équations doivent être établies pour le circuit résultant de la commutation.

L'équation $M(p)=0$ a pour racines $p_1=0$;

$$p_2=\frac{R_1+R_3}{R_1R_3C}=-400s^{-1};$$

$$N(p_1)=E=150; \qquad M'(p)=2R_1R_3Cp+R_1+R_3;$$

$$M'(p_1)=R_1+R_3=100; \qquad M'(p_2)=2\cdot 50\cdot 50\cdot 100\cdot 10^{-6}(-400)+100=-100.$$

$$N(p_2)=(150-50)\cdot 50\cdot 100\cdot(-400)\cdot 10^{-6}+150=-50;$$

$$i_1(t)=\frac{150}{100}+\frac{(-50)\,e^{-400t}}{(-100)}=1{,}5+0{,}5e^{-400t}\text{A},$$

ce qui correspond au résultat obtenu dans l'exemple 129.

Exemple 142. Trouver $i(t)$ pour le circuit de la fig. 314 en utilisant la formule de décomposition et comparer le résultat ainsi obtenu avec celui donné par la solution du même problème par la méthode classique (voir exemple 131).

Solution. L'image de la F.E.M. sinusoïdale 127 sin (314 t — 50°) est:

$$E(p)=\dot{E}_m\frac{1}{p-j\omega}$$

où

$$\dot{E}_m=127e^{-j50^\circ}\ V.$$

Les conditions initiales ne sont pas nulles pour ce circuit:

$$I(p)(R_2+pL)=E(p)+Li(0);$$

$$i(0_-)=-25{,}35\ A.$$

Puisque la F.E.M. agissant dans ce circuit est sinusoïdale, et que son image est prise sous la forme $\dot{E}_m\frac{1}{p-j\omega}$ (où $\dot{E}_m$ — amplitude complexe) et que par la suite il faudra prendre de ce fait le coefficient de la partie imaginaire figurant dans le second membre de la formule de décomposition (voir n° 4, § 301), multiplions la F.E.M. « interne » $Li(0)$ par j.

Après quelques transformations simples nous obtenons $I(p)$:

$$I(p)=\frac{E_m+jLi(0)(p-j\omega)}{(p-j\omega)(R_2+pL)}=\frac{N(p)}{M(p)};$$

$$N(p)=\dot{E}_m+jLi(0)(p-j\omega); \quad M(p)=(p-j\omega)(R_2+pL).$$

L'équation $M(p)=0$ a deux racines:

$$p_1=j\omega s^{-1} \text{ et } p_2=-\frac{R_2}{L}=-210\,s^{-1};$$

$$M'(p)=R_2+pL+L(p-j\omega);$$

$$M'(p_1)=2+3j=3{,}61\,e^{j56^\circ 20'}; \; M'(p_2)=-3{,}61\,e^{j56^\circ 20'}=3{,}61\,e^{-j123^\circ 40'}$$

$$N(p_1)=127\,e^{-j50^\circ}; \; N(p_2)=127\,e^{-j50^\circ}+j(-210-j\,314)\times$$

$$\times\frac{3}{314}(-25{,}35)=5{,}4-j\,46{,}4=47{,}1\,e^{-j83^\circ 24'}$$

$$i(t)=\text{Im}\left[\frac{127e^{j(\omega t-50^\circ)}}{3{,}61e^{j156^\circ 20'}}+\frac{47{,}1e^{-j83^\circ 24'}}{3{,}61e^{-j125^\circ 40'}}\,e^{-210t}\right]=$$

$$=35{,}2\sin(\omega t-106^\circ 20')+13\sin 40^\circ 16' e^{-210t}\ A;$$

$$13\sin 40^\circ 16'=8{,}45.$$

Le résultat ainsi obtenu correspond à celui de l'exemple 131.

§ 302. **Transmittance.** Dans le chapitre « Circuits électriques linéaires» (§ 14) nous avons signalé que le courant i dans une branche quelconque du circuit peut être représenté sous forme du produit de la tension U à l'entrée du circuit par l'admittance propre ou mutuelle g:

$$i = Ug.$$

Cette expression reste vraie également pour les phénomènes transitoires. Si à l'entrée d'un circuit quelconque on branche à l'instant $t = 0$, une tension continue U (ou une F.E.M. E), le courant $i(t)$ dans une branche quelconque de ce circuit est égal au produit de la tension continue U par la conductance $g(t)$:

$$i(t) = Ug(t). \tag{10.62}$$

Pour un phénomène transitoire l'admittance est une fonction du temps. Ceci est mis en évidence en écrivant le temps t entre parenthèses; la fonction $g(t)$ est appelée transmittance. La transmittance est mesurée en mêmes unités (siemens) qu'une conductance (admittance) «habi tuelle ». Si dans (10.62) on prend U égale à 1 V, on aura $i(t) = g(t)$. En d'autres termes, la transmittance d'une branche quelconque du circuit est numériquement égale au courant $i(t)$ circulant dans cette branche, lorsque le circuit est branché sous la tension continue de 1 V; $g(t)$ sera écrite avec deux indices. Ces indices permettent de reconnaître la transmittance dont il est question. Si les deux indices sont les mêmes il s'agit de la transmittance propre de la branche, dont le numéro correspond au chiffre utilisé dans l'indice. Si, par contre, les deux indices sont différents, il s'agit de la transmittance entre les branches dont les numéros figurent dans l'indice.

Ainsi, si une source de tension continue U est branchée à la première branche, à conditions initiales nulles, le courant dans cette première branche est $i_1(t) = Ug_{11}(t)$, tandis que le courant dans la troisième branche est $i_3(t) = Ug_{31}(t)$.

La transmittance peut être déterminée par voie de calculs ou par voie expérimentale. Lorsqu'on détermine $g_{kk}(t)$ par voie de calculs, on trouve par la méthode classique ou opérationnelle le courant dans la branche k, à l'instant de raccordement de la source de tension continue à cette branche. En calculant $g_{km}(t)$ on trouve le courant dans la branche k à l'instant du raccordement de la tension U à la branche m. Ensuite on suppose que U est égale à 1 V dans les expressions ainsi obtenues. Lorsque la transmittance est déterminée par voie expérimentale, le courant $i(t)$ dans une branche quelconque est trouvé par la méthode oscillographique.

Nous avons démontré au § 15 que $g_{km} = g_{mk}$. Cette propriété découle de la symétrie du déterminant du système par rapport à sa diagonale principale.

On peut démontrer d'une manière analogue que l'image opérationnelle de la transmittance $g_{km}(p)$ est égale à l'image opérationnelle $g_{mk}(p)$. Mais si les images de deux transmittances sont égales, les transmittances le sont aussi autrement dit

$$g_{km}(t) = g_{mk}(t). \tag{a}$$

L'égalité (a) indique que le *théorème de réciprocité* est applicable aux phénomènes transitoires.

Pour les phénomènes transitoires le théorème de réciprocité s'énonce comme suit (voir les schémas-blocs de la fig. 324).

Dans un circuit électrique linéaire quelconque, le courant transitoire i_k (t) dans la branche k, dû au branchement de la F.E.M. e_m (t) dans la branche m

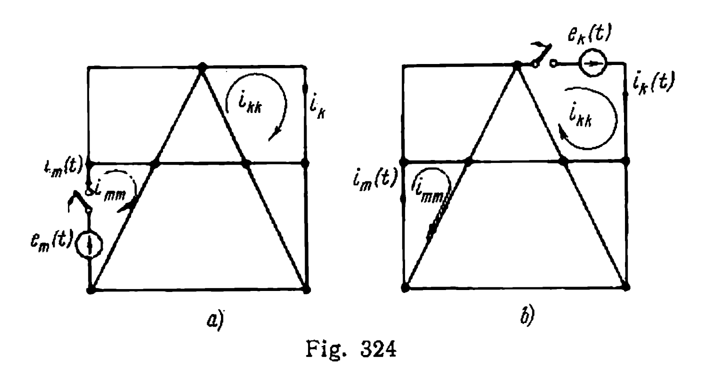


Fig. 324

(fig. 324, *a*), est égal au courant transitoire i_m (t) dans la branche m, dû au branchement de la F.E.M. e_k (t) dans la branche k (fig. 324, *b*), à condition que e_k (t) = $= e_m$ (t).

§ 303. Notion de fonction transitoire en tension. Lorsqu'on branche un circuit électrique linéaire, à conditions initiales nulles, sous la tension continue U, une tension $u_{ab}\,(t)$ apparaît entre deux points quelconques a et b de ce circuit ; cette tension est fonction du temps et est proportionnelle à la tension appliquée U. La tension $u_{ab}\,(t)$ peut être représentée sous forme de produit

$$u_{ab}\,(t) = Uk\,(t)\,; \qquad (10.62')$$

k (t) est appelé fonction transitoire en tension.

C'est une grandeur sans dimensions, numériquement égale à la tension entre les points a et b du circuit, lorsqu'on applique à l'entrée de ce dernier une tension continue de 1 V ; k (t), ainsi que g (t), peut être déterminé soit par voie de calcul, soit par voie expérimentale.

Exemple 143. Calculer la transmittance du schéma de la fig. 292.

Solution. Lorsqu'on ferme l'interrupteur $i\,(t) = \frac{E}{R}\,(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$. Par définition la transmittance d'un circuit est égale au courant dans ce dernier, pour $E = 1V$. Par conséquent, $g\,(t) = \frac{1}{R}\,(1 - e^{-\frac{R}{L}t}.)$

Exemple 144. Trouver la transmittance propre de la première branche g_{11} (t), la transmittance mutuelle entre la troisième et la première branche g_{31} (t) et la fonction transitoire en tension aux bornes du condensateur k_{uC} (t) pour le schéma de la fig. 308. Paramètres du schéma : $R_1 = 1000\ \Omega$, $R_2 = 2000\ \Omega$, $C = 50\ \mu F$. Branchons la source de F.E.M. $E = 210\ V$ à la première branche.

Solution. Par définition

$$i_1 = Eg_{11}(t)\,;\quad i_3 = Eg_{31}(t)\,;\quad u_C = Ek_{u_C}(t).$$

Obtenons à l'aide de la méthode classique (voir exemple 128):

$$i_1 = \frac{E}{R_1+R_2} + E\frac{R_2}{R_1(R_1+R_2)}e^{pt}\,;\quad i_3 = \frac{E}{R_1}e^{pt}\,;$$

$$u_C = E\frac{R_2}{R_1+R_3}(1-e^{pt})\,;\quad p = -\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}.$$

En supposant que dans ces expressions $E = 1\ V$, trouvons:

$$g_{11}(t) = \frac{1}{R_1+R_3} + \frac{R_2}{R_1(R_1+R_2)}e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\,;$$

$$g_{31}(t) = \frac{1}{R_1}e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\,;$$

$$k_{u_C}(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right).$$

En substituant aux diverses grandeurs leurs valeurs numériques, on obtient:

$$g_{11}(t) = 0{,}00033 + 0{,}00067e^{-30t}S\,;$$

$$g_{31}(t) = 0{,}001e^{-30t}S\,;$$

$$k_{u_C}(t) = \frac{2}{3}(1-e^{-30t}).$$

Exemple 145. Calculer la transmittance mutuelle entre la première et la troisième branche du schéma de la fig. 294, lorsqu'on applique une F.E.M. à la première branche et lorsque les paramètres ont les valeurs suivantes: $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$; $L_1 = 1\ H$; $C = 100\ \mu F$.

Solution. Image du courant dans la troisième branche:

$$I_3(p) = \frac{ER_2C}{p^2R_2L_1C + p(R_1R_2C+L_1) + R_1 + R_2} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Les racines de l'équation $M(p) = 0$ sont les suivantes (voir exemple 121):

$$p_1 = -100 + j\,100;\quad p_2 = -100 - j\,100.$$

Soit $E = 1\ V$; on a alors conformément à la formule de décomposition:

$$\underset{\text{pour } E=1\ V}{i_3(t)} = \frac{R_2C}{2p_1R_2L_1C + (R_1R_2C+L_1)}e^{p_1t} + \frac{R_2C}{2p_2R_2L_1C + (R_1R_2C+L_1)}e^{p_2t}.$$

Après substitution des valeurs des paramètres, des valeurs des racines p_1 et p_2 et utilisation de l'expression $\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j} = \sin x$ nous obtenons:

$$g_{31}(t) = \underset{\text{pour } E=1\ V}{i_3(t)} = 0{,}01\ e^{-100t}\sin 100\,t.$$

Ainsi la transmittance mutuelle entre la troisième et la première branche du circuit de la fig. 294, pour les valeurs des paramètres ci-dessus, peut être représentée par une sinusoïde amortie.

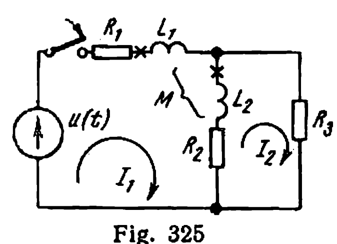


Fig. 325

Exemple 146. Soit dans le circuit de la fig. 325 $u(t)=170 \sin (314t+30°)$ V; $R_1 = 10\,\Omega$; $R_2 = 5\,\Omega$; $R_3 = 15\,\Omega$; $L_1 = 30$ mH; $L_2 = 50$ mH; $M = 25$ mH.

Trouver $i_1(t)$ à l'aide de la formule de décomposition.

Solution. Ecrivons les équations à l'aide de la méthode des courants fictifs maillés:

$$I_1(p)[R_1+R_2+p(L_1+L_2+2M)]-I_2(p)[R_2+p(L_2+M)]=U(p);$$
$$-I_1(p)[R_2+p(L_2+M)]+I_2(p)(R_2+R_3+pL_2)=0.$$

Leur solution en commun donne

$$I_1(p)=\frac{\dot{U}_m}{(p-j\omega)Z_1(p)}=\frac{\dot{U}_m(20+0{,}05p)}{(p-j\omega)(0{,}000\,875p^2+2{,}6p+275)}=\frac{N(p)}{M(p)}.$$

Les racines de l'équation $M(p)=0$ sont:

$$p_1=314j;\ p_2=-2860;\ p_3=-114s^{-1}.$$
$$M'(p)=0{,}000\,875p^2+2{,}6p+275+(p-j\omega)(0{,}00175p+2{,}6);$$
$$N(p_1)=170e^{j30°}(20+0{,}05\cdot 314j)=4301e^{j68°20'};$$
$$N(p_2)=170e^{j30°}(20-0{,}05)=123\cdot 170\cdot e^{j210°};$$
$$N(p_3)=170e^{j30°}(20-0{,}05\cdot 114)=14{,}29\cdot 170\cdot e^{j30°};$$
$$M'(p_1)=-0{,}000\,875\cdot 314°+2{,}6\cdot 314j+275=188{,}7+j817=838e^{j77°};$$
$$M'(p_2)=689°+j756=6930e^{j6°16'};$$
$$M'(p_3)=-284{,}14-754j=806e^{-j110°40'};$$
$$i(t)=\mathrm{Im}\left[\frac{N(p_1)}{M'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{N(p_2)}{M'(p_2)}e^{p_2t}+\frac{N(p_3)}{M'(p_3)}e^{p_3t}\right]=$$
$$=\mathrm{Im}\,[5{,}13e^{j(\omega t-8°40')}+3{,}03e^{j203°44'}\cdot e^{-2860t}+3{,}01e^{j140°40'}\cdot e^{-114t}]=$$
$$=5{,}13\sin(\omega t-8°40')-1{,}16e^{-2860t}+1{,}97e^{-114t}\ A.$$

Il y a lieu de faire deux compléments à la section « Méthode opérationnelle ».

1. Pour passer de l'image $F(p)$ à la fonction du temps $f(t)$, qui lui correspond, on utilise souvent dans les ouvrages scientifiques et d'enseignement la transformation inverse de Laplace, connue du cours de mathématiques:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty}F(p)e^{pt}\,dp.$$

La fonction $F(p)$ est analytique dans le domaine $Re\,p>\gamma$ et tend vers zéro pour $p\to\infty$. En utilisant cette expression dans la pratique on remplace l'intégrale suivant une droite infinie, parallèle à l'axe des ordonnées, par une intégrale sur un chemin, embrassant tous les pôles de la fonction $F(p)$:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint F(p)e^{pt}\,dp. \tag{a}$$

On appelle « pôles » les valeurs de p, pour lesquelles $F(p)$ devient infini. Lorsque $F(p)=\frac{N(p)}{M(p)}$ ces pôles sont les racines de l'équation $M(p) = 0$. Toutes les racines de l'équation $M(p) = 0$ ont une partie réelle négative, c'est-à-dire qu'elles sont situées dans la partie gauche du plan p, car c'est seulement dans ce cas que les composantes libres de $f(t)$ pour $t \to \infty$ tendent vers zéro. Il est démontré dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, que le deuxième membre de l'expression (a) est égal à la somme des résidus (Res) de la fonction sous le signe somme à tous ses pôles, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi j}\oint F(p)\,e^{pt}\,dp=\sum \operatorname{Res} F(p)\,e^{pt}.$$

On appelle résidu d'une fonction pour un certain pôle la valeur dont diminue l'intégrale de cette fonction, divisée par $2\pi j$, lorsque la courbe d'intégration en se resserrant coupe ce pôle. Mais le résidu de la fonction $\frac{N(p)}{M(p)}e^{pt}$ en un pôle simple p_k est égal à $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_k t}$. Par conséquent, $f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_k t}$.

Ainsi, en utilisant la transformation inverse de Laplace, on peut également établir la formule de décomposition (10.61).

2. Ecrivons la formule de décomposition pour le cas de racines multiples. Supposons que l'équation $M(p) = 0$ ait q racines simples ($p_1, p_2, \ldots p_q$), une racine p_r, de multiplicité r et une racine p_s, de multiplicité s. Dans ce cas la formule de décomposition doit être écrite de la manière suivante:

$$\frac{N(p)}{M(p)}\doteq\sum_{k=1}^{q}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_k t}+\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[\frac{N(p-p_r)^r e^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_r}+$$

$$+\frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\left[\frac{N(p)(p-p_s)^s e^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_s}.$$

* * *

Discutons maintenant la troisième méthode de calcul des phénomènes transitoires dans les circuits électriques linéaires, à savoir du calcul à l'aide de l'intégrale de Duhamel.

§ 304. Intégrale de Duhamel. En utilisant l'intégrale de Duhamel, nous désignerons par τ la variable d'intégration, en continuant à désigner par t l'instant pour lequel on désire calculer le courant dans le circuit. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, on branche la tension $u(\tau)$ à un circuit à conditions initiales nulles (fig. 326). Pour trouver le courant dans le circuit à l'instant t, remplaçons la courbe par une courbe en escalier et totalisons les courants dus à la tension initiale $u(0)$ et à tous les paliers de tension, agissant avec un certain retard.

La tension $u(0)$ à l'instant t engendre dans le circuit le courant $u(0)\,g(t)$, où $g(t)$ est la transmittance du circuit.

Un saut de tension se produit à l'instant $\tau + \Delta\tau$ (fig. 326)

$$\Delta u \approx \left(\frac{du}{d\tau}\right)\Delta\tau = u'(\tau)\,\Delta\tau.$$

Afin de trouver à l'instant t la composante du courant, due à ce saut de tension Δu, il faut multiplier $u'(\tau)\Delta\tau$ par la transmittance, en tenant compte du temps d'action du saut jusqu'à l'instant t.

On voit sur la fig. 326 que ce temps est égal à $t - \tau - \Delta\tau$. Par conséquent, l'accroissement du courant est:

$$u'(\tau)\, g(t-\tau-\Delta\tau)\, \Delta\tau$$

Le courant total à l'instant t peut être obtenu en totalisant tous les courants particuliers, dus aux différents sauts et en les ajoutant au courant $u(0)\, g(t)$:

$$i(t) = u(0)\, g(t) + \sum u'(\tau)\, g(t-\tau-\Delta\tau)\, \Delta\tau.$$

Le nombre des termes de cette somme est égal au nombre des paliers de la tension. Il est évident que cette courbe en escalier remplace d'autant mieux la courbe donnée, que le nombre des paliers est grand. A cette fin, remplaçons l'intervalle fini de temps $\Delta\tau$ par l'intervalle infiniment petit $d\tau$ et passons de la somme à l'intégrale:

$$i(t) = u(0)\, g(t) + \int_0^t u'(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau. \quad (10.63)$$

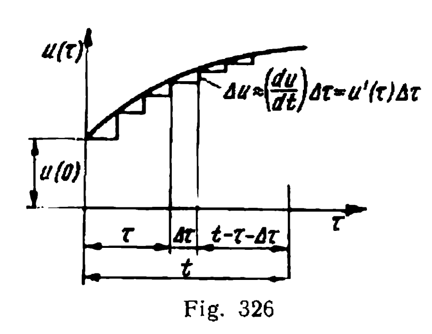


Fig. 326

L'expression (10.63) est appelée intégrale de Duhamel.

L'intégrale de Duhamel peut être écrite sous une autre forme encore. Mais nous ne nous arrêterons pas aux autres formes d'écriture, puisqu'elles ne comportent pas d'avantages substantiels sur l'expression (10.63).

A l'aide de l'intégrale de Duhamel on peut trouver non seulement le courant, mais toute autre grandeur, la tension par exemple. Dans ce cas il faut faire figurer dans l'expression à la place de la transmittance $g(t)$, la fonction transitoire en tension $k(t)$.

§ 305. Ordre des opérations de calcul à l'aide de l'intégrale de Duhamel. Ce calcul comprend quatre étapes.

Première étape: calcul de la transmittance $g(t)$ pour le circuit examiné.

Deuxième étape: calcul de $g(t-\tau)$. A cette fin il faut substituer $(t-\tau)$ à t dans l'expression de $g(t)$.

Troisième étape: calcul de $u'(\tau)$. Pour cela trouvons la dérivée de la tension donnée $u(t)$ par rapport au temps t et dans l'expression ainsi obtenue substituons τ à t.

Quatrième étape: substitution des fonctions trouvées dans les étapes 1, 2 et 3 dans l'expression (10.63), intégration suivant la variable τ et passage aux limites.

Exemple 147. Trouver $i_1 = f(t)$ et $u_2 = f(t)$ au moment de l'enclenchement de l'interrupteur dans le circuit de la fig. 327, *a*. La tension de la source de F.E.M.

$$u(t) = 100(1 - e^{-at})\,V; \quad a = 0{,}25\ s^{-1};$$
$$R = 0{,}5\ \Omega;\ L_1 = 1\ H;\ M = 0{,}5\ H.$$

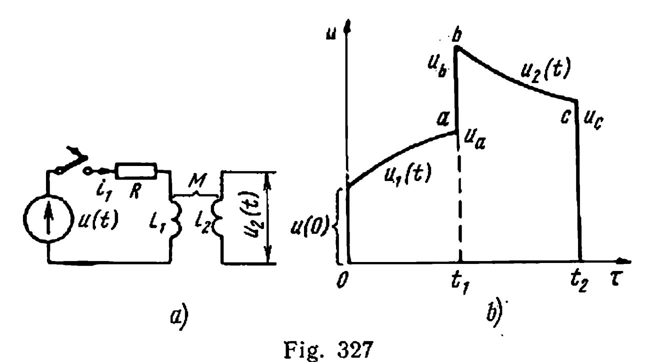


Fig. 327

Solution. La transmittance d'un circuit constituée par R et L branchés en série est :

$$g(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-bt}),$$

où

$$b = \frac{R}{L_1};$$
$$g(t - \tau) = \frac{1}{R}[1 - e^{-b(t-\tau)}].$$

Le premier terme du second membre de (10.63) disparaît, puisque $u(0) = 0$. Trouvons $u'(\tau)$:

$$u'(t) = \frac{d}{dt}100(1 - e^{-at}) = 100ae^{-at};$$
$$u'(\tau) = 100ae^{-a\tau};$$
$$i_1(t) = \int_0^t u'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = \frac{100a}{R}\int_0^t e^{-a\tau}[1 - e^{-b(t-\tau)}]\,d\tau.$$

Pour l'intégration on a tenu compte que e^{-bt} ne dépend pas de τ:

$$i_1(t) = 200(1 + e^{-0{,}5t} - 2e^{-0{,}25t})\,A.$$

Tension aux bornes de l'enroulement secondaire:

$$u_2(t) = M\frac{di_1}{dt} = 50(e^{-0{,}25t} - e^{-0{,}5t})\,V.$$

§ 306. Utilisation de l'intégrale de Duhamel lorsque la tension a une forme compliquée. Soit la tension $u(\tau)$ variant dans le temps suivant une loi compliquée, comme celle représentée sur la fig. 327, *b* par exemple. La tension initiale est égale à $u(0)$. Dans l'intervalle entre $\tau = 0$ et $\tau = t_1$ la tension augmente progressivement et la loi de sa variation dans cet intervalle est $u_1(t)$. A l'instant $\tau = t_1$ elle varie par saut de u_a à u_b et, ensuite, varie à nouveau progressivement en fonction du temps, mais cette fois suivant une autre loi $u_2(\tau)$, que dans le premier intervalle. Pour $\tau = t_2$ la tension diminue par saut de la valeur u_c à zéro.

On demande de trouver le courant pour chacun de ces trois intervalles. Nous appellerons premier intervalle l'intervalle entre $\tau = 0$ et $\tau = t_1$ (non compris le saut de tension de u_a à u_b). Le deuxième intervalle s'étend de t_1 à t_2, y compris le saut de u_a à u_b, mais non compris le saut de u_c à zéro. Le troisième intervalle, pour $\tau > t_2$, comprend le saut de u_c à zéro.

Effectuons comme auparavant l'intégration par rapport à τ, t étant l'instant déterminé pour lequel on désire trouver le courant.

Le courant à un instant quelconque t est déterminé par l'action de toutes les tensions intervenues avant l'instant t.

Pour le premier intervalle

$$i(t) = u(0)\,g(t) + \int_0^t u_1'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Pour le deuxième intervalle

$$i(t) = u(0)\,g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau + (u_b - u_a)\,g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t} u_2'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Le terme $(u_b - u_a)\,g(t - t_1)$ est dû au saut de tension de u_a à u_b, à l'instant t_1.

Pour le troisième intervalle

$$i(t) = u(0)\,g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau + (u_b - u_a)\,g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau + (0 - u_c)\,g(t-t_2).$$

Exemple 148. A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur intercalé dans le circuit électrique de la fig. 327, *a* et la tension $u(t)$ varie conformément à la courbe de la fig. 327, *b*; $u(0) = 50$ *V*.

Dans le premier intervalle allant de $t = 0$ à $t = t_1 = 4\,s$ $u_1(t) = 150 - 100\,e^{-at}$, où $a = 0{,}25\ s^{-1}$.

Dans le deuxième intervalle de $t = t_1 = 4\ s$ à $t = t_2 = 6\ s$ $u_2(t) = 50 + 100\ e^{-c(t-t_1)}$ où $c = 0,4\ s^{-1}$.

Soit $R_1 = 0,5\,\Omega$; $L_1 = 1\ H$ (à circuit secondaire ouvert), les paramètres du schéma de la fig. 327, *a*.

Trouver la loi de variation du courant i_1 en fonction du temps pour les deux intervalles, ainsi que les valeurs du courant i_1 pour $t = 2\ s$ et pour $t = 5\ s$.

Solution. $g(t)=\frac{1}{R}(1-e^{-bt})$; $b=\frac{R}{L_1}=0,5\,s^{-1}$;

$$g(t-\tau)=\frac{1}{R}[1-e^{-b(t-\tau)}].$$

Dans le premier intervalle

$$u_1'(\tau)=100ae^{-a\tau};$$

$$i_1(t)=u(0)g(t)+\int_0^t u_1'(\tau)g(t-\tau)\,d\tau=\frac{u(0)}{R}(1-e^{-bt})+$$

$$+\frac{100a}{R}\int_0^t e^{-a\tau}[1-e^{-b(t-\tau)}]\,d\tau=100(1-e^{-0,5t})+200(1+e^{-0,5t}-2e^{-0,25t}).$$

Pour $t=2\ s$ $i_1=100(1-e^{-1})+200(1+e^{-1}-2e^{-0,5})=94,9\ A$.

Dans le deuxième intervalle (y compris le saut $u_b-u_a=36,9\ V$).

$$i_1(t)=u(0)\,g(t)+\int_0^{t_1} u_1'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau+(u_b-u_a)\,g(t-t_1)+\int_{t_1}^{t} u_2'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau;$$

$$u_2'(\tau)=-100ce^{-c\tau}e^{ct_1};$$

$$i_1(t)=100(1-e^{-0,5t})+200(1+e^{-0,5t_1}-2e^{-0,25t_1})+\frac{36,9}{0,5}[1-e^{-0,5(t-t_1)}]-$$

$$-\frac{100c}{(b-c)R}\left[-\frac{b}{c}e^{-ct}+\frac{b-c}{1}e^{ct_1}+e^{-ct_1}e^{-b(t-t_1)}\right]e^{ct_1}$$

Pour $t=5s$

$$i_1=100(1-e^{-2,5})+200(1+e^{-2}-2e^{-1})+\frac{36,9}{0,5}(1-e^{-0,5})-\frac{100\cdot 0,4}{(0,5-0,4)\,0,5}\times$$

$$\times(-1,25e^{0,4\cdot 5}+0,25e^{-1,6}+e^{-0,4\cdot 4}e^{-0,5})\,e^{1,6}=$$

$$=91,79+80+29-14,67=186,12\ A.$$

§ 307. Comparaison de diverses méthodes de calcul des phénomènes transitoires. La méthode classique comme la méthode opérationnelle de calcul peuvent être utilisées pour la solution des problèmes rencontrés dans la pratique quelle que soit leur complexité. Chacun choisit la méthode qui lui convient mieux.

Toutefois, il est indiscutable que la méthode classique reflète mieux l'essence physique du phénomène que la méthode opérationnelle, dans laquelle la solution des équations différentielles est nettement « mécanisée ». Quant à l'intégrale de Duhamel, il est recommandé de l'employer lorsque la tension varie en fonction du temps suivant une loi compliquée, comme par exemple, en cas d'existence de sauts de tension (voir § 306), ou lorsque la transmittance $g(t)$ et/ou la tension agissantes

sur le circuit sont données sous forme de courbes (dans ce dernier cas l'intégrale de Duhamel est calculée par la méthode d'intégration numérique).

* * *

Examinons maintenant certaines questions supplémentaires. On a souvent besoin dans la pratique d'obtenir par voie électrique la dérivée ou l'intégrale du courant ou de la tension.

§ 308. Circuit électrique différentiateur le plus simple. La fig. 328, *a* représente un quadripôle qui peut être utilisé, dans certaines conditions

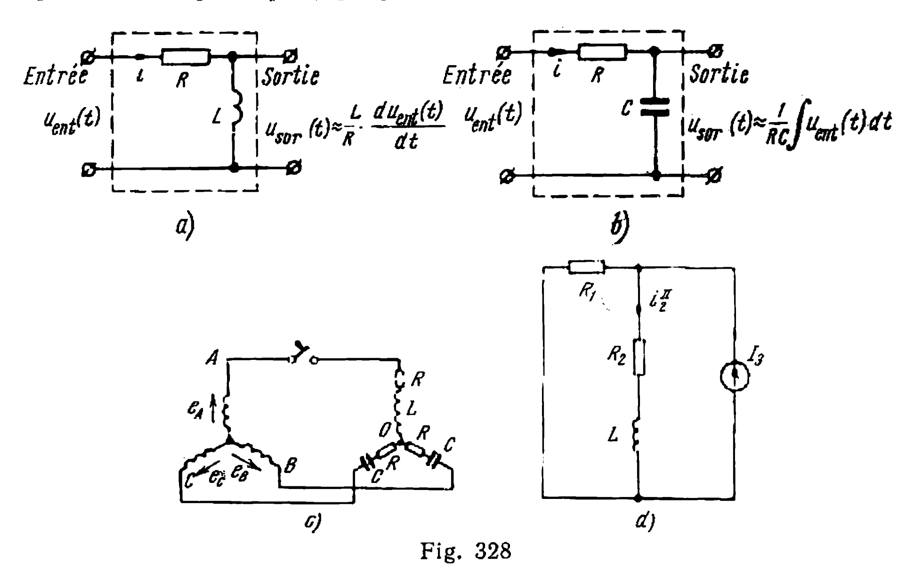


Fig. 328

déterminées, comme circuit différentiateur le plus simple. Il est constitué par une résistance active R et une inductance L couplées en série.

On a, conformément à la deuxième loi de Kirchhoff

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u_{ent}(t).$$

Si les paramètres du circuit sont choisis de manière que $L\frac{di}{dt}$ soit nettement inférieur à Ri, on a approximativement

$$Ri \approx u_{ent}(t) \quad \text{et} \quad i \approx \frac{u_{ent}(t)}{R}.$$

Dans ces conditions la tension à la sortie du quadripôle

$$u_{sor}(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{L}{R}\,\frac{du_{ent}(t)}{dt}$$

est proportionnelle à la dérivée de la tension à son entrée.

§ 309. Circuit électrique intégrateur le plus simple. La fig. 328, *b* représente un quadripôle, dont la tension à la sortie est proportionnelle, dans certaines conditions déterminées, à l'intégrale de la tension d'entrée. Ce quadripôle est constitué par R et C, branchés en série. Conformément à la deuxième loi de Kirchhoff

$$iR + u_C = u_{ent}(t).$$

Choisissons les paramètres du circuit (R et C) de manière que la chute de tension u_C soit nettement inférieure à iR ; on a alors approximativement

$$iR \approx u_{ent}(t); \quad i = \frac{u_{ent}(t)}{R}.$$

La tension à la sortie

$$u_{sor}(t) = u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{1}{RC}\int u_{ent}(t)\,dt,$$

et la tension à la sortie est en effet proportionnelle à l'intégrale de la tension à l'entrée.

La tension prélevée à la sortie des circuits différentiateurs et intégrateurs peut être délivrée pour observation ou enregistrement à un oscillographe cathodique ou électromagnétique (en supposant que ce dernier ait une résistance d'entrée suffisamment grande).

§ 310. Utilisation de la méthode d'un générateur équivalent pour le calcul des phénomènes transitoires. La méthode du générateur équivalent peut être utilisée avec succès pour le calcul des phénomènes transitoires. Examinons cette méthode en l'appliquant au circuit triphasé de la fig. 328, *c*. Dans ce schéma

$$e_A = E_m \sin(\omega t + \varphi);$$
$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120° + \varphi);$$
$$e_C = E_m \sin(\omega t + 120° + \varphi).$$

Supposons que la résistance interne de la source de la F.E.M. triphasée est nulle.

R et C sont insérés dans les phases B et C, R et L sont intercalées dans la phase A. On demande d'écrire l'image opérationnelle du courant dans la phase A, à l'instant de fermeture de l'interrupteur.

Conformément à la méthode du générateur équivalent il faut diviser l'image opérationnelle de la tension de la branche ouverte $U_{AO'mv}(p)$ par la somme de l'impédance opérationnelle de la branche mise sous tension $Z_A(p)$ et de l'impédance opérationnelle d'entrée de l'ensemble du circuit par rapport aux points A et O'. Désignons-la par $Z_{ent}(p)$:

$$I_A(p) = \frac{U_{AO'mv}(p)}{Z_A(p) + Z_{ent}(p)}.$$

Lorsque l'interrupteur est ouvert, la valeur instantanée de la tension (voir § 145) est

$$U_{AO'mv} = \frac{3}{2} E_m \sin(\omega t + \varphi);$$

et son image

$$U_{AO'mv}(p) = \frac{3}{2}\dot{E}_m \frac{1}{p-j\omega};$$

$$Z_A(p) = R + pL; \quad Z_{ent}(p) = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{Cp}\right).$$

Par conséquent,

$$I_A(p) = \frac{3\dot{E}_m Cp}{(p-j\omega)(2p^2LC + 3pRC + 1)}.$$

Pour passer à la fonction du temps il faut faire appel à la formule de décomposition.

En principe on agit exactement comme au § 22 de la première partie de ce cours lorsque nous avons en expliqué l'application de la méthode d'un générateur équivalent au calcul des circuits à courant continu.

L'ensemble du circuit, à l'exception de la branche dans laquelle a lieu la fermeture de l'interrupteur, est représenté par un dipôle actif. Désignons ces bornes de la branche comportant l'interrupteur par A et O'.

Introduisons dans ce circuit deux F.E.M. égales et de sens contraires $e_1(t)$ et $e_2(t)$. La valeur de chacune de ces F.E.M. est égale à la tension à vide aux bornes de la branche considérée; désignons-la par $u_{AO'mv}(t)$.

Ensuite fermons l'interrupteur et utilisons le principe de la superposition pour trouver le courant dans une branche quelconque du circuit. Représentons le courant dans cette branche, désigné par $i(t)$, sous la forme de la somme de deux courants: $i(t) = i'(t) + i''(t)$.

Le courant $i'(t)$ est dû à toutes les F.E.M. du dipôle actif et à la F.E.M. $e_1(t)$, dirigée en opposition à $u_{AO'mv}(t)$.

Le courant $i''(t)$ est dû uniquement à la F.E.M. $e_2(t)$, dirigée dans le même sens que $u_{AO'mv}(t)$.

Du fait que la F.E.M. $e_1(t)$ est dirigée à l'encontre de la tension $u_{AO'mv}(t)$, le courant $i'(t)$ dans la branche raccordée reste nul, comme il l'a été auparavant, et les courants dans les autres branches du circuit conservent la valeur qu'ils avaient avant la fermeture de l'interrupteur. Quant au courant $i''(t)$ *il est trouvé en fonction de la F.E.M.* $e_2(t) = u_{AO'mv}(t)$ *lorsque les conditions initiales sont nulles pour l'ensemble du circuit.*

Il y a lieu de remarquer en conclusion que *lorsqu'on procède à l'ouverture d'un interrupteur dans l'une des branches quelconques* du circuit, sans déroger aux lois de la commutation, les courants dans les autres branches du circuit, après coupure de la branche mentionnée, peuvent être trouvés par voie de superposition de deux régimes suivants:

premier régime — celui qui existait avant la commutation;

deuxième régime — celui qui s'établit dans les branches appropriées d'un circuit passif à conditions initiales nulles par suite du branchement d'une source de courant dans la branche à couper.

La source fournit un courant égal et de sens contraire au courant circulant dans la branche à couper.

Exemple 149. Pour illustrer la méthode de calcul des phénomès transitoires par introduction d'une source de courant, trouvons pour le schéma 312 de l'exemple 130 le courant i_2 lors de l'ouverture d'un interrupteur dans la troisième branche. Nous avons après l'ouverture de l'interrupteur $i_2 = i_2^{I} + i_2^{II}$

$i_2^{I} = 0{,}5\ A$ — courant avant la commutation

i_2^{II} — courant provenant de la source de courant

$i_3 = 0{,}5\ A$ (continu dans le cas présent) dans le circuit de la fig. 328, *d*.

L'image du courant i_2^{II} est

$$I_2^{II}(p) = I_3 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + pL}.$$

Par conséquent,

$$i_2^{II} = \frac{I_3 R_1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}\right) = 0{,}1\,(1 - e^{-100t})\ A;$$

$i_2 = 0{,}5 + 0{,}1\,(1 - e^{-100\,t})$ ce qui correspond au résultat obtenu dans l'exemple 130.

§ 311. Phénomènes transitoires sous l'effet des impulsions de tension. Le courant circulant dans un circuit quelconque, aussi compliqué soit-il, sous l'effet d'une impulsion de tension agissant sur ce circuit, représenté sur la fig. 329, *a*, peut être trouvé, par exemple, par les trois méthodes suivantes :

1. Utilisation de l'intégrale de Duhamel.

2. Lorsque $t < t_1$, le courant est calculé de la même manière que sous l'effet d'une tension continue U.

Pour $t > t_1$ la tension agissant sur le système est nulle. Par conséquent, le système est libéré des F.E.M. agissantes et sera traversé par des courants libres, dont les valeurs initiales correspondent aux courants totaux du circuit pour $t = t_1$.

3. L'impulsion est représentée sous la forme de deux tensions continues. La tension positive U agit à partir de l'instant $t = 0$; la tension négative U agit à partir de l'instant $t = t_1$. Pour $t < t_1$ les courants dans le circuit ne dépendent que de la tension U.

Pour $t > t_1$ les courants dépendent des deux tensions, compte tenu du retard égal à t_1 de la deuxième tension sur la première.

Expliquons la troisième méthode à l'aide de l'exemple suivant. Supposons qu'il faut trouver le courant dans un circuit lorsque ce dernier est branché sous une tension ayant la forme d'un triangle isocèle, représenté sur la fig. 329, *b* ; ce problème est résolu en trois étapes.

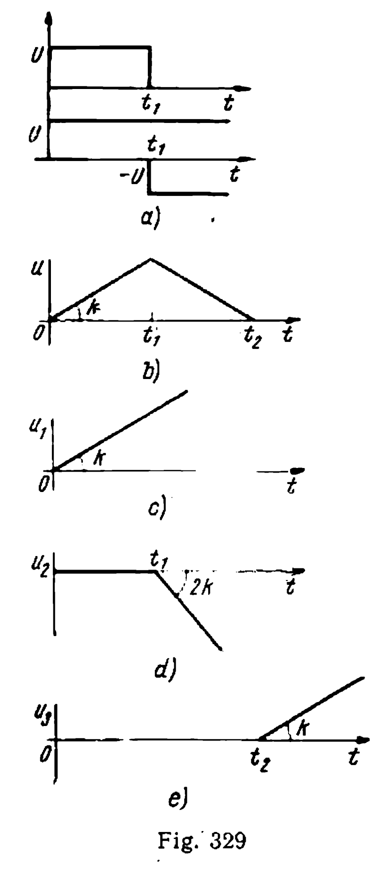
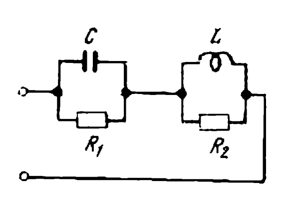


Fig. 329

On commence par calculer le courant dans l'intervalle de temps allant de $t = 0$ à $t \leqslant t_1$, ce courant étant dû à l'effet de la tension $u_1 = kt$ (fig. 329, *c*). Ensuite, pour l'intervalle de temps $t_2 \geqslant t \geqslant t_1$, trouvons le courant circulant dans le circuit, sous l'effet de deux tensions (fig. 329, *c* et *d*): de la tension $u_1 = kt$, continuant d'agir, et de la tension additionnelle $u_2 = -2\,kt$, qui commence à agir à partir de l'instant $t = t_1$.

Pour l'intervalle de temps $t > t_2$ le courant est déterminé par l'effet de trois tensions: les tensions u_1 et u_2, continuant d'agir et de la tension $u_3 = kt$, qui commence à agir à partir de l'instant $t = t_2$ (pour $t \geqslant t_2$ la somme des tensions u_1, u_2 et u_3 de la fig. 329, e est nulle).

Parmi les trois méthodes énumérées, c'est la première qui est la plus économique en général.



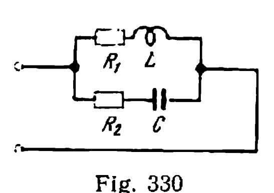


Fig. 330

§ 311a. Certains circuits possédant des propriétés particulières. Si dans les circuits de la fig. 330 on prend $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R$ et si on écrit les résistances opérationnelles, il s'avère que ces résistances sont égales à R. Ceci veut dire que pour le rapport mentionné des paramètres dans la partie non ramifiée des deux circuits, le courant varie en fonction du temps suivant la même loi qui régit la variation de la tension à l'entrée du circuit.

Tableau des valeurs des fonctions hyperbolique et exponentielle

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2
e^x	1	1,10	1,22	1,35	1,49	1,65	1,82	2,01	2,22	2,46	2,72	3,32
sh x	0,00	0,10	0,20	0,30	0,41	0,52	0,64	0,76	0,89	1,03	1,17	1,51
ch x	1,00	1,005	1,02	1,04	1,08	1,13	1,18	1,25	1,34	1,43	1,45	1,81

x	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5	5,5	6
e^x	4,05	4,95	6,05	7,39	12,18	20,09	33,11	54,6	90	148	244,7	400
sh x	1,90	2,38	2,94	3,63	6,05	10,01	16,54	27,29	45,00	74,20	122,3	200
ch x	2,15	2,58	3,10	3,76	6,13	10,07	16,57	27,30	45,01	74,21	122,3	200

§ 311b. Notions sur les fonctions de transfert et les réponses en fréquence d'éléments et de systèmes. Dans certains domaines de la technique et, en particulier, dans la théorie de la régulation automatique on évalue la stabilité et le

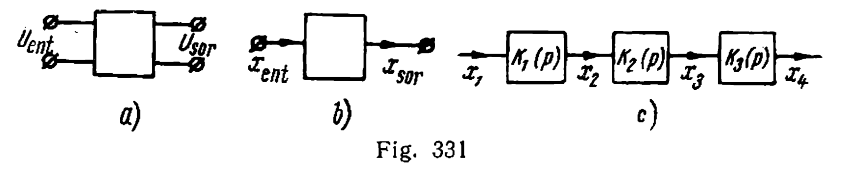


Fig. 331

caractère du phénomène transitoire d'après l'allure de la réponse en fréquence du système. Le système est subdivisé en général en plusieurs éléments ou cellules.

Chaque élément peut être schématiquement représenté soit sous la forme d'un certain quadripôle (fig. 331, *a*), soit sous la forme d'un schéma unifilaire, comme celui figurant sur la fig. 331, *b*. Les grandeurs de sortie x_{sor} et celles d'entrée x_{ent} peuvent être des grandeurs électriques, comme par exemple le courant, la tension, la charge ou des grandeurs non électriques, comme par exemple une coordonnée où la vitesse de déplacement d'un corps quelconque d'un système mécanique.

Sur la fig. 331, *a* U_{ent} est la tension d'entrée et U_{sor} est la tension de sortie.

Si le système comprend plusieurs éléments, les grandeurs d'entrée et de sortie sont munies d'indices numériques. Quel que soit le schéma de connexions intérieu-

res de chaque élément, on peut toujours représenter l'image opérationnelle de la grandeur de sortie $x_{sor}(p)$ à l'aide de l'image opérationnelle de la grandeur d'entrée $x_{ent}(p)$:

$$x_{sor}(p)=x_{ent}(p)\,K(p).$$

Le coefficient de proportionnalité $K(p)$ entre $x_{sor}(p)$ et $x_{ent}(p)$ est appelé fonction de transfert de l'élément considéré:

$$K(p)=\frac{x_{sor}(p)}{x_{ent}(p)}. \tag{10.64}$$

La fonction de transfert, qui dépend du schéma des connexions intérieures de l'élément, est une fonction de l'opérateur p.

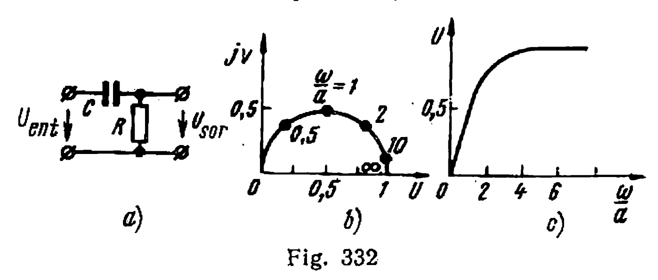


Fig. 332

A titre d'exemple, écrivons l'expression de la fonction de transfert du quadripôle de la fig. 332, *a*. L'image opérationnelle de la tension de sortie $U_{sor}(p)$ s'exprime comme suit en fonction de l'image opérationnelle de la tension d'entrée $U_{ent}(p)$:

$$U_{sor}(p)=\frac{U_{ent}(p)}{R+\frac{1}{Cp}}R,$$

d'où

$$K(p)=\frac{U_{sor}(p)}{U_{ent}(p)}=\frac{p}{p+a},$$

où $a=\frac{1}{RC}$.

La notion de la réponse en fréquence d'un élément est étroitement liée à celle de la fonction de transfert de cet élément.

On obtient l'expression de la réponse en fréquence en partant de celle de fonction de transfert en remplaçant l'opérateur p par $j\omega$, où ω — fréquence angulaire:

$$K(j\omega)=\frac{x_{sor}(j\omega)}{x_{ent}(j\omega)}; \tag{10.65}$$

$K(j\omega)$ — nombre complexe, qui peut être exprimé sous formes algébrique et exponentielle:

$$K(j\omega)=U+jV=Ae^{j\varphi},$$

$$A=\sqrt{U^2+V^2},\quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{V}{U}.$$

La fonction $U=f(\omega)$ est appelée réponse en fréquence réelle de l'élément ou du système respectivement. La fonction $V=f(\omega)$ est la réponse en fréquence imaginaire. La fonction $A=f(\omega)$ est la réponse en amplitude, tandis que $\varphi = f(\omega)$ est la réponse en phase. La fonction $A=f(\lg\omega)$ est appelée réponse logarithmique en fréquence. La caractéristique $Ae^{j\varphi}$, construite en coordonnées polaires, est appelée réponse en amplitude et en phase, en fonction de la fréquence.

A titre d'exemple construisons la fonction $K(j\omega)$ en coordonnées U, jV et écrivons en coordonnées U, ω la fonction $U = f(\omega)$ pour le quadripôle de la fig. 332, *a*. A cette fin substituons dans l'expression $K(p) = \frac{p}{p+a}$ $j\omega$ à p et obtenons

$$K(j\omega) = \frac{j\omega}{a+j\omega} = \frac{j\omega(a-j\omega)}{a^2+\omega^2} = \frac{\omega^2}{a^2+\omega^2} + j\frac{a\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Ainsi, pour l'exemple considéré

$$U = \frac{\omega^2}{a^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad V = \frac{a\omega}{a^2+\omega^2}.$$

En conférant à ω des différentes valeurs, par exemple, $\frac{\omega}{a} = 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 10;\ \ldots;\ \infty$ on peut calculer les valeurs de U et V et construire dans le plan complexe la fonction $K(j\omega) = f(\omega)$ en coordonnées cartésiennes, telle qu'elle est représentée sur la fig. 332, *b*. La fig. 332, *c* représente la réponse en fréquence réelle $U = f(\omega)$ pour le quadripôle de la fig. 332, *a*.

Les réponses en fréquence de divers éléments et du système dans son ensemble peuvent être déterminées soit par voie de calculs, si on connaît les schémas de connexions intérieures des éléments et les valeurs de leurs paramètres, soit par voie expérimentale. Pour déterminer les courbes de réponse par voie expérimentale, on procède comme suit:

On applique à l'entrée de l'élément (ou de l'ensemble du système une tension sinusoïdale à amplitude constante et, en faisant varier la fréquence de 0 à sa valeur maximale possible (théoriquement jusqu'à l'infini), on relève l'amplitude et la phase de la grandeur de sortie. Le rapport de l'amplitude de la grandeur de sortie à l'amplitude de la grandeur d'entrée donne la valeur A, tandis que le déphasage de la valeur de sortie par rapport à celle de l'entrée donne la valeur de φ.

Revenons à la question des fonctions de transfert. Supposons que le système soit constitué par plusieurs éléments, trois par exemple, couplés en série (fig. 331 *c*). Désignons par $K_1(p)$ la fonction de transfert du premier élément, par $K_2(p)$ celle du second et par $K_3(p)$ celle du troisième. On peut exprimer alors les images opérationnelles des grandeurs de sortie de ces éléments à l'aide des images opérationnelles de leurs grandeurs d'entrée:

$$x_2(p) = x_1(p) K_1(p),$$
$$x_3(p) = x_2(p) K_2(p),$$
$$x_4(p) = x_3(p) K_3(p).$$

Afin d'exprimer la valeur de sortie $x_4(p)$ de l'ensemble du système en fonction de la valeur d'entrée $x_1(p)$, multiplions entre elles les trois lignes écrites ci-dessus. Nous obtenons

$$x_2(p)\, x_3(p)\, x_4(p) = x_1(p)\, K_1(p)\, x_2(p)\, K_2(p)\, x_3(p)\, K_3(p)$$

Par conséquent,

$$x_4(p) = x_1(p) K(p),$$

ici

$$K(p) = K_1(p) K_2(p) K_3(p). \tag{10.66}$$

Ainsi, pour obtenir la fonction de transfert de plusieurs éléments couplés en série, il suffit de multiplier entre elles les fonctions de transfert de chacun de ces éléments.

§ **312a. Caractéristiques des problèmes de synthèse.** On appelle syntèse d'un circuit électrique linéaire la détermination de la structure du circuit et le calcul des valeurs numériques des éléments R, L et C qui la composent en partant des

expressions opérationnelles connues de ce circuit ou des caractéristiques en fonction du temps, lorsqu'une impulsion de forme déterminée agit à son entrée. Pour la même expression opérationnelle, prise comme expression de départ pour la synthèse, il peut exister plusieurs circuits de structure différente. Par conséquent, après avoir obtenu plusieurs solutions, il faut choisir la mieux appropriée parmi elles, en se basant sur telles ou telles considérations. Les critériums le plus souvent utilisés pour le choix définitif d'un schéma sont le prix de revient, l'encombrement et le poids du dispositif.

Les problèmes de synthèse se posent et doivent être résolus dans la théorie des filtres à circuits multiples, et celle des circuits correcteurs utilisés dans l'automatique, les communications, la radiotechnique, ainsi qu'en cybernétique pour la réalisation des dispositifs de prévision et d'aplatissement.

La synthèse a été étudiée suivant les deux voies principales ci-après. La première voie consiste à effectuer la synthèse à partir des fonctions opérationnelles connues [à partir de $Z(p)$ pour les dipôles et à partir de la fonction de transfert pour les quadripôles] *. Dans la deuxième voie la synthèse est effectuée suivant les caractéristiques en fonction du temps, c'est-à-dire d'après la réponse connue en fonction du temps du système à l'action d'une impulsion de forme rectangulaire classique.

Ces deux voies se complètent réciproquement et développent l'une l'autre. A l'heure actuelle, les résultats les plus intéressants ont été obtenus de la première de ces voies.

§ 312b. Conditions auxquelles doivent satisfaire les impédances d'entrée des dipôles. Si on représente l'impédance d'entrée d'un dipôle sous forme d'un rapport de deux polynômes, écrits suivant les puissances décroissantes de l'opérateur p

$$Z(p)=\frac{N(p)}{M(p)}=\frac{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}{bmp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}, \qquad \text{(a)}$$

les cinq conditions suivantes doivent être satisfaites:

1. Tous les coefficients a et b, au numérateur, comme au dénominateur de $Z(p)$ doivent être positifs.

2. La puissance la plus élevée du polynôme du numérateur, n, ne peut différer de la puissance supérieure du polynôme du dénominateur, m, de plus de l'unité. La même condition doit être respectée pour les plus petites puissances du numérateur et du dénominateur.

3. Si on appelle, par convention, zéros de $Z(p)$ les valeurs de p pour lesquelles $Z(p)=0$, et pôles de $Z(p)$ les valeurs de p pour lesquelles $Z(p)=\infty$, les zéros et les pôles doivent se trouver uniquement dans le demi-plan gauche p.

4. Les zéros disposés sur l'axe imaginaire du plan p ne peuvent être que simples, mais non multiples.

5. Si on substitue $j\omega$ à p dans l'expression $Z(p)$, on doit avoir pour tout ω

$$\operatorname{Re} Z(j\omega)\geqslant 0.$$

Expliquons ces conditions.

Il résulte du § 264 que les phénomènes libres sont décrits par des termes de la forme $A_k e^{P_k t}$ et doivent s'amortir obligatoirement avec le temps. Les p_k sont les racines de l'équation $Z(p)=0$. Mais les termes de la forme $A_k e^{P_k t}$ ne peuvent s'amortir que lorsque la partie réelle de P_k est négative. Il en découle que les zéros de l'équation $Z(p)=0$ doivent se trouver obligatoirement dans le demi-plan gauche de p.

Comme il existe pour chaque dipôle un dipôle dual et que l'admittance d'entrée du dipôle dual est $Y(p)=\frac{Z(p)}{k}$, où k est un certain coefficient ayant les di-

* Balabanian N. Network Synthesis. Prentice-Hall Inc., 1958.

mensions de Ω^2 (voir § 162), l'impédance d'entrée du dipôle dual est égale à $\frac{k}{Z(p)}$.
Les zéros du dipôle dual, jouant le rôle des pôles du dipôle initial, doivent être également situés dans le demi-plan gauche de p.

Il a été indiqué dans le cours de mathématiques que si l'équation $N(p) = 0$ a deux racines multiples, les termes qui leur correspondent dans la solution doivent être pris sous la forme suivante: $(\dot{C}_1 + \dot{C}_2 t)\, e^{pt}$. Si on admettait l'existence de deux racines multiples $p = j\beta$ sur l'axe imaginaire, la composante libre qui correspond à ces racines $(\dot{C}_1 + \dot{C}_2 t)\, e^{j\beta t}$ croîtrait jusqu'à l'infini, ce qui est physiquement impossible. Tous les coefficients a et b au numérateur et au dénominateur de $Z(p)$ doivent être positifs. Si cette condition n'était pas satisfaite, il y aurait, conformément à un lemme, découlant du théorème de Hurwitz (voir § 370), parmi les racines de l'équation $Z(p) = 0$ des racines à partie réelle positive.

Expliquons maintenant pourquoi la puissance m peut différer de la puissance n de l'unité au maximum. Supposons que la puissance m soit supérieure de 2 à la puissance n. Alors $p \to \infty$ sera une racine double pour $Z(p)$. Mais tout ce qui a lieu pour $p \to \infty$ peut être considéré comme se déroulant sur l'axe imaginaire du plan p (puisque l'axe imaginaire va à l'infini). On aurait alors une racine multiple sur l'axe imaginaire, ce qui est impossible.

En effectuant le même raisonnement pour le dipôle dual, on peut s'assurer que la puissance n ne peut pas être supérieure à la puissance m de plus d'une unité.

Si dans $Z(p)$ on substitue $j\omega$ à p, $Z(j\omega)$ représente l'impédance complexe du dipôle en régime sinusoïdal permanent à fréquence ω, et $\mathrm{Re}\, Z(j\omega)$ est la partie réelle de l'impédance d'entrée. Lorsque le dipôle comprend des résistances actives sa $\mathrm{Re}\, Z(j\omega) > 0$ (il consomme une puissance active $I^2 \mathrm{Re}\,(j\omega)$. Si, par contre, ce dipôle est purement réactif, sa $\mathrm{Re}\, Z(j\omega) = 0$. Dans le cas général pour un dipôle passif on doit toujours avoir $\mathrm{Re}\, Z(j\omega) \geqslant 0$.

Ecrivons à titre d'exemple plusieurs expressions de la forme $N(p)$ et cherchons si elles peuvent représenter des impédances d'entrée de dipôles:

$$1)\ \frac{5p-6}{25p^2+12p+2};\quad 2)\ \frac{20p^2+12p+6}{12p^4+8p^3+12p^2+13p+1};$$

$$3)\ \frac{3p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1};\quad 4)\ \frac{2p+p+1}{(p+1)(p^2+1)}.$$

La première expression ne peut représenter $Z(p)$, car l'un des coefficients de son numérateur est négatif. La deuxième et la troisième expression ne peuvent non plus représenter $Z(p)$. Pour la deuxième, ceci provient de ce que la plus haute puissance de p au dénumérateur est supérieure de 2 à la plus haute puissance de p au numérateur. La troisième expression ne peut être $Z(p)$ parce que

$$\underset{p=j\omega}{\mathrm{Re}}\left[\frac{3p^2+p+1}{p^3+p^2+p+1}\right] = \frac{(1-\omega)^2(1-2\omega^2)}{(1-\omega^2)^2(1+\omega^2)}$$

est négatif dans le domaine des valeurs ω, allant de 0,707 à 1. La quatrième expression satisfait à toutes les conditions énmérées ci-dessus et, par conséquent, peut représenter $Z(p)$ d'un certain dipôle. Il existe plusieurs moyens de réaliser les dipôles en partant d'une impédance donnée, satisfaisant aux conditions énumérées au § 312b. Les deux moyens de réalisation principaux seront examinés aux § 313a et b.

Outre les propriétés générales de $Z(p)$ mentionnées ci-dessus, il est utile d'avoir en vue les propriétés de $Z(p)$ pour des dipôles ne comprenant que R, C ou R, L ou L, C.

Les dipôles R, C et R, L ont des zéros et des pôles, simples qui alternent sur le demi-axe négatif du plan p. Pour les dipôles R, C, le point singulier le plus

proche de l'origine des coordonnées est un pôle; il n'y a pas de pôle à l'infini. Pour les dipôles du type R, L, le point singulier le plus proche de l'origine est un zéro. $P = 0$ n'est pas un pôle. Les dipôles L, C ont alternativement des zéros et des pôles simples sur l'axe imaginaire. Les puissances des polynômes au numérateur et au dénominateur diffèrent d'une unité.

§ 313a. Réalisation des dipôles à l'aide d'un circuit en échelle. Expliquons d'abord la notion d'une fraction continue. On appelle fraction continue une fraction de la forme

$$\frac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots}}}\,.$$

Il s'avère que l'impédance d'entrée ou l'admittance d'entrée d'un échelle, du type représenté sur la fig. 333, *a*, pour lequel les impédances longitudinales sont désignées par Z_1, Z_3, Z_5 et les admittances transversales par Y_2, Y_4, Y_6 peut être représentée par une fraction continue.

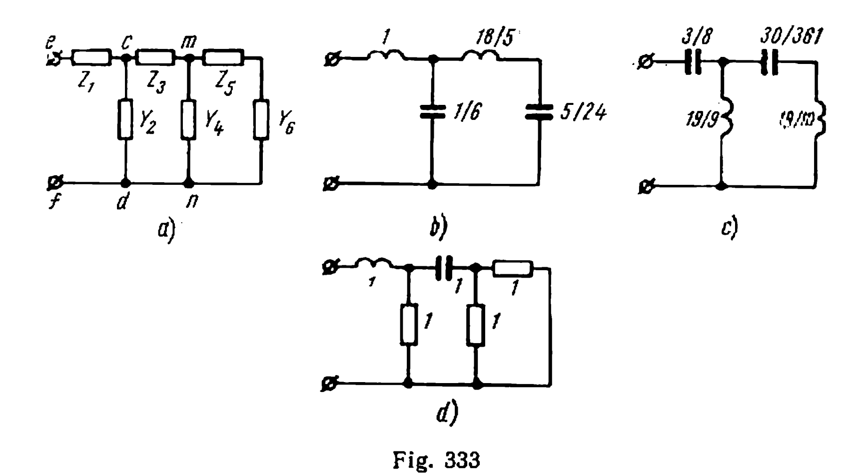


Fig. 333

Effectuons certaines opérations pour nous en assurer. Trouvons en premier lieu l'admittance d'entrée de la partie droite du circuit par rapport aux bornes *mn*. Cette impédance est égale à $\dfrac{1}{Z_5+\dfrac{1}{Y_6}}$. L'admittance globale de la partie droite du circuit par rapport aux bornes *mn*, compte tenu de la branche à admittance Y_4, est $Y_4+\dfrac{1}{Z_5+\dfrac{1}{Y_6}}$.

L'impédance d'entrée par rapport aux mêmes bornes

$$\frac{1}{Y_4+\cfrac{1}{Z_5\cfrac{1}{Y_6}}}\,.$$

En poursuivant le même procédé, nous trouvons que l'impédance d'entrée de l'ensemble du circuit est

$$Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{Y_4+\cfrac{1}{Z_5+\cfrac{1}{Y_6}}}}}\,. \tag{b}$$

Ainsi nous nous trouvons en face du problème du passage de l'expression (a) à l'expression (b). En d'autres termes, nous avons à résoudre le problème de la détermination consécutive dans un ordre déterminé des éléments d'un circuit en échelle (Z_1, Z_3, Z_5 . . . Y_2, Y_4, Y_6 . . .), en partant de l'expression (a).

A cette fin: 1) disposons les polynômes $N(p)$ et $M(p)$ soit suivant les puissances croissantes, soit suivant les puissances décroissantes de p;

2) divisons ces polynômes l'un par l'autre en ayant soin d'obtenir au cours de la division des termes positifs (et non pas négatifs) et ne contenant pas p en puissance supérieure à 1;

3) Si au cours de la division il est nécessaire de passer de la disposition des polynômes suivant les puissances décroissantes à leur disposition suivant les puissances croissantes, cette opération est parfaitement admissible.

En divisant le polynôme N par le polynôme M on obtient un quotient Z_1 et un reste $\frac{O_1}{M}$. Autrement dit,

$$Z=Z_1+\frac{O_1}{M}=Z_1+\cfrac{1}{\cfrac{M}{O_1}}\,.$$

En divisant $\frac{M}{O_1}$ on obtient le quotient Y_2 et le reste $\frac{O_2}{O_1}=\cfrac{1}{\cfrac{O_1}{O_2}}$. Mais $\frac{O_1}{O_2}=Z_3+$ $+\frac{O_3}{O_2}=Z_3+\cfrac{1}{\cfrac{O_2}{O_3}}$. Par conséquent, $\frac{M}{O_1}=Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{\cfrac{O_2}{O_3}}}$

En partant de ce qui vient d'être dit, le processus du calcul consécutif des éléments peut être représenté par le schéma suivant:

$$\begin{array}{r|l} N & M \\ \hline M\,Z_1 & Z_1 \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} M & O_1 \\ \hline O_1\,Y_2 & Y_2 \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} O_1 & O_2 \\ \hline O_2\,Z_3 & Z_3 \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} O_2 & O_3 \\ \hline O_2\,Y_4 & Y_4 \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} O_3 & O_4 \\ \hline O_4\,Z_5 & Z_5 \end{array}$$
. . . .

Examinons un exemple numérique.

E x e m p l e 150. On demande de trouver les paramètres des circuits en échelle pour lesquels $Z(p)=\frac{p^4+9p^2+8}{p^3+3p}$, en disposant au début les polynômes à diviser suivant les puissances décroissantes de p et ensuite (pour réaliser un deuxième circuit suivant ses puissances croissantes. Comme on le verra par la suite, il n'est pas nécessaire au cours de la division dans ces deux cas de passer de la disposition suivant les puissances décroissantes à la disposition suivant les puissances crois-

santes de p. Effectuons la division en disposant les termes suivant les puissances décroissantes.

$$\begin{array}{r|l} p^4+9p^2+8 & p^3+3p \\ p^4+3p^2 & p \to Z_1 \\ \hline p^3+3p & 6p^2+8 \\ p^3+\frac{8}{6}p & \frac{1}{6}p \to Y_2 \\ \hline 6p^2+8 & \frac{10}{6}p \\ 6p^2 & \frac{36}{10}p \to Z_3 \\ \hline \frac{10}{6}p & 8 \\ \frac{10}{6}p & \frac{5}{24}p \to Y_4 \\ \hline 0. & \end{array}$$

On voit sur la fig. 333, *b* un schéma, sur lequel sont indiqués respectivement en henrys et en farads les valeurs des inductances et des capacités, obtenues au cours de la division, lorsque les termes étaient disposés suivant les puissances décroissantes de p *. Procédons maintenant à la division en disposant les termes suivant les puissances croissantes de p:

$$\begin{array}{r|l} 8+9p^2+p^4 & 3p+p^3 \\ 8+\frac{8}{3}p^2 & \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{p} \to Z_1 \\ \hline 3p+p^3 & \frac{19}{3}p^2+p^4 \\ 3p+\frac{9}{19}p^3 & \frac{19}{9}\cdot\frac{1}{p} \to Y_2 \\ \hline \frac{19}{3}p^2+p^4 & \frac{10}{19}p^3 \\ \frac{19}{3}p^2 & \frac{361}{30}\cdot\frac{1}{p} \to Z_3 \\ \hline \frac{10}{19}p^3 & p^4 \\ \frac{10}{19}p^3 & \frac{10}{19}\cdot\frac{1}{p} \to Y_4 \end{array}$$

Le schéma et les paramètres pour ce deuxième cas sont donnés sur la fig. 333, *c*.

Examinons ensuite un exemple mettant en évidence la nécessité, rencontrée parfois au cours de la division de changer l'ordre de la disposition des termes.

On demande de réaliser le schéma en échelle suivant

$$Z(p)=\frac{2p^3+3p^2+2p+1}{2p^2+2p+1}:\quad \begin{array}{r|l} 2p^3+3p^2+2p+1 & 2p^2+2p+1 \\ & p \to Z_1 \\ 2p^3+2p^2+p & \\ \hline 2p^2+2p+1 & p^2+p+1 \\ 2p^2+2p+2 & 2 \\ \hline -1 & \end{array}$$

* Du fait que ces exemples ont un caractère purement illustratif, on ne doit pas attacher d'importance à ce que les inductances et les capacités dans ces exemples peuvent prendre des valeurs difficilement réalisables en pratique.

Du fait qu'on a obtenu des termes négatifs, il faut arrêter la division et passer à la disposition suivant les puissances croissantes de p.

$$\begin{array}{r|l}
1+2p+2p^2 & 1+p+p^2 \\
1+p+p^2 & 1 \to Y_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1+p+p^2 & p+p^2 \\
1+p & \frac{1}{p} \to Z_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
p+p^2 & p^2 \\
p & \frac{1}{p} \to Y_4
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
p^2 & p^2 \\
 & 1 \to Z_4
\end{array}$$

Le schéma correspondant est représenté sur la fig. 333, *d*.

Remarquons en conclusion qu'on peut rencontrer des $Z(p)$ qui ne peuvent être représentés par un schéma en échelle. Il faut alors recourir à la deuxième méthode de réalisation décrite dans le paragraphe suivant.

§ 313b. Réalisation d'un dipôle par la méthode de recherche consécutive des composantes les plus simples. A titre d'introduction à la deuxième méthode de réalisation d'un dipôle, écrivons les impédances opérationnelles pour

a) C; $Z(p)=\frac{a_0}{p}$; $a_0=\frac{1}{C}$

b) L; $Z(p)=a_1 p$; $a_1=L$

c) L_k, C_k; $Z(p)=\frac{p\frac{1}{C_k}}{p^2+\frac{1}{L_kC_k}}=\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}$

d) R_k, L_k; $Z(p)=\frac{pR_k}{p+\frac{R_k}{L_k}}=\frac{a_kp}{p+m_k}$

e) R, C; $Z(p)=\frac{\frac{1}{C}}{p+\frac{1}{RC}}=\frac{b}{p+d}$

f) R, L; $Z(p)=R+pL$; $Y(p)=\frac{\frac{1}{L}}{p+\frac{R}{L}}$

g) R, C; $Z(p)=\frac{p+\frac{1}{RC}}{p\frac{1}{R}}$; $Y(p)=\frac{p\frac{1}{R}}{p+\frac{1}{RC}}$

h) L_k, C_k; $Y(p)=\frac{p\frac{1}{L}}{p^2+\frac{1}{L_kC_k}}=\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}$

Fig. 334

les dipôles les plus simples, à un ou deux éléments. Les fig. 334, *a*, *b*, *c*, *d* et *e* représentent les dipôles les plus simples et les impédances opérationnelles qui leur correspondent. Les impédances et les admittances sont inscrites sur la fig. 334, *f*, *g* et l'admittance seule sur la fig. 334, *h*. Pour la fig. 334, *a* la capacité $C=\frac{1}{a_0}$. Pour la fig. 334, *b* l'inductance $L=a_1$. Pour la fig. 334, *c* $2a_1=\frac{1}{C_k}$ et $\omega_1^2=\frac{1}{L_kC_k}$. Pour la fig. 334, *d* $a_k=R_k$ et $m_k=\frac{R_k}{L_k}$. Pour la fig. 334, *e* $b_n=\frac{1}{C_n}$ et $d_k=\frac{1}{R_nC_n}$.

Le principe de cette méthode consiste à représenter l'impédance donnée $Z(p)$ sous la forme suivante (voir schéma de la fig. 336, *a*):

$$Z(p)=a_1p+\frac{a_0}{p}+\sum\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}+Z_1(p). \qquad \text{(c)}$$

Une inductance branchée en série correspond au premier terme (a_1p) et une capacité en série $\frac{1}{a_0}$ correspond au deuxième. Chaque terme de la forme $\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}$ représente une maille en résonance parallèle, branchée en série. Le terme $\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}$ correspond aux deux pôles $p_{1,2}=\pm j\omega_k$, se trouvant sur l'axe imaginaire

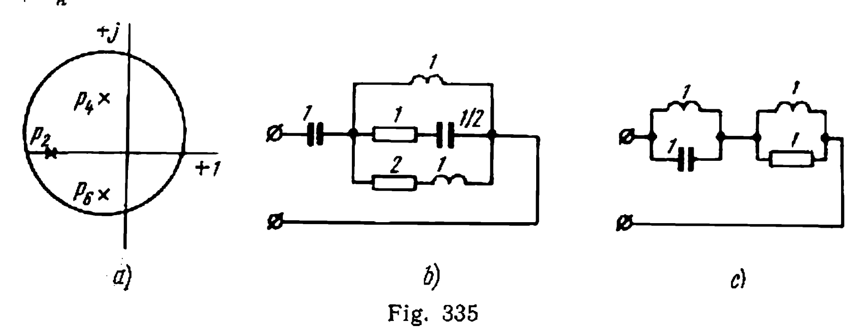


Fig. 335

du plan p. L'impédance $Z_1(p)$ ne comprend plus de pôles sur l'axe imaginaire. On appelle fonction à réactance minimale la fonction $Z_1(p)$, sans pôles sur l'axe imaginaire.

Les cas suivants peuvent se présenter pour $Z_1(p)$:

a) $Z_1(p)=\sum\frac{a_kp}{p+m_k}$. Dans ce cas cette fonction est réalisée par un couplage en série des dipôles de la fig. 334, *d*;

b) $Z_1(p)=\sum\frac{b_k}{p+d_k}+b_0$. Ici l'impédance $Z_1(p)$ est réalisée sous forme d'une résistance active b_0 et des dipôles de la fig. 334, *e*, branchés en série avec cette résistance;

c) $Z_1(p)=b_0$. $Z_1(p)$ est réalisé sous forme d'une résistance active b_0.

a_0 est le résidu de la fonction $Z(p)$ au pôle $p=0$.

$$a_0=\operatorname*{Res}_{p=0}Z(p)=\frac{N(0)}{M'(0)}.$$

Le coefficient a_k dans l'expression $\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}$ est calculé comme le résidu de la fonction $Z(p)$ au pôle $p=j\omega_k$ (il sera de même égal au résidu de la fonction $Z(p)$ pour $p=-j\omega_k$, puisque tous deux sont réels).

$$a_k=\operatorname*{Res}_{p=j\omega k}Z(p)=\frac{N(j\omega_k)}{M'(j\omega_k)}.$$

Rappelons la définition du résidu d'une fonction $f(p)$ d'une variable complexe p. On appelle résidu de la fonction, en un certain pôle, la grandeur dont diminuera l'intégrale circulaire $\frac{1}{2\pi j}\oint f(p)\,dp$, divisée par $2\pi j$, lorsque en se resserrant le chemin d'intégration coupe le pôle en question. Ainsi, par exemple, si la fonction $f(p)=Z(p)=\frac{N(p)}{M(p)}$ a trois pôles p_2, p_4, p_6 (voir fig. 335, *a*) la valeur

de l'intégrale, divisée par $2\pi j$, est égale à la somme des résidus (Res) en ces pôles:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint f(p)\,dp=\sum_{p=p_2,\ p_4,\ p_6}\operatorname{Res} f(p).$$

Après avoir trouvé a_k on peut calculer L_k et C_k du dipôle de la fig. 334, *c*:

$$C_k=\frac{1}{2a_k};\quad L_k=\frac{1}{\omega_k^2 C_k}.$$

Ce dipôle peut être réalisé non seulement suivant son impédance d'entrée $Z(p)$, mais également suivant son admittance d'entrée $Y(p)=\frac{1}{Z(p)}\cdot Y(p)$ est alors représenté sous la forme suivante (voir fig. 336, *b*):

$$Y(p)=a_1'p+\frac{a_0'}{p}+\sum\frac{2a_k'p}{p^2+\omega_k^2}+Y_2(p). \tag{d}$$

Conformément à la fonction (d) ce dipôle peut être réalisé sous la forme d'un couplage en parallèle de la capacité a_1', de l'inductance $\frac{1}{a_0}$, des dipôles du type de la

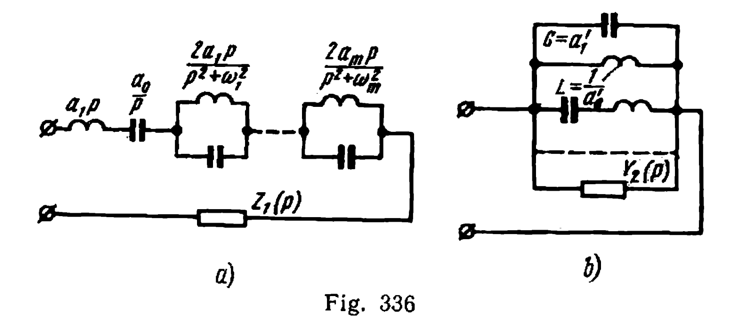


Fig. 336

fig. 334, *h* (les termes de la forme $\frac{2a_k'p}{p^2+\omega_k^2}$ correspondent à ces dipôles) et du dipôle à admittance réactive minimale $Y_2(p)$, ne comprenant pas de pôles sur l'axe imaginaire. Les coefficients a_0' et a_k' sont déterminés en calculant les résidus de la fonction $Y(p)$, respectivement pour $p=0$ pour $p=j\omega_k$.

Si la fonction $Y_2(p)=\sum\frac{m}{p+n}$, on peut la réaliser sous la forme d'un couplage en parallèle des dipôles de la fig. 334, *e*. Si la fonction $Y_2(p)=\sum\frac{rp}{p+s}$, on la réalise en couplant en parallèle les dipôles de la fig. 334, *g*. Il ne faut pas oublier qu'en réalisant un dipôle suivant son impédance $Z(p)$ sous la forme d'un couplage en série des dipôles les plus simples, il peut s'avérer rationnel à partir d'une certaine étape de passer à l'admittance et ensuite procéder à la réalisation à l'aide de dipôles couplés en parallèle. Ce passage peut devenir nécessaire, par exemple, lorsque la partie restante à réaliser de $Z(p)$ est nulle pour $p=0$. Ce zéro correspond au pôle $Y(p)$, pour lequel $p=0$ et qui est réalisé à l'aide d'une capacité.

Examinons maintenant deux exemples numériques.

Premier exemple: réaliser $Z(p)=\frac{p_3+3p^2+2p+2}{p(p^2+2p+2)}$. Puisque $Z(p)$ a un pôle pour $p=0$, on peut isoler dans ce circuit la capacité couplée en série $C=\frac{1}{a_0}$, où

$$a_0=\operatorname*{Res}_{p=0} Z(p)=\frac{2}{2}=1\,.$$

$Z(p)$ n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire. Par conséquent, elle ne comprend pas de dipôles branchés en série du type de la fig. 334, *c*. Cherchons maintenant quelle est l'impédance $Z(p)$ (qu'il reste à réaliser, appelons-la $Z_3(p)$):

$$Z_3(p)=Z(p)-\frac{a_0}{p}=\frac{p^2+2p}{p^2+2p+2}\,.$$

$Z_3(p)$ a un zéro pour $p=0$. Pour réaliser la partie restante du circuit passons à l'admittance

$$Y_3(p)=\frac{p^2+2p+2}{p(p+2)}\,.$$

Au pôle $p=0$ de cette admittance correspond l'inductance

$$a_0'=\operatorname*{Res}_{p=0} Y_3(p)=1.$$

Il reste à réaliser

$$Y_2(p)=Y_3(p)-\frac{1}{p}=\frac{p^2+p}{p(p+2)}=\frac{p}{p+2}+\frac{1}{p+2}\,.$$

Au terme $\frac{p}{p+2}$, conformément à la fig. 334, *g* correspond la branche constituée par $R=1\,\Omega$ et $C=\frac{1}{2}$ *F*, couplées en série. Conformément à la fig. 334, *f*, à l'admittance $\frac{1}{p+2}$ correspond la branche comprenant $L=2H$ et $R=2\Omega$. Le schéma ainsi obtenu est représenté sur la fig. 335, *b*.

Deuxième exemple: réaliser $Z(p)=\frac{p^3+p^2+2p}{p^3+p^2+p+1}$. $Z(p)$ n'a pas de pôle pour $p=0$ et, par conséquent, il n'y a pas de capacité branchée en série dans le dipôle cherché. $Z(p)$ a deux pôles $p_{1,2}=\pm j$ disposés sur l'axe imaginaire. Isolons à maille en résonance parallèle de la fig. 334, *c* correspondant à ces deux pôles

$$a_k=\operatorname*{Res}_{p=j} Z(p)=\left(\frac{p^3+p^2+2p}{3p^2+2p+1}\right)_{p=j}=\frac{-j-1+2j}{-3+2j+1}+\frac{1}{2}\,;$$

$$C_k=\frac{1}{2a_k}=1F\,;\quad \omega_k=1\,;\quad L_k=\frac{1}{\omega_k^2 C_k}=1H.$$

Trouvons maintenant la fonction à réactance minimum:

$$Z_1(p)=Z(p)-\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p+1}\,.$$

Conformément à la fig. 334, *d* $Z_1(p)$ est réalisé sous forme d'un couplage en parallèle de la résistance active de 1Ω et de l'inductance de $1H$. Le schéma du dipôle cherché est représenté sur la fig. 335, *c*.

§ 314a. Considérations sur les quadripôles à phase minimale et à phase non minimale. Il a été indiqué au § 311b que la fonction de transfert d'un quadripôle

est égale au rapport de l'image opérationnelle de la grandeur de sortie à l'image opérationnelle de la grandeur d'entrée. Dans le présent paragraphe nous allons examiner l'une des propriétés de la fonction de transfert et la classification des quadripôles, basée sur cette propriété. Les autres propriétés des quadripôles, importantes pour la synthèse, seront examinées au § 314b.

De même que l'impédance d'entrée d'un dipôle $Z(p)$ peut être représentée sous la forme de rapport de deux polynômes de puissances p, la fonction de transfert du quadripôle $K(p)$ peut être également représentée sous la forme de rapport de deux polynômes de puissances p. Les valeurs de p pour lesquelles $K(p) = 0$ sont appelées les zéros de la fonction de transfer celles, pour lesquelles $K(p) = \infty$ sont les pôles de cette fonction. Les pôles $K(p)$ se trouvent toujours dans le demi-plan gauche de p. Quant aux zéros de $K(p)$ une partie de ces zéros peut aussi bien se trouver dans le cas le plus général dans le demi-plan droit de p. Conformément à la disposition de zéros de la fonction de transfert, tous les quadripôles peuvent être classés en quadripôles à phase minimale et en quadripôles à phase non minimale.

On appelle quadripôles à phase minimale (Ph.M.) les quadripôles dont tous les zéros de la fonction de transfert sont disposés dans le demi-plan gauche de p. Pour les quadripôles à phase non minimale (Ph.N.M.) une partie des zéros au moins se trouve dans le demi-plan droit de p.

Cette dénomination est due à ce que pour des valeurs identiques des modules des fonctions de transfert Ph.M. et Ph.N.M., la phase de la fonction de transfert d'un quadripôle Ph. M. est plus petite que celle de la fonction de transfert d'un quadripôle Ph. N. M. Expliquons-le. A cette fin décomposons le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert en facteurs suivants:

$$K(p) = \frac{(p-p_1)(p-p_3)\ldots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)\ldots(p-p_m)}.$$

Ici $p_1, p_3 \ldots p_n$ — zéros et $p_2, p_4 \ldots p_m$ — pôles de la fonction de transfert. Les zéros comme les pôles sont, en général, des nombres complexes. Si on étudie le fonctionnement d'un quadripôle en régime sinusoïdal permanent, à fréquence ω variable, on peut substituer $j\omega$ à p dans $k(p)$. Chacun des binômes $(p - p_k)$ peut être représenté sous une forme exponentielle comme $p_k'' e^{j\varphi_k}$. Ici p_k'' — module et φ_k — argument du nombre complexe $(p - p_k)$. L'angle φ_k est compté à partir de l'axe $+1$ du plan complexe dans le sens inverse des aiguilles d'une montre jusqu'au sens positif du vecteur $(p - p_k)$. On peut donc écrire

$$K(p) = \frac{p_1'' \cdot p_3'' \cdots p_n''}{p_2'' \cdot p_4'' \cdots p_m''} e^{j[(\varphi_1+\varphi_3+\cdots+\varphi_n)-(\varphi_2+\varphi_4+\cdots+\varphi_m)]}.$$

Comparons les expressions pour les deux fonctions de transfert

$$K'(p) = \frac{p-p_1}{p-p_2} \text{ et } K''(p) = \frac{p-p_1'}{p-p_2}.$$

Supposons que p_2' et p_2' soient égaux en module et sont réels. Le zéro de la première expression se trouve dans le demi-plan gauche de p (fig. 337, a) et le zéro de la deuxième expression $p_1' = -p_1$ est situé dans le demi-plan droit de p (fig. 337, b). Soit une tension sinusoïdale de fréquence ω agissant à l'entrée des deux quadripôles. A une certaine fréquence concrète correspond le point a sur l'axe $+j$ du plan complexe. Formons les différences $(p - p_1)$ et $(p - p_2)$ de la fig. 337, a ainsi que les différences $(p - p_1')$ et $(p - p_2)$ de la fig. 337, b:

$$\frac{p-p_1}{p-p_2} = \frac{p_1''}{p_2''} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \text{ et } \frac{p-p_1'}{p-p_2} = \frac{p_1''}{p_2''} e^{j(\varphi_1'-\varphi_2)}.$$

Les modules de ces fonctions de transfert sont les mêmes et égaux à $\frac{p_1''}{p_2''}$, tandis que leurs arguments sont différents. L'argument $(\varphi_1' - \varphi_2)$ du premier quadripôle est

plus petit que l'argument ($\varphi_1' - \varphi_2$) du deuxième. Le quadripôle à fonction de transfert $K'(p)$ est un quadripôle à phase minimale, tandis que le quadripôle à $K''(p)$ est un quadripôle à phase non minimale.

Dans un quadripôle Ph.M. le module et l'argument de la fonction de transfert sont liés par une fonction univoque.

Par contre, dans les quadripôles Ph.N.M. le module de fonction de transfert n'est pas une fonction univoque de l'argument de cette fonction.

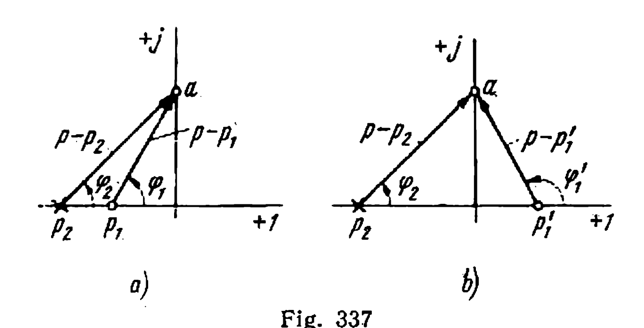


Fig. 337

Cherchons maintenant comment on peut déterminer pour un quadripôle, représenté par sa fonction de transfert ou par l'un de ses paramètres Z ou Y, s'il peut être réalisé au point de vue physique.

§ **314b. Conditions auxquelles doivent satisfaire les paramètres des quadripôles, ainsi que leur fonction de transfert.**

Avant d'aborder l'ensemble du problème posé, rappelons les équations fondamentales d'un quadripôle passif, écrites d'abord sous la forme Z et ensuite sous la forme Y.

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12} \\ \dot{U}_2 &= \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

Les schémas nécessaires pour déterminer expérimentalement Z_{11}, Z_{22} et Z_{12} sont représentés sur les fig. 338, *a* et *b*. Z_{11} — impédance d'entrée d'un quadripôle par

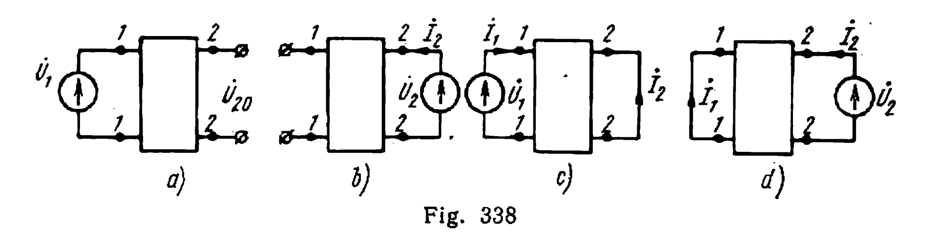


Fig. 338

rapport aux bornes 1 — 1, les bornes 2—2 étant ouvertes (au § 119 elle était désignée également par Z_{10}), Z_{22} — impédance d'entrée par rapport aux bornes 2—2, les bornes 1—1 étant ouvertes (au § 119 elle était désignée par Z_{20}), Z_{12} — impédance mutuelle entre les branches d'entrée et de sortie. Pour le circuit de la fig. 338,*a* la tension aux bornes 2—2 est $\dot{U}_{20} = \dot{I}_1 Z_{21}$ et $\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11}}$. Par conséquent, $\dot{U}_{20} = \dot{U}_1 \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$. Conformément au théorème de réciprocité $Z_{12} = Z_{21}$.

Equations du quadripôle, écrites sous la forme Y:

$$\left.\begin{aligned}\dot I_1=\dot U_1Y_{11}+\dot U_2Y_{12}\\ \dot I_2=\dot U_1Y_{21}+\dot U_2Y_{22}.\end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

Les schémas permettant de calculer par voie expérimentale Y_{11}, Y_{22} et $Y_{12} = Y_{21}$ sont représentés sur la fig. 338, c et d. Y_{11} représente l'admittance d'entrée d'un quadripôle par rapport aux bornes 1—1, les bornes 2—2 étant court-circuitées. Y_{22} est l'impédance d'entrée par rapport aux bornes 2—2, les bornes 1—1 étant court-circuitées. Il y a lieu de remarquer que le sens positif pour le courant $\dot I_2$ dans les équations (d) et (e) est choisi comme étant contraire au sens positif pour le courant I_2, représenté sur la fig. 135. Les relations suivantes existent entre les paramètres Z et Y

$$Z_{11}=\frac{Y_{22}}{|Y|};\quad Z_{12}=Z_{21}=\frac{Y_{12}{}^{*}}{|Y|};\quad Z_{22}=\frac{Y_{11}}{|Y|};\quad |Y|=Y_{11}Y_{22}-Y_{12}^2$$

$$\text{et } Y_{11}=\frac{Z_{22}}{|Z|};\quad Y_{12}=Y_{21}=\frac{-Z_{12}}{|Z|};\quad Y_{22}=\frac{Z_{11}}{|Z|};\quad |Z|=\frac{1}{Y}=Z_{11}Z_{22}-Z_{12}^2.$$

Si on désigne les résidus des fonctions Z_{11}, Z_{22}, Z_{12} pour le pôle considéré respectivement par K_{11}, K_{22}, et K_{12}, la relation suivante entre les résidus sera vraie en un pôle quelconque de ces fonctions

$$K_{11}K_{22}-K_{12}^2\geqslant 0. \qquad (g)$$

Cette relation est appelée condition des résidus. La démonstration en est faite par les méthodes de l'algèbre matricielle et nous n'allons pas la reproduire ici, car elle est très fastidieuse. La condition (g) indique que la matrice des résidus des paramètres Z n'est pas négative aux pôles. Pour les paramètres Y la condition (g) est également vraie et il faut entendre dans ce cas par K_{11}, K_{22} et K_{12} respectivement les résidus aux pôles des fonctions Y_{11}, Y_{22} et Y_{12}.

Remarquons à cette occasion, que si la condition

$$K_{11}K_{22}-K_{12}^2=0$$

est satisfaite pour un pôle, on dit que ce pôle est compact. Si Z (ou Y) sont des paramètres, dont tous les pôles satisfont à la condition de compacité on les appelle paramètres Z (ou Y) compacts.

Les impédances d'entrée du quadripôle par rapport aux bornes 1—1, les bornes 2—2 étant en marche à vide (*mv*) ou en court-circuit (*cc*), ainsi que les impédances d'entrée par rapport aux bornes 2—2, les bornes 1—1 étant en marche à à vide ou en court-circuit, doivent satisfaire aux mêmes conditions que les impédances d'entrée des dipôles (§ 312b).

En outre, si Z sont les paramètres d'un quadripôle quelconque ils doivent pour une fréquence quelconque ω ($p = j\omega$) satisfaire à la condition dite *condition de la partie réelle* (condition de Gewertz):

$$r_{11}r_{22}-r_{12}^2\geqslant 0. \qquad (h)$$

Ici $r_{11} = \operatorname{Re} Z_{11}(j\omega)$, $r_{22} = \operatorname{Re} Z_{22}(j\omega)$ et $r_{12} = \operatorname{Re} Z_{12}(j\omega)$. La relation (3) découle du fait que Z (matrice d'un quadripôle passif) est une matrice positive et réelle. Les expressions (g) et (h) imposent des limitations à la valeur du gain Q du quadripôle dont on effectue la synthèse. Pour les paramètres Y la condition de la partie réelle s'écrit comme suit:

$$g_{11}g_{22}-g_{12}^2\geqslant 0. \qquad (i)$$

Ici

$$g_{11}=\operatorname{Re} Y_{11}(j\omega);\quad g_{22}=\operatorname{Re} Y_{22}(j\omega) \text{ et } g_{12}=\operatorname{Re} Y_{12}(j\omega).$$

* Le signe — devant Y_{12} s'explique par le choix du sens positif pour le courant $\dot I_2$ (conformément à la fig. 338).

Dans les ouvrages consacrés à la synthèse des quadripôles on utilise également certaines autres notions et théorèmes (conditions) complémentaires, non mentionnées par nous jusqu'ici. Présentons les principales d'entre elles.

S'il n'existe pas de borne commune dans les branches d'entrée et de sortie d'un quadripôle sans induction mutuelle, ces quadripôles sont appelés équilibrés. Si cette borne commune existe, le quadripôle est appelé non équilibré. Au point de vue pratique, les quadripôles non équilibrés sont plus avantageux que les quadripôles équilibrés puisqu'ils contiennent un nombre moindre d'éléments.

Les quadripôles non équilibrés doivent satisfaire à la condition de Fialkov et Herst. Cette condition s'énonce comme suit:

a) les coefficients de p au numérateur et au dénominateur des fonctions $-Y_{12}$, Y_{11} et Y_{22} ne doivent pas être négatifs;

b) les coefficients des puissances de p dans $-Y_{12}$ ne doivent pas être supérieurs aux coefficients de mêmes puissances de p dans Y_{11} ou Y_{22}. Il est entendu que si on a un facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fonction considérée, il n'est pas réduit.

Lors de la synthèse d'un quadripôle on part habituellement de sa fonction de transfert. Cette fonction peut être donnée de manières différentes. Ainsi, elle peut être donnée sous forme de fonction de transfert en tension ou en courant, en présence et en l'absence d'une charge à la sortie du quadripôle, en tenant compte ou en négligeant la résistance d'entrée de la source d'alimentation, etc. Très souvent, dans les manuels traitant de la synthèse des circuits on la donne sous forme de fonction de transfert en tension, l'alimentation se faisant du côté des bornes 1—1, les bornes 2 — 2 étant ouvertes (fig. 338, *a*). Nous la désignerons par $K_{u_{mv}}(p) = K_{u_{mv}}$, sans oublier que dans les ouvrages spéciaux on la désigne souvent aussi par T_{12}

$$K_{u_{mv}} = T_{12} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{U}_1} = \frac{Z_{12}}{Z_{11}} = \frac{-Y_{12}}{Y_{22}}.$$

Les pôles de $K_{u_{mv}}$ sont formés par les zéros de Z_{11}, qui ne sont pas en même temps les zéros de Z_{12}, ainsi que par les pôles Z_{12}, qui ne sont pas en même temps les pôles de Z_{11}.

$K_{u_{mv}}$ peut être représenté sous forme de rapport de deux polynômes à puissances décroissantes de p:

$$K_{u_{mv}} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}.$$

Si on met en facteur a_n au numérateur et b_m au dénominateur on obtient

$$K_{u_{mv}} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a} p + \frac{a_0}{a_n}}{p^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} p^{m-1} + \ldots + \frac{b_1}{b_m} p + \frac{b_0}{b_m}}.$$

La grandeur $\frac{a_n}{b_m}$ désignée par k (ou Q) est appelée coefficient d'amplification (gain) d'un quadripôle.

Comme nous l'avons déjà dit, pour résoudre les problèmes de synthèse des quadripôles, il faut connaître les propriétés de $K_{u_{mv}}$ et de ses composantes Z_{12}, Z_{11} ou $-Y_{12}$ et Y_{22}. Certaines de ces propriétés ont été déjà indiquées dans le présent paragraphe. Complétons-les par d'autres non moins importantes, en omettant leurs démonstrations (ces démonstrations peuvent être trouvées dans les manuels de synthèse spécialisés).

Plus loin, dans la section I nous énumérons les propriétés les plus importantes pour la synthèse de Z_{11}, Z_{12}, Y_{11}, Y_{12}, $K_{u_{mv}}$; ces propriétés doivent être satisfaites pour n'importe quel quadripôle passif. Dans les sections II à V nous examinons les propriétés complémentaires, possédées par certaines espèces particulières

de quadripôles, à savoir : dans la section II, les propriétés complémentaires d'un quadripôle équilibré; dans la section III celles d'un quadripôle non équilibré et dans la section IV celles d'un circuit en échelle. Pour un cas encore plus particulier, à savoir pour un circuit en échelle, constitué uniquement par des résistances actives et des capacités, les propriétés de Z_{11}, Z_{12}, Y_{11}, Y_{12} et $K_{u_{mv}}$ sont énumérées dans la section V.

I. Conditions auxquelles doivent satisfaire Z_{11}, Z_{12}, Y_{11}, Y_{12} et $K_{u_{mv}}$ pour tous les quadripôles passifs.

A. Condition des résidus et condition de la partie réelle.

B. Conditions qui doivent être satisfaites aux pôles des fonctions.

1. Les pôles de Z_{12}, Y_{12} et $K_{u_{mv}}$ ne peuvent se trouver dans le demi-plan droit. 2. $K_{u_{mv}}$ ne peut avoir de pôle ni à l'origine ni à l'infini. 3. Les pôles de Z_{12} et Y_{12} sur l'axe $j\omega$ sont simples et leurs résidus réels. 4. Les pôles de $K_{u_{mv}}$ sur l'axe j sont simples et leurs résidus imaginaires.

C. Conditions qui doivent être satisfaites pour les zéros des fonctions. Les zéros de Z_{12}, Y_{12}, $K_{u_{mv}}$ peuvent être multiples et se trouver en un point quelconque du plan p.

II. La fonction de transfert $K_{u_{mv}}$ d'un quadripôle non équilibré sans inductance mutuelle possède les propriétés suivantes :

1. Ses zéros peuvent se trouver dans le plan complexe partout, sauf sur l'axe réel positif. 2. Pour les valeurs positives et réelles de p la fonction de transfert est comprise entre 0 et 1. 3. Les coefficients du numérateur de la fonction de transfert sont positifs (certains d'entre eux peuvent être nuls) et ne sont pas supérieurs aux coefficients correspondants du dénumérateur, sous réserve que les facteurs communs dans cette fonction n'ont pas été réduits.

III. Propriétés de la fonction de transfert $K_{u_{mv}}$ des quadripôles équilibrés :

1. Les zéros de la fonction de transfert peuvent se trouver en un point quelconque du plan complexe, y compris l'axe réel positif.

2. Pour des valeurs positives réelles de p, la valeur de la fonction de transfert est comprise entre -1 et $+1$. Ces valeurs extrêmes peuvent être obtenues seulement pour $p = 0$ ou pour $p = \infty$ ou dans les deux de ces cas.

3. Les coefficients du numérateur de la fonction de transfert peuvent être négatifs sans être supérieurs en valeurs absolues aux coefficients correspondants du dénominateur, sous réserve que les facteurs communs dans la fonction n'ont pas été réduits.

Les circuits en échelle sont un cas particulier d'un quadripôle à borne commune (non équilibré).

IV. La fonction de transfert des circuits en échelle possède une propriété complémentaire : ses zéros ne peuvent se trouver dans le demi-plan droit.

V. Dans un cas encore plus particulier, celui d'un circuit en échelle assemblé uniquement de résistances actives et de capacités, les zéros de la fonction de transfert ne peuvent se trouver que sur l'axe négatif réel.

Pour les quadripôles RC en échelle les zéros et les pôles Y_{11} sont simples et se trouvent sur l'axe réel négatif et alternent. Les pôles Y_{12}, également disposés sur l'axe réel négatif, sont simples. Les zéros Y_{12} peuvent être situés sur l'axe réel négatif, mais peuvent également être complexes et même se trouver dans le demi-plan droit.

Examinons l'exemple le plus simple. Soit pour un certain quadripôle $Y_{11}=\frac{(p+1)(p+3)}{(p+2)(p+5)}$ et $Y_{12}=\frac{p(p+0,5)}{(p+2)(p+5)}$. Etablir s'il peut être réalisé à l'aide d'un circuit RC en échelle. On peut réaliser les quadripôles à Y_{11} et Y_{12} donnés sous forme d'un circuit RC en échelle, puisque les fonctions Y_{11} et Y_{12} satisfont aux conditions énumérées dans IV et V.

Après avoir examiné les propriétés communes des paramètres d'entrée et mutuels et des fonctions de transfert de divers types de quadripôles, passons au problème de la réalisation d'un quadripôle en partant de sa fonction de transfert imposée et en supposant que cette fonction soit physiquement réalisable. Il existe beaucoup de méthodes de réalisation d'un quadripôle. Certaines de ces méthodes

reposent sur la fonction de transfert du quadripôle fonctionnant à vide. Dans les autres on utilise la fonction de transfert d'un quadripôle, débitant sur une résistance active adaptée. Dans ce dernier cas on suppose que la charge est égale à 1Ω et on l'appelle charge normalisée.

Etant donné qu'en réalité la charge n'est pas en général égale à 1Ω il faut, après avoir déterminé la forme du circuit et les valeurs des paramètres, recalculer des valeurs numériques des paramètres afin que son impédance d'entrée soit égale non pas à 1Ω mais à la valeur donnée de la charge. Nous examinons plus loin deux modes de réalisation. Le premier mode (§ 315a) dans lequel on part de la fonction de transfert à vide donnée, satisfaisant aux conditions de la fonction de transfert d'un quadripôle RC. Dans le deuxième mode (§ 315b), on utilise la fonction de transfert donnée pour une charge normalisée.

§ 315a. Synthèse des quadripôles constitués par des circuits RC en Г. Un quadripôle en Г, représenté sur la fig. 339, est un diviseur de tension. Sa fonction de transfert en tension à vide est:

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)+Z_2(p)}. \qquad \text{(j)}$$

Fig. 339

Par la suite nous écrirons à la place de $Z_1(p)$ et $Z_2(p)$ Z_1 et Z_2 respectivement. Supposons qu'à l'aide d'un quadripôle en Г, constitué par des éléments RC il faut réaliser la fonction de transfert en tension à vide suivante:

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{N}{M}. \qquad \text{(k)}$$

Ici N et M sont des polynômes disposés suivant les puissances de $p\cdot\frac{N}{M}$ satisfait aux conditions imposées à la fonction de transfert des quadripôles, constitués à partir des éléments RC et examinés au § 314b. Ecrivons que les deuxièmes membres de (k) et (j) sont

$$\frac{N}{M}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}. \qquad \text{(l)}$$

Divisons le numérateur et le dénominateur du deuxième membre de (l) par un certain polynôme, $Q=Q(p)$, choisi de manière qu'il soit du même degré que les polynômes N et M et que ses racines alternent avec les racines des équations $N=0$ et $M=0$. On a alors

$$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{\frac{N}{Q}}{\frac{M}{Q}}. \qquad \text{(m)}$$

En partant de l'équation (m) trouvons $Z_2=\frac{N}{Q}$ et $Z_1=\frac{M-N}{Q}$.

Ensuite réalisons les dipôles Z_1 et Z_2 en partant de leurs impédances opérationnelles ainsi trouvées. Cette opération est faite conformément aux § 313a et b.

§ 315b. Méthode de réalisation de la fonction de transfert d'un quadripôle par introduction des dipôles d'appoint. Cette méthode consiste en ce qui suit :

1. La fonction de transfert en tension $K(p)$ pour un quadripôle à charge normalisée, c'est-à-dire constituée par une résistance active $Z_{ch}=R_{ch}=1\Omega$, qu'on désire réaliser, est représentée d'abord sous forme de produit des fonctions de transfert de la forme

$$\frac{b_1p+c_1}{b_2p+c_2} \text{ et } \frac{a_1p+b_1p+c_1}{a_2p^2+b_2p+c_2}.$$

Dans des cas particuliers certains des coefficients de ces expressions peuvent être nuls. En décomposant $K(p)$ en facteurs il faut veiller à ce que les zéros complexes conjugués (et les pôles) ne se trouvent pas séparés et à ce que la fonction de transfert de chaque quadripôle puisse être réalisée physiquement.

Ainsi

$$K(p)=Q'\frac{(p+p_1)(p+p_3)\dots(p+p_n)}{(p+p_2)(p+p_4)\dots(p+p_m)}=K_1(p)K_2(p)\dots K_n(p).$$

Ici Q' — gain.

2. Le quadripôle cherché est réalisé en branchant par étages des quadripôles les plus simples à charge adaptée, dont chacun est monté suivant un schéma en Γ (fig. 340, *a*). Chaque quadripôle de la fig. 340, *a* comprend les impédances Z_1 et Z_2, munies d'accents, dont le nombre correspond à celui du quadripôle en question, à partir du commencement, et d'un dipôle d'appoint (une impédance

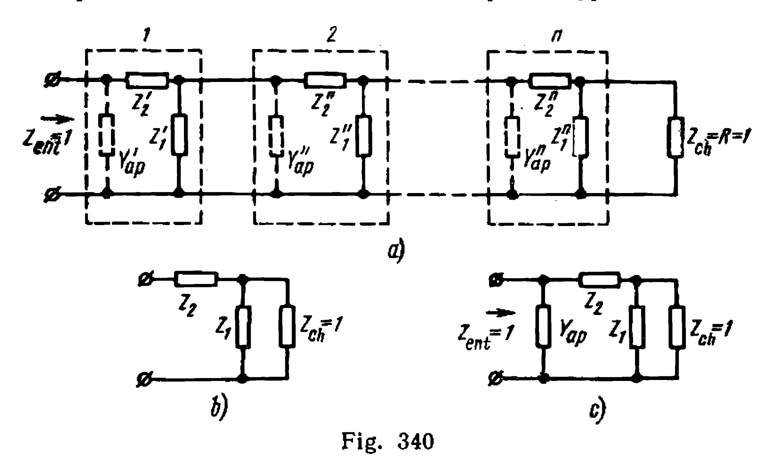


Fig. 340

à admittance Y_{ap}), représenté en pointillé et également pourvu d'un nombre approprié d'accents, couplé en parallèle aux bornes d'entrée de chaque quadripôle.

Les impédances Z_1 et Z_2 jouent le rôle d'un diviseur de tension; quant aux impédances à admittance Y_{ap}, on les choisit à l'étape finale du calcul de chaque quadripôle (et c'est pour cela qu'ils sont représentés en pointillé sur le schéma), pour que l'impédance d'entrée de chaque quadripôle soit égale à l'unité.

3. Le calcul des Z_1, Z_2 et Y_{ap} de chaque quadripôle se fait en partant de la fonction de transfert $K(p)$ connue pour chaque quadripôle, afin que l'impédance d'entrée de ce quadripôle soit égale à 1Ω, lorsque sa charge est aussi égale à 1Ω.

Si on désigne l'impédance des Z_1 et Z_{ch}, couplés en parallèle (fig. 340*b*) par $Z_e=\frac{1}{Ye}=\frac{Z_1Z_{ch}}{Z_1+Z_{ch}}$, la fonction de transfert en tension de chaque quadripôle est

$$K(p)=\frac{Z_2}{Z_2+Z_e}. \tag{n}$$

Mais la fonction de transfert de chaque quadripôle peut être représentée comme suit dans sa forme générale:

$$K(p)=Q\frac{N(p)}{M(p)}. \tag{o}$$

Ici: Q — gain; $N(p)$ et $M(p)$ — polynômes en p et pour lesquels, conformément au point 1, la puissance de chaque polynôme ne peut être supérieure à 2. Formons l'expression $\frac{1}{K(p)}-1$ en utilisant d'abord la formule (n) et ensuite la

formule (o) et écrivons ensuite que les résultats obtenus sont égaux. En partant de l'expression (n) nous avons $\frac{1}{K(p)} - 1 = Z_2 Y_e$. En partant de (o) nous obtenons

$$\frac{1}{K(p)} - 1 = \frac{M(p)}{QN(p)} - 1 = \frac{M(p) - QN(p)}{QN(p)}.$$

Par conséquent,

$$Z_2 Y_e = \frac{M(p) - QN(p)}{QN(p)}. \qquad (p)$$

Ici $Y_e = Y_1 + Y_{ch} = Y_1 + 1$; $Y_1 = \frac{1}{Z_{ch}}$. La quantité Y_1 est choisie arbitrairement et, par conséquent, il existe plusieurs versions possibles pour chaque quadripôle. Par exemple, on peut prendre $Y_1 = 0$. Dans ces conditions $Y_e = 1$. Nous obtenons ainsi l'une des solutions possibles. Nous avons une deuxième solution possible si nous supposons que Y_1 soit constitué par l'inductance L. Dans ce cas $Y_1 = \frac{1}{pL}$ et $Y_e = 1 + \frac{1}{pL}$. La troisième solution possible est $Y_1 = pC$ et $Y_e = 1 + pC$, etc. Après avoir choisi Y_1, on trouve en partant de l'expression (p) que $Z_{ap} = \frac{M(p) - QN(p)}{QN(p)\, Y_e(p)}$ et on réalise cette impédance par une méthode quelconque connue de réalisation de dipôles, en essayant d'obtenir un gain Q aussi grand que possible.

L'étape final de calcul de chaque quadripôle comprend la détermination de l'admittance Y_{ap} du dipôle d'appoint (fig. 340, *c*), en partant de ce que l'impédance d'entrée du quadripôle *a*, et par conséquent, son admittance d'entrée doit être égale à l'unité:

$$Y_{ap} + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{1 + Y_1}} = Y_{ap} + \frac{1 + Y_1}{1 + Z_2 + Z_{ap} Y_1} = 1.$$

On trouve ainsi Y_{ap} et on réalise ensuite le dipôle d'appoint.

CHAPITRE XI

RÉGIMES PERMANENTS DANS LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES COMPRENANT DES LIGNES À PARAMÈTRES DISTRIBUÉS. BASES DE LA THÉORIE DES FILTRES ÉLECTRIQUES

§ 316. Introduction et définitions fondamentales. Nous examinerons dans le présent chapitre les bases de la théorie des régimes permanents dans les circuits électriques et magnétiques comprenant des lignes à paramètres distribués.

On appelle lignes électriques à paramètres distribués les lignes dans lesquelles le courant et la tension varient continûment lorsqu'on passe d'un point (d'une section) de la ligne à un autre point voisin.

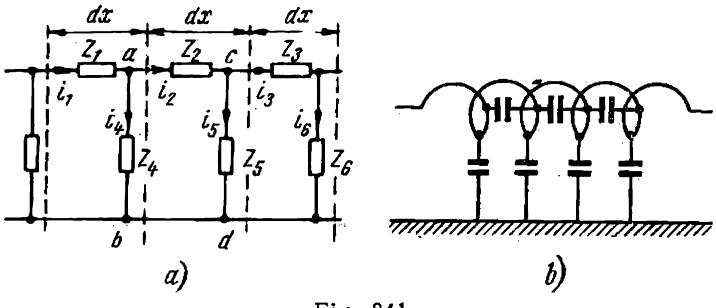


Fig. 341

On appelle lignes magnétiques à paramètres distribués des lignes le long desquelles le flux magnétique et l'intensité magnétique varient continûment lorsqu'on passe d'un point de la ligne à un point voisin.

L'effet de variation continue du courant (ou du flux) ainsi que l'effet de variation continue de la tension électrique (de l'intensité magnétique) le long d'une ligne est dû à l'existence dans ces lignes des impédances transversales et longitudinales distribuées (fig. 341, *a*).

Le schéma de la fig. 341, *a* représente un tronçon de ligne à paramètres distribués. Désignons par dx un élément infiniment petit de longueur de la ligne.

Appelons Z_1, Z_2, Z_3... les impédances longitudinales (série); elles comprennent les impédances des conducteurs direct et de retour. Les impédances Z_4, Z_5, Z_6... sont appelées impédances transversales.

Du fait des fuites de courant à travers l'impédance Z_4, le courant i_2 n'est pas égal au courant i_1. De même le courant i_3 n'est pas égal au courant i_2, etc. La tension entre les points a et b n'est pas égale non plus à la tension entre les points c et d, etc.

Dans les lignes électriques à paramètres distribués les impédances longitudinales sont constituées par les résistances actives des conducteurs de la ligne et par les inductances de deux tronçons parallèles de la

ligne de longueur dx. Les impédances transversales (schunt) sont constituées par les résistances de fuites, dues aux perditances de l'isolement entre les conducteurs de la ligne, et par les capacités, constituées par les éléments (tronçons) en regard de la ligne. Dans les lignes magnétiques à paramètres distribués les impédances longitudinales sont constituées par les réluctances propres des noyaux magnétiques dont est formée la ligne magnétique, tandis que les impédances transversales sont dues aux fuites du flux magnétique dans l'air entre les tronçons en regard de la ligne.

Les lignes à paramètres distribués sont appelées homogènes si toutes les impédances longitudinales des tronçons de même longueur de la ligne sont égales entre elles et si toutes les impédances transversales des tronçons de même longueur de la ligne sont de même égales les unes aux autres. Ainsi la section de la ligne de la fig. 341, *a* est considérée comme homogène si $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \ldots = Z_4 = Z_5 = Z_6$.

Une ligne à paramètres distribués est appelée hétérogène si ces impédances longitudinales sont différentes ou si ces impédances transversales ne sont pas égales entre elles.

En outre, les lignes à paramètres distribués peuvent être subdivisées en deux groupes importants: lignes non linéaires et linéaires. Dans les lignes non linéaires à paramètres distribués les impédances longitudinales et/ou transversales sont des fonctions des courants qui y circulent, tandis que dans les lignes linéaires les impédances longitudinales et transversales ne dépendent pas des courants qui y circulent.

On peut citer comme exemple d'une ligne électrique non linéaire à paramètres distribués une ligne électrique de transport d'énergie à haute tension, lorsqu'il existe entre les conducteurs de cette ligne une décharge silencieuse, appelée effet de couronne. Dans ce cas la capacité entre les tronçons en regard de la ligne est fonction de la tension entre ces tronçons.

On peut citer comme exemple d'une ligne magnétique non linéaire à paramètres distribués, une ligne constituée par des noyaux magnétiques placés en parallèle et pouvant être saturés au cours du fonctionnement de la ligne. Lorsqu'on parle d'une ligne à paramètres distribués, on a tendance de rattacher ce terme à des lignes de transport d'énergie électrique à puissance élevée et de grande longueur, aux lignes de liaison téléphoniques et télégraphiques par câbles aériens ou souterrains, aux lignes constituées par les rails du block-système dans les transports ferroviaires, aux antennes en radiotechnique et à d'autres lignes ou installations similaires.

Pourtant on rencontre des lignes à paramètres distribués même lorsqu'il n'existe pas de «lignes» proprement dites. Ainsi une bobine d'inductance quelconque constitue, à rigoureusement parler, une ligne à paramètres distribués. En effet il existe une capacité entre deux spires voisines de la bobine, de même qu'entre deux corps quelconques (fig. 341, *b*). En outre, il existe une capacité entre chaque spire et la masse de l'appareil (la terre).

Lorsque la bobine est parcourue par un courant alternatif, un courant circule à travers les capacités interspires et la capacité par rapport à la

terre. Pour la même tension entre les spires voisines le courant circulant dans ces capacités sera d'autant plus grand que la fréquence du courant alternatif est élevée. Pour des fréquences basses (égales à des dizaines, des centaines et des milliers de hertz) le courant à travers les capacités sera infiniment petit par rapport aux courants circulant dans les spires de la bobine et on peut négliger dans les calculs l'existence des capacités, comme ceci a été fait jusqu'ici *. Par contre, si la fréquence du courant est très grande, de l'ordre des millions et même des milliards de hertz, par exemple, les courants à travers les capacités peuvent devenir nettement supérieurs aux courants circulant dans les spires de la bobine. Dans ce cas la bobine dans son ensemble oppose au passage du courant alternatif une réactance capacitive et non pas inductive et acquiert de ce fait une propriété différente. A des fréquences intermédiaires de l'ordre de centaines de kilohertz une bobine d'inductance, à moins qu'on ne prenne des mesures de précaution spéciales, est une ligne typique à paramètres distribués. Si en outre, la bobine d'inductance est enroulée sur un noyau en acier, pouvant être saturé, et lorsque la fréquence du courant est suffisamment élevée, un tel dispositif dans son ensemble constitue une combinaison compliquée de circuits électrique et magnétique non linéaires, à paramètres distribués.

Le cours d'électrotechnique théorique ne traite que des circuits linéaires homogènes, à paramètres distribués. Toute la théorie exposée se rapporte aux lignes électriques à paramètres distribués fonctionnant en courant alternatif. La théorie des circuits électriques homogènes, linéaires, à paramètres distribués, en courant continu, découle directement de la théorie des circuits à courant alternatif si on considère que leur fréquence angulaire est nulle.

La théorie des lignes magnétiques homogènes linéaires à courant continu est analogue en principe à la théorie des lignes électriques homogènes linéaires à paramètres distribués, à condition d'utiliser dans les équations le flux magnétique à la place du courant, l'intensité magnétique à la place de la tension électrique, la réluctance longitudinale à la place de la résistance active longitudinale, la perméance transversale à la place de l'admittance transversale.

§ 317. Formation des équations différentielles pour les lignes homogènes à paramètres distribués. Soit R_0 la résistance longitudinale active linéique de la ligne, L_0 son inductance linéique, C_0 sa capacité linéique et G_0 sa perditance transversale linéique. Il y a lieu de souligner ici que la perditance transversale G_0 n'est pas une valeur inverse de la résistance longitudinale R_0.

Divisons la ligne en tronçons de longueur dx (fig. 342) ; x — distance calculée à partir du commencement de la ligne. Pour la longueur dx, la résistance active est égale à $R_0\,dx$, l'inductance à $L_0\,dx$, la perditance à $G_0\,dx$ et la capacité à $C_0\,dx$. Désignons par i le courant au

* Par la suite (voir §§ 341—345) en étudiant la théorie des filtres électriques fonctionnant à des fréquences relativement basses, nous ne tiendrons pas compte non plus de l'existence des capacités distribuées dans les bobines d'inductance elles-mêmes.

commencement du tronçon considéré de la ligne et par u la tension entre les conducteurs de la ligne au commencement de ce tronçon. Le courant, comme la tension, est en général une fonction de la distance x le long de la ligne et du temps t. Par conséquent, nous aurons affaire par la suite dans les équations aux dérivées partielles de u et de i par rapport au temps t et à la distance x.

Soit i le courant au commencement du tronçon examiné de la ligne, à un certain instant t; par suite de l'existence de fuites du courant à travers l'élément transversal de la ligne, le courant à l'extrémité du tronçon au même instant t est égal alors à $i+\frac{\partial i}{\partial x}dx$; $\frac{\partial i}{\partial x}$ est la vitesse de variation du courant le long de l'axe des x. Cette vitesse multipliée par la distance dx donne l'accroissement du courant le long du tronçon dx.

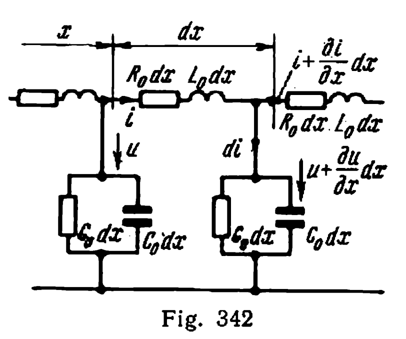


Fig. 342

De même, si la tension au commencement du tronçon est u, elle devient $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ à l'extrémité de ce tronçon et au même instant t. Ecrivons l'équation suivant la deuxième loi de Kirchhoff pour la maille, constituée par le tronçon de la ligne de longueur dx, en le parcourant dans le sens des aiguilles d'une montre:

$$-u=R_0\,dxi+L_0\,dx\frac{\partial i}{\partial t}+u+\frac{\partial u}{\partial x}\,dx=0.$$

Après simplification et division de cette équation par dx nous obtenons:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=L_0\frac{\partial i}{\partial t}+R_0i \qquad (11.1)$$

Suivant la première loi de Kirchhoff

$$i=di+i+\frac{\partial i}{\partial x}\,dx. \qquad (11.2)$$

Le courant di (fig. 342) est égal à la somme des courants circulant dans la perditance $G_0\,dx$ et dans la capacité $C_0\,dx$:

$$di=\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right)G_0\,dx+\frac{\partial}{\partial t}C_0\,dx\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right).$$

En négligeant les infiniments petits du second ordre on a

$$di=uG_0\,dx+C_0\,dx\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (11.3)$$

En substituant (11.3) dans (11.2), en simplifiant et en divisant l'équation par dx, on obtient:

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=G_0u+C_0\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (11.4)$$

Les équations (11.1) et (11.4) sont les équations différentielles fondamentales d'une ligne à paramètres distribués.

§ 318. Solution des équations d'une ligne à paramètres distribués en régime sinusoïdal permanent. Supposons que la tension et le courant de la ligne varient en fonction du temps suivant une loi sinusoïdale. Utilisons la méthode symbolique pour résoudre l'équation.

L'image du courant $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ est égale à $\dot{I}e^{j\omega t}$. Ici $\dot{I} = \frac{I_m e^{j\varphi_i}}{\sqrt{2}}$.

L'image de la tension $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ est égale à $\dot{U}e^{j\omega t}$, où $\dot{U} = \frac{\dot{U}_m e^{j\varphi_u}}{\sqrt{2}}$.

Les grandeurs complexes $\dot{U}$ et $\dot{I}$ sont des fonctions de la distance x mais non pas du temps. Le facteur $e^{j\omega t}$ est fonction du temps t, mais ne dépend pas de x. La représentation de l'image du courant et de l'image de la tension sous forme du produit de deux facteurs, dont l'un est une fonction de x seulement et l'autre une fonction de t seulement, permet de passer des équations aux dérivées partielles (équations (11.1) et (11.4)) à des équations différentielles. En effet,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^{j\omega t}\frac{d\dot{U}}{dx}; \\ L_0\frac{\partial i}{\partial t} &= L_0\dot{I}\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega L_0\dot{I}e^{j\omega t}; \end{aligned}\right\} \quad (11.5)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} &= e^{j\omega t}\frac{d\dot{I}}{dx}; \\ C_0\frac{\partial u}{\partial t} &= j\omega C_0\dot{U}e^{j\omega t}. \end{aligned}\right\} \quad (11.6)$$

Substituons (11.5) et (11.6) dans (11.1) et dans (11.4) et réduisons les équations obtenues en les divisant par le facteur $e^{j\omega t}$. Nous obtenons ainsi

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0\dot{I}; \quad (11.7)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0\dot{U}, \quad (11.8)$$

où

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0; \quad (11.9)$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0. \quad (11.10)$$

Résolvons le système d'équations (11.7) et (11.8) par rapport à $\dot{U}$. A cette fin dérivons (11.7) par rapport à x:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Z_0\frac{d\dot{I}}{dx}. \quad (11.11)$$

Dans (11.11) substituons à $\frac{di}{dx}$ le deuxième membre de l'équation (11.8); nous obtenons alors:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U}. \qquad (11.12)$$

L'équation (11.12) est une équation différentielle linéaire du second ordre. Sa solution est:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x}. \qquad (11.13)$$

Les nombres complexes $\dot{A}_1$ et $\dot{A}_2$ sont les constantes d'intégration que nous déterminerons par la suite en partant de la tension et du courant au commencement de la ligne ou de la tension et du courant à son extrémité.

Le coefficient

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} \qquad (11.14)$$

est appelé *constante (exposant) de propagation*; γ — nombre complexe et, par conséquent, peut être représenté sous la forme suivante:

$$\gamma = \beta + j\alpha, \qquad (11.15)$$

ici β — *coefficient d'affaiblissement*. Disons à l'avance qu'il caractérise l'affaiblissement de l'onde incidente par unité de longueur de la ligne (par 1 *km*) et, α — *coefficient de phase*; il caractérise la variation de la phase de l'onde incidente par unité de longueur de la ligne (par 1 *km*):

$$[\gamma] = [\beta] = [\alpha] = 1/km.$$

Le courant $\dot{I}$ est donné par (11.7):

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0}\frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\dot{A}_2 e^{-\gamma x} - \dot{A}_1 e^{\gamma x}}{\frac{Z_0}{\gamma}} \qquad (11.16)$$

La grandeur $\frac{Z_0}{\gamma} = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0 Y_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$, ayant les dimensions d'une résistance, est désignée par Z_C et s'appelle impédance caractéristique d'onde:

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = z_c e^{j\varphi_c}, \qquad (11.17)$$

ici z_c — module, et φ_c — argument de l'impédance caractéristique Z_C. Par conséquent,

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_1}{Z_C} e^{\gamma x}. \qquad (11.16')$$

§ 319. Constante de propagation et impédance caractéristique. Comme nous l'avons déjà indiqué la constante de propagation est

$$\gamma=\beta+j\alpha=\sqrt{(R_0+j\omega L_0)(G_0+j\omega C_0)}. \qquad (11.18)$$

Pour une ligne à courant continue $\omega = 0$ et, par conséquent,

$$\gamma=\sqrt{R_0 G_0}. \qquad (11.19)$$

Pour une ligne à courant alternatif sans pertes ($R_0 = 0$ et $G_0 = 0$)

$$\gamma=j\omega\sqrt{L_0 C_0}. \qquad (11.20)$$

Ecrivons les expressions pour le calcul approximatif de β et α dans une ligne à faibles pertes, lorsque $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$ et $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$. A cette fin récrivons (11.18) de la manière suivante:

$$\gamma=j\omega\sqrt{L_0 C_0}\left(1-j\frac{R_0}{\omega L_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-j\frac{G_0}{\omega C_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et développons les binômes en séries en se bornant chaque fois à deux termes. Nous obtenons

$$\gamma\approx\frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}+\frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}+j\omega\sqrt{L_0 C_0}. \qquad (11.21)$$

Par conséquent,

$$\beta=\frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}+\frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \qquad (11.22)$$

$$\alpha=\omega\sqrt{L_0 C_0}. \qquad (11.22')$$

Examinons maintenant l'expression pour l'impédance caractéristique. Pour le courant continu ($\omega = 0$) et il résulte de (11.17) que

$$Z_C=\sqrt{\frac{R_0}{G_0}}. \qquad (11.23)$$

Pour une ligne à courant alternatif sans pertes ($R_0 = G_0 = 0$)

$$Z_C=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \qquad (11.23)$$

Pour une ligne à courant alternatif à faibles pertes lorsque $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$ et $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$.

$$Z_C\approx\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left[1+j\left(-\frac{R_0}{2\omega L_0}+\frac{G_0}{2\omega C_0}\right)\right]. \qquad (11.24)$$

§ 320. Expressions pour calculer les grandeurs complexes de la tension et du courant en un point quelconque de la ligne en partant des grandeurs complexes de la tension et du courant au commencement de cette ligne. Désignons par x, comme auparavant, la distance entre le commencement de la ligne et le point considéré sur cette ligne.

Supposons qu'au commencement de la ligne, c.-à.-d pour $x = 0$, la tension soit égale à $\dot{U}_1$ et le courant à $\dot{I}_1$. Ecrivons les équations pour

calculer les constantes $\dot{A}_1$ et $\dot{A}_2$ en partant de $\dot{U}_1$ et $\dot{I}_1$. Il résulte de (11.13) et (11.16) que (pour $x=0$):

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_2 + \dot{A}_1; \tag{11.25}$$

$$\dot{I}_1 Z_C = \dot{A}_2 - \dot{A}_1. \tag{11.26}$$

Pour calculer $\dot{A}_1$ soustrayons l'équation (11.26) de (11.25);

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C}{2} = A_1 e^{j\psi_r}, \tag{11.27}$$

ici A_1 — module, ψ_r — argument de la valeur complexe $\dot{A}_1$;

$$\dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C}{2} = A_2 e^{j\psi_i} \tag{11.28}$$

ici A_2 — module, ψ_i — l'argument * du nombre complexe A_2.

Substituons (11.27) et (11.28) dans (11.13):

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C}{2} e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C}{2} e^{-\gamma x} = \dot{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \dot{I}_1 Z_C \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}.$$

Faisons l'appel aux fonctions hyperboliques. On sait que

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Donc

$$\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = \operatorname{ch} \gamma x \tag{11.29}$$

et

$$\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \operatorname{sh} \gamma x. \tag{11.30}$$

Par conséquent,

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z_C \operatorname{sh} j\gamma x. \tag{11.31}$$

Des transformations analogues appliquées à (11.16) donnent

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma x. \tag{11.32}$$

Les expressions (11.31) et (11.32) permettent de trouver la tension et le courant complexes en un point de la ligne, situé à la distance x de l'origine de cette ligne.

Il ne faut pas perdre de vue que l'argument des fonctions hyperboliques figurant dans ces expressions est un nombre complexe.

$$\gamma x = \beta x + j\alpha x.$$

---

* Les indices r et i sont les lettres initiales des mots (ondes) réfléchie et incidente (voir § 323).

§ 321. **Interprétation graphique du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique d'un argument complexe.** Les fonctions hyperboliques d'un argument complexe sont elles-mêmes des quantités complexes et peuvent être représentées par des vecteurs dans un plan complexe.

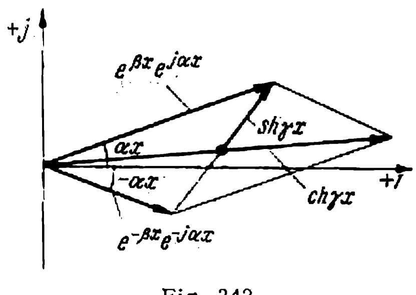


Fig. 343

Substituons $\beta x + j\alpha x$ à γx dans les équations (11.29) et (11.30):

$$\operatorname{ch}\gamma x = \frac{1}{2}\left(e^{\beta x}e^{j\alpha x} + e^{-\beta x}e^{-j\alpha x}\right);$$

$$\operatorname{sh}\gamma x = \frac{1}{2}\left(e^{\beta x}e^{j\alpha x} - e^{-\beta x}e^{-j\alpha x}\right).$$

Trouvons dans les tables des fonctions exponentielles les valeurs de $e^{\beta x}$ et $e^{-\beta x}$; traçons dans le plan complexe (fig. 343) le vecteur $e^{\beta x}e^{j\alpha x}$ et le vecteur $e^{-\beta x}e^{-j\alpha x}$.

Le premier vecteur est égal en module à $e^{\beta x}$; il est tourné d'un angle αx dans le sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport à l'axe des valeurs réelles.

Le deuxième vecteur est égal en module à $e^{-\beta x}$; il est tourné de l'angle αx dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport à l'axe des valeurs réelles.

Le cosinus hyperbolique est égal à la demi-somme de ces vecteurs et le sinus hyperbolique est égal à leur demi-différence.

§ 322. **Expressions pour le calcul de la tension et du courant en un point quelconque d'une ligne en partant de la tension et du courant complexes à l'extrémité de cette ligne.** Désignons par y la distance entre le point considéré de la ligne et l'extrémité de cette dernière et par l la longueur totale de la ligne (fig. 344):

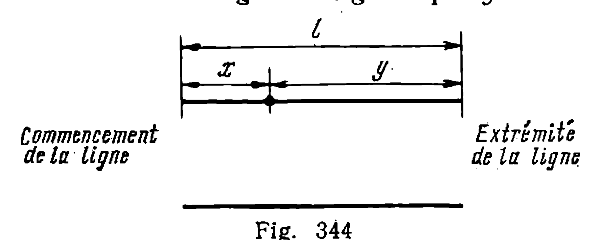


Fig. 344

$$y = l - x. \tag{11.33}$$

Supposons que la tension $\dot{U}_2$ et le courant $\dot{I}_2$ à l'extrémité de la ligne soient connus. Substituons dans (11.13) et (11.16') $x = l$, $\dot{U} = \dot{U}_2$, $\dot{I} = \dot{I}_2$ et écrivons deux équations pour déterminer les constantes d'intégration $\dot{A}_1$ et $\dot{A}_2$:

$$\dot{U}_2 = \dot{A}_2 e^{-\gamma l} + \dot{A}_1 e^{\gamma l};$$

$$\dot{I}_2 Z_C = \dot{A}_2 e^{-\gamma l} - \dot{A}_1 e^{\gamma l}$$

d'ou

$$\left.\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \frac{\dot{U}_2-\dot{I}_2Z_C}{2}\, e^{-\gamma l} = A_1e^{j\psi_r}\\ \dot{A}_2 &= \frac{\dot{U}_2+\dot{I}_2Z_C}{2}\, e^{\gamma l} = A_2e^{j\psi_i}\end{aligned}\right\} \qquad (11.34)$$

Si on substitue (11.34) dans (11.13) et (11.16′), si on remplace $l - x$ par y et si on passe ensuite aux fonctions hyperboliques, on obtient:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \dot{I}_2 Z_C \operatorname{sh} \gamma y\,; \qquad (11.35)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma y + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y. \qquad (11.36)$$

Les expressions (11.35) et (11.36), si on connaît $\dot{U}_2$ et $\dot{I}_2$, permettent de trouver la tension et le courant complexes en un point se trouvant à la distance y de l'extrémité de la ligne.

§ 323. Ondes incidentes et réfléchies se propageant dans une ligne. Substituons dans (11.13) $A_1e^{j\psi_r}$ à A_1, $A_2e^{j\psi_i}$ à A_2 [(voir (11.34)] et remplaçons γ par $\beta + j\alpha$. Nous obtenons

$$\dot{U} = A_1e^{\beta x}e^{j(\psi_r+\alpha x)} + A_2e^{-\beta x}e^{j(\psi_i-\alpha x)}. \qquad (11.37')$$

Effectuons une opération analogue sur l'expression (11.16) en remplaçant en outre Z_C par $z_c\, e^{j\varphi_c}$ [voir (11.17)],

$$\dot{I} = -\frac{A_1}{z_c}\, e^{\beta x}e^{j(\psi_r+\alpha x-\varphi_c)} + \frac{A_2}{z_c}\, e^{-\beta x}e^{j(\psi_i-\alpha x-\varphi_c)}. \qquad (11.38')$$

Pour passer de la tension et du courant complexes à des fonctions du temps, multiplions les seconds membres des (11.37′) et (11.38′) par $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et prenons la partie imaginaire du produit ainsi obtenu:

$$u = A_1\sqrt{2}e^{\beta x} \sin(\omega t + \psi_r + \alpha x) + A_2\sqrt{2}e^{-\beta x} \sin(\omega t + \psi_i - \alpha x)\,; \qquad (11.37)$$

$$i = -\frac{A_1}{z_c}\sqrt{2}e^{\beta x} \sin(\omega t + \psi_r + \alpha x - \varphi_c) + \frac{A_2\sqrt{2}}{z_c}\, e^{-\beta x} \sin(\omega t + \psi_i - \alpha x - \varphi_c). \qquad (11.38)$$

On appelle *onde électromagnétique incidente* (*directe*) le phénomène de déplacement de l'état électromagnétique (de l'onde électromagnétique) dans le sens allant de la source d'énergie au récepteur, c'est-à-dire dans le sens d'augmentation de la coordonnée x dans le cas considéré.

Un état électromagnétique est déterminé par l'ensemble des champs électrique et magnétique. L'onde incidente se propage de la source d'énergie au récepteur en transportant l'énergie contenue dans ses champs électrique et magnétique. Nous appellerons *onde électromagnétique réfléchie* le phénomène de déplacement de l'état électromagnétique (de l'onde électromagnétique) dans le sens allant du récepteur d'énergie vers la

source d'énergie, c'est-à-dire dans le sens de la diminution de la coordonnée x dans le cas considéré.

L'onde électromagnétique incidente est constituée par une onde incidente de tension [deuxième terme de (11.37)] et par l'onde incidente du courant [deuxième terme de (11.38)]. L'onde électromagnétique réfléchie est constituée par l'onde réfléchie de tension [premier terme de (11.37)] et l'onde réfléchie de courant [premier terme de (11.38)].

Le signe —, affecté à l'onde réfléchie, exprime au point de vue mathématique que la flux d'énergie transportée par l'onde électromagnétique réfléchie se déplace en sens contraire du flux d'énergie transporté par l'onde incidente.

Chacune des composantes de l'onde incidente (l'onde de tension ou l'onde de courant) est une oscillation sinusoïdale, dont l'amplitude

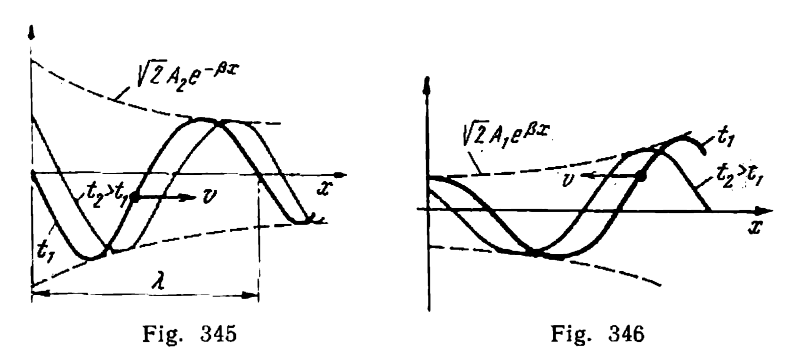


Fig. 345

Fig. 346

décroît avec l'accroissement de x (facteur $e^{-\beta x}$), et dont l'argument est une fonction du temps et de la coordonnée x.

Chacune des composantes de l'onde électromagnétique réfléchie s'affaiblit au fur et à mesure que l'onde se déplace de l'extrémité de la ligne vers le commencement de cette dernière (facteur $e^{\beta x}$). Au point de vue physique l'effet de la diminution des amplitudes des ondes incidente et réfléchie, au fur et à mesure de leur déplacement le long de la ligne, s'explique par l'existence des pertes dans cette ligne.

Nous avons représenté sur la fig. 345 les courbes de la répartition de l'onde incidente de tension le long de la ligne (en fonction de x) pour deux instants voisins : en gros trait pour t_1 et en trait fin pour $t_2 > t_1$. L'onde incidente se propage de gauche à droite. En la construisant nous avons pris $\psi_{i1} = 0$.

On voit sur la fig. 346 les courbes de répartition de l'onde réfléchie de tension pour deux instants voisins : t_1 et $t_2 > t_1$. L'onde réfléchie se propage de droite à gauche.

§ 324. Vitesse de phase. On appelle vitesse de phase v_{ph}, la vitesse avec laquelle il faut se déplacer le long de la ligne pour observer toujours la même phase des oscillations. Ceci peut être exprimé aussi d'une manière différente : la vitesse de phase est la vitesse de déplacement le long de la ligne d'un état de phase invariable. Si la phase de l'onde incidente

de tension est invariable, on peut écrire conformément à (11.37)

$$\omega t = \psi_i - \alpha x = \text{const}.$$

Prenons la dérivée par rapport au temps des deux membres de cette dernière égalité :

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \psi_i - \alpha x) = 0,$$

ou

$$\omega = \alpha \frac{dx}{dt} = 0.$$

Donc

$$v_{ph} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\alpha}.$$

E x e m p l e 151. Trouver la vitesse de phase pour une ligne aérienne à deux conducteurs, à pertes faibles.

S o l u t i o n. Il découle de (11.22′) que $\alpha = \omega \sqrt{L_0C_0}$. Par conséquent

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}. \qquad (11.39')$$

Inductance d'une ligne aérienne à deux conducteurs [voir expression (4.10) de la première partie de ce cours] :

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r}.$$

Ici μ_0 — perméabilité du vide, d — distance entre les axes des conducteurs, r — rayon de chaque conducteur.

La capacité linéique d'une ligne à deux conducteurs [voir expression (13.43) de la troisième partie de ce cours]

$$C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{d}{r}},$$

où ε_0 — permittivité du vide ;

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{1{,}256\cdot10^{-6} H/m \cdot 8{,}86\cdot10^{-12} F/m}} \approx 300\,000 \ km/s.$$

§ 325. **Longueur d'onde.** On appelle longueur d'onde λ la distance dont se propage l'onde au cours d'une seule période $T = \frac{1}{f}$:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}. \qquad (11.40)$$

E x e m p l e 152. Trouver la longueur d'une onde électromagnétique pour $f = 50 \ Hz$ et pour $f = 50 \cdot 10^6 \ Hz$.

S o l u t i o n. Pour $f=50\ Hz$

$$\lambda=\frac{300\,000\ km/s}{50\ 1/s}=6000\ km.$$

Pour $f=50\cdot 10^6\ Hz$

$$\lambda=6\ m.$$

§ 326. Ligne sans distorsions. Une ligne ne donnant pas lieu à des distorsions est une ligne pour laquelle les ondes de toutes fréquences se propagent avec la même vitesse de phase et s'affaiblissent toutes suivant le même taux.

Lorsqu'une onde électromagnétique se déplace le long d'une ligne sans distorsions, l'onde de tension et l'onde de courant décroissent en amplitude, mais les formes des ondes de tension à l'extrémité et au commencement de la ligne sont semblables ; de même les formes des ondes du courant au commencement et à l'extrémité de la ligne sont également semblables.

Les lignes sans distorsions sont utilisées en téléphonie. Dans les communications téléphoniques le long de ces lignes le timbre de la voix n'est pas déformé (en d'autres termes, la composition spectrale de la voix est transmise sans distorsions).

Afin qu'une ligne ne donne pas lieu à des distorsions, il faut que le coefficient d'affaiblissement β et la vitesse de phase v_{ph} ne dépendent pas de la fréquence ; β et v_{ph} ne dépendent pas de la fréquence, si les relations suivantes existent entre les paramètres de la ligne :

$$\frac{R_0}{L_0}=\frac{G_0}{C_0}. \qquad (11.41)$$

Pour simplifier les écritures désignons

$$\frac{R_0}{L_0}=\frac{G_0}{C_0}=k.$$

Par définition

$$\gamma=\beta+j\alpha=\sqrt{Z_0Y_0}.$$

Mais

$$Z_0=R_0+j\omega L_0=L_0(k+j\omega);$$
$$Y_0=G_0+j\omega C_0=C_0(k+j\omega)$$

et

$$\gamma=(k+j\omega)\sqrt{L_0C_0}.$$

Par conséquent,

$$\beta=k\sqrt{L_0C_0}=\sqrt{R_0G_0}; \qquad (11.42)$$
$$\alpha=\omega\sqrt{L_0C_0}$$

et

$$v_{ph}=\frac{\omega}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}. \qquad (11.43)$$

Il découle des expressions (11.42) et (11.43) que le coefficient d'affaiblissement β et la vitesse de phase v_{ph} dans une ligne sans distorsions ne dépendent pas en effet de la fréquence.

Pour une ligne sans distorsions l'impédance caractéristique

$$Z_C=\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

est un nombre réel et ne dépend pas non plus de la fréquence.

Pour s'assurer que la forme de l'onde de tension u_2 à l'extrémité d'une telle ligne est entièrement semblable à la forme de l'onde de tension u_1 au commencement de cette ligne, écrivons la tension à l'entrée de la ligne sous la forme d'une somme de deux oscillations sinusoïdales, dont l'une a une fréquence angulaire ω et l'autre 2ω et formons l'équation pour u_2. Soit

$$u_1=U_{1m}\sin(\omega t+\psi_1)+U_{2m}\sin(2\omega t+\psi_2).$$

Du fait que pour une ligne sans distorsions le coefficient d'affaiblissement β ne dépend pas de la fréquence [voir expression (11.42)], les amplitudes des deux oscillations à la distance l décroissent dans la même proportion et deviennent égales à $U_{1m}e^{-\beta l}$ et $U_{2m}e^{-\beta l}$ respectivement.

Pour une ligne sans distorsions le coefficient de phase α est directement proportionnel à la fréquence et, par conséquent, pour la pulsation 2ω le coefficient α est deux fois plus grand que pour la pulsation ω.

Par conséquent, la valeur instantanée de la tension à l'extrémité de la ligne doit être écrite comme suit:

$$u_2=U_{1m}e^{-\beta l}\sin(\omega t+\psi_1-\alpha l)+U_{2m}e^{-\beta l}\sin(2\omega t+\psi_2-2\alpha l)=$$

$$=U_{1m}e^{-\beta l}\sin\left[\omega\left(t-\frac{\alpha l}{\omega}\right)+\psi_1\right]+U_{2m}e^{-\beta l}\sin\left[2\omega\left(t-\frac{2\alpha l}{2\omega}\right)+\psi_2\right].$$

Mettons en facteur $e^{-\beta l}$ et désignons le temps $t-\frac{\alpha l}{\omega}$ par τ. Nous obtenons ainsi:

$$u_2=e^{-\beta l}\left[U_{1m}\sin(\omega\tau+\psi_1)+U_{2m}\sin(2\omega\tau+\varphi_2)\right].$$

En comparant cette dernière expression avec celle pour u_1, on peut arriver à la conclusion que la tension à l'extrémité de la ligne a la même forme que la tension au commencement de cette dernière. Cependant elle est réduite en amplitude du fait de l'affaiblissement et est décalée dans le temps de $\frac{\alpha l}{\omega}=\frac{l}{v_{ph}}$ s. Ce temps est justement le temps de propagation de l'onde suivant une ligne de longueur l.

§ 327. Charge adaptée. Une ligne à paramètres distribués sert en général d'élément intermédiaire entre la source d'énergie et la charge.

Désignons l'impédance de la charge par Z_2 $\left(Z_2=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right)$. Si Z_2 n'est pas égal à l'impédance caractéristique de la ligne Z_C, l'onde incidente est partiellement absorbée par la charge et partiellement réfléchie par cette dernière (ce qui donne lieu à une onde réfléchie). On prend souvent $Z_2=Z_C$. Une telle charge est appelée adaptée; dans ces conditions l'onde réfléchie n'existe pas.

On peut s'en assurer à l'aide de (11.34). En effet, l'onde réfléchie sera absente, puisque A_1 est nul:

$$\dot{A}_1=\frac{1}{2}(\dot{U}_2-\dot{I}_2Z_C)\,e^{-\gamma l}=\frac{1}{2}(\dot{U}_2-\dot{U}_2)\,e^{-\gamma l}=0.$$

§ 328. Calcul de la tension et du courant pour une charge adaptée. Pour obtenir les expressions de calcul de la tension et du courant en un point quelconque, à la distance y de l'extrémité de la ligne, substituons dans les expressions (11.35) et (11.36) Z_2 à Z_C, remplaçons $\dot{I}_2Z_2$ par $\dot{U}_2$ et $\frac{\dot{U}_2}{Z_2}$ par $\dot{I}_2$. Nous obtenons alors:

$$\dot{U}=\dot{U}_2(\operatorname{ch}\gamma y+\operatorname{sh}\gamma y)=\dot{U}_2e^{\gamma y}; \qquad (11.44)$$

$$\dot{I}=\dot{I}_2(\operatorname{ch}\gamma y+\operatorname{sh}\gamma y)=\dot{I}_2e^{\gamma y}. \qquad (11.45)$$

Au commencement de la ligne, pour $y=l$

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1&=\dot{U}_2e^{\gamma l}=U_2e^{j\varphi_{U_2}}e^{\beta l}e^{j\alpha l};\\ \dot{I}_1&=\dot{I}_2e^{\gamma l}=I_2e^{j\varphi_{I_2}}e^{\beta l}e^{j\alpha l},\end{aligned}\right\} \qquad (11.46)$$

où U_2 — module, et φ_{U_2} — argument de la tension complexe $\dot{U}_2$; I_2 — — module et φ_{I_2} — argument du courant complexe $\dot{I}_2$.

§ 329. Rendement d'une ligne de transport à charge adaptée. Le rendement d'une ligne de transport est égal au rapport de la puissance active P_2 à l'extrémité de la ligne à la puissance active P_1 au commencement de cette ligne:

$$P_2=U_2I_2\cos(\varphi_{U_2}-\varphi_{I_2})=U_2I_2\cos\varphi_c,$$

où φ_C — argument de l'impédance caractéristique Z_C.

Pour une charge adaptée l'angle entre $\dot{U}_1$ et $\dot{I}_1$ est aussi égal à φ_C et, par conséquent, conformément aux expressions (11.46)

$$P_1=U_1I_1\cos\varphi_c=U_2I_2e^{2\beta l}\cos\varphi_c.$$

Par conséquent,

$$\eta=\frac{P_2}{P_1}=e^{-2\beta l}. \qquad (11.47)$$

§ 330. Neper — unité de mesure de l'affaiblissement. Le produit βl caractérise l'affaiblissement d'une onde incidente sur la longueur l de la ligne. En partant de l'expression (11.47) et en prenant le logarithme, nous trouvons que pour une charge adaptée

$$\beta l=\frac{1}{2}\ln\frac{P_1}{P_2}. \qquad (11.48)$$

Le produit $\beta\, l$ est, rigoureusement parlant, une grandeur sans dimensions, mais dans la technique de communications il est convenu de l'exprimer en nepers. Une ligne a un amortissement de 1 *Np*, si

$$\frac{1}{2}\ln\frac{P_1}{P_2}=1,$$

autrement dit

$$\frac{P_1}{P_2}=e^2.$$

Dans ces conditions

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{I_1}{I_2}=e,$$

où e — base des logarithmes naturels (neperiens) *.

§ 331. Impédance d'entrée d'une ligne chargée. On voit sur la fig. 347 un circuit constitué par une source de tension $\dot{U}_1$, une ligne à paramètres distribués d'une longueur l et une charge Z_2. L'impédance d'entrée Z_{ent} est égale au rapport de $\dot{U}_1$ à $\dot{I}_1$. Substituons dans les expressions (11.35) et (11.36) l à y et remplaçons $\dot{U}_2$ par $\dot{I}_2 Z_2$. Nous obtenons ainsi

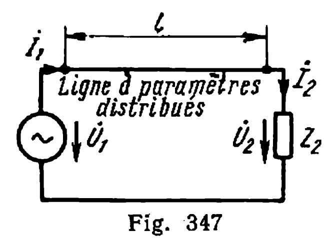


Fig. 347

$$Z_{ent}=\frac{\dot{I}_2 Z_2\,\text{ch}\,\gamma l+\dot{I}_2 Z_C\,\text{sh}\,\gamma l}{\dot{I}_2\frac{Z_2}{Z_C}\,\text{sh}\,\gamma l+\dot{I}_2\,\text{ch}\,\gamma l},$$

ou

$$Z_{ent}=\frac{Z_2\,\text{ch}\,\gamma l+Z_C\,\text{sh}\,\gamma l}{\frac{Z_2}{Z_C}\,\text{sh}\,\gamma l+\text{ch}\,\gamma l}. \qquad (11.49)$$

Si la charge est adaptée (c.-à.-d. si $Z_2 = Z_C$) il découle de (11.49) que l'impédance d'entrée est égale à l'impédance caractéristique.

$$Z_{ent}=\frac{Z_C(\text{ch}\,\gamma l+\text{sh}\,\gamma l)}{\text{sh}\,\gamma l+\text{ch}\,\gamma l}=Z_C.$$

§ 332. Equation pour calculer la tension et le courant dans une ligne sans pertes. Il n'existe pas, rigoureusement parlant, de lignes sans pertes. Cependant, on peut créer une ligne à pertes très faibles (à R_0 et G_0 ** très faibles) et appliquer à cette ligne la théorie des lignes sans pertes.

Il a été dit auparavant [voir (11.22)] que si

$$R_0=G_0=0,$$

on a

$$\gamma=\beta+j\alpha=j\omega\sqrt{L_0C_0},$$

c.-à.-d. que le coefficient d'affaiblissement $\beta = 0$ et le coefficient de phase

$$\alpha=\omega\sqrt{L_0C_0}.$$

---

* L'affaiblissement est également mesuré en bels (B) ou en décibels (dB): $1\,Np = 8{,}686\ dB$.

** Par rapport à ωL_0 et ωC_0 respectivement.

Dans ces conditions l'impédance caractéristique Z_C, purement résistif [voir (11.23)] est égale à $\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$.

Pour calculer la tension $\dot{U}$ et le courant $\dot{I}$ en un point quelconque de la ligne, rapportons-nous aux expressions (11.35) et (11.36). Reproduisons-les:

$$\dot{U}=\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y+\dot{I}_2 Z_C \operatorname{sh} \gamma y; \qquad (11.35)$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_2}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma y+\dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y. \qquad (11.36)$$

N'oublions pas que

$$\gamma y=(\beta+j\alpha)\, y=(0+j\alpha)\, y=j\alpha y.$$

Le cosinus hyperbolique de l'argument imaginaire jx est égal au cosinus circulaire de l'argument x:

$$\operatorname{ch} jx=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}=\frac{1}{2}(\cos x+j \sin x+\cos x-j \sin x)=\cos x.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{ch} \gamma y=\operatorname{ch} j\alpha y=\cos \alpha y.$$

Le sinus hyperbolique de l'argument jx est égal au sinus circulaire de l'argument x, multiplié par j:

$$\operatorname{sh} jx=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2}=\frac{1}{2}(\cos x+j \sin x-\cos x+j \sin x)=j \sin x.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{sh} \gamma y=\operatorname{sh} j\alpha y=j \sin \alpha y.$$

Donc pour une ligne sans pertes les expressions (11.35) et (11.36) sont à récrire de la manière suivante:

$$\dot{U}=\dot{U}_2 \cos \alpha y+j\dot{I}_2 Z_C \sin \alpha y; \qquad (11.35')$$

$$\dot{I}=j\frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin \alpha y+\dot{I}_2 \cos \alpha y. \qquad (11.36')$$

§ 333. Impédance d'entrée d'une ligne sans pertes à vide. En marche à vide $I_2=0$. Par conséquent,

$$Z_{ent\ mv}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\dot{U}_2 \cos \alpha y}{j\frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin \alpha y}=\frac{-jZ_C}{\operatorname{tg} \alpha y}=\frac{-j\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}{\operatorname{tg} \alpha y}. \qquad (11.50)$$

Examinons le caractère de variation de $Z_{ent\ mv}$, lorsque la distance y entre l'extrémité de la ligne et le point considéré sur cette dernière varie.

Dans l'intervalle des valeurs de αy de 0 à $\frac{\pi}{2}$, tgαy varie de 0 à ∞, et par conséquent, $Z_{ent\ mv}$ a un caractère capacitif (facteur $-j$) et son module varie entre ∞ et 0.

Dans l'intervalle des valeurs de αy compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, tg αy est négatif et varie entre $-\infty$ et 0. Par conséquent, $Z_{ent\ mv}$ varie en module entre 0 et ∞ et a un caractère inductif (facteur $+j$), etc. Ainsi, en faisant varier la longueur du tronçon d'une ligne sans pertes, on peut similer une réactance capacitive ou inductive de valeur quelconque. Dans la pratique cette propriété est utilisée dans divers dispositifs radiotechniques à haute fréquence.

§ 334. Impédance d'entrée d'une ligne sans pertes lorsque l'extrémité de cette ligne est en court-circuit. Il découle des (11.35) et (11.36), pour un court-circuit à l'extrémité de la ligne $U_2 = 0$, que l'impédance d'entrée est

$$Z_{ent\ cc} = jZ_C \operatorname{tg} \alpha y = j \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \operatorname{tg} \alpha y, \qquad (11.51)$$

où

$$\alpha = \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Faisons varier la longueur y du tronçon de la ligne et étudions le caractère de variation de l'impédance d'entrée.

Dans l'intervalle des valeurs αy de 0 à $\frac{\pi}{2}$, tg αy est positif et varie entre 0 et ∞; par conséquent, dans cet intervalle l'impédance d'entrée a un caractère inductif et son module varie entre 0 et ∞.

Dans l'intervalle de αy entre π et $\frac{\pi}{2}$, l'impédance d'entrée a un caractère capacitif et son module varie entre $-\infty$ et 0 (au point $\alpha y = \frac{\pi}{2}$, tg αy varie par saut de $+\infty$ à $-\infty$). Ainsi, en modifiant la longueur d'un tronçon d'une ligne court-circuitée à son extrémité, on peut créer des réactances inductives et capacitives de différentes valeurs.

Des ondes électromagnétiques dites stationnaires se forment dans une ligne sans pertes à vide, en court-circuit, ainsi qu'en cas de charge purement réactive.

§ 335. Définition des ondes électromagnétiques stationnaires. Une onde électromagnétique stationnaire est une onde électromagnétique obtenue par superposition des ondes électromagnétiques incidente et réfléchie d'intensité égale, se déplaçant à la rencontre l'une de l'autre.

L'onde électromagnétique stationnaire est constituée par une onde stationnaire de tension et une onde stationnaire de courant. Au point de vue mathématique une onde stationnaire de tension et une onde stationnaire de courant sont toutes les deux décrites par le produit de deux fonctions périodiques (trigonométriques dans le cas considéré). L'une d'elles est une fonction de la coordonnée considérée de la ligne (αy dans notre cas), et l'autre est une fonction du temps (ωt). Une onde station-

naire de tension et une onde stationnaire de courant sont toujours décalées l'une par rapport à l'autre dans l'espace et dans le temps.

Le décalage dans le temps entre l'onde stationnaire de tension et l'onde stationnaire de courant est égal à 90°. Le décalage dans l'espace entre l'onde stationnaire de tension et l'onde stationnaire de courant est égal au quart de la longueur d'onde [voir (11.52') et (11.53'), (11.54') et (11.55')].

Les points de la ligne, où la fonction périodique de la coordonnée s'annule, sont appelés nœuds et les points de la ligne, pour lesquels la fonction périodique de la coordonnée atteint ses valeurs maximales, sont appelés ventres.

En cas d'apparition des ondes stationnaires, l'énergie électromagnétique n'est pas transmise du commencement de la ligne à son extrémité. Cependant il existe une certaine énergie électromagnétique accumulée dans chaque tronçon de ligne égal au quart de la longueur d'onde.

Cette énergie passe périodiquement d'une forme d'énergie (celle du champ électrique) en une autre (énergie du champ magnétique).

Aux instants, où le courant dans l'ensemble de la ligne devient nul et où la tension atteint sa valeur maximale, toute l'énergie a pris la forme d'énergie du champ électrique.

Aux instants, où la tension le long de l'ensemble de la ligne est nulle et où le courant atteint sa valeur maximale, toute l'énergie a pris la forme d'énergie du champ magnétique.

§ 336. Ondes stationnaires dans une ligne sans pertes à vide. Il découle des (11.35') et (11.36') qu'à vide

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \alpha y ; \tag{11.52}$$

$$\dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \alpha y. \tag{11.53}$$

Pour passer aux fonctions du temps, multiplions les seconds membres des deux dernières expressions par $\sqrt{2}\, e^{j\omega t}$ et prenons les parties imaginaires des produits ainsi obtenus

$$u = \sqrt{2} U_2 \cos \alpha y \sin \omega t ; \tag{11.52'}$$

$$i = \frac{\sqrt{2} U_2}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \alpha y \sin (\omega t + 90°). \tag{11.53'}$$

L'angle de 90°, figurant dans l'argument du sinus dans l'expression (11.53'), correspond au facteur j dans (11.53). Aux points $\alpha y = k\pi$, où $k = 0, 1, 2, \ldots$, nous avons des nœuds de courant et des ventres de tension.

Les courbes des ondes stationnaires de tension et de courant pour trois instants consécutifs $\omega t_1 = 0$, $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$ et $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$ sont repré-

sentées sur la fig. 348; la courbe supérieure est celle de la tension et la courbe inférieure est celle du courant. L'onde est représentée en gros trait pour $\omega t_1 = 0$, en trait fin pour $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$, en pointillé pour $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$ pour la tension et pour $\omega t_3 = \pi$ pour le courant.

§ 337. Ondes stationnaires dans une ligne sans pertes pour un court-circuit à l'extrémité de cette ligne. Il découle des (11.35') et (11.36') qu'en cas de court-circuit à l'extrémité de la ligne ($U_2 = 0$)

$$\dot{U} = j\dot{I}_2 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sin \alpha y; \qquad (11.54)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \cos \alpha y. \qquad (11.55)$$

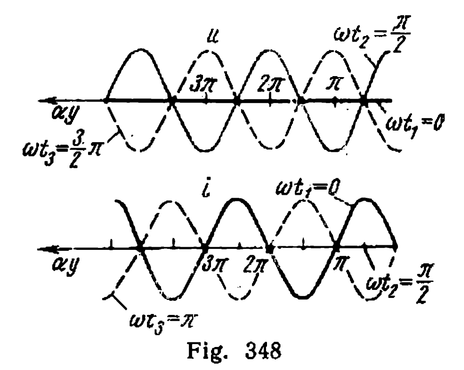


Fig. 348

Pour passer aux valeurs instantanées multiplions les seconds membres de ces dernières expressions par $\sqrt{2}\, e^{j\omega t}$ et prenons les parties imaginaires des produits ainsi obtenus:

$$u = \sqrt{2} I_2 \frac{L_0}{C_0} \sin \alpha y \sin (\omega t + 90^\circ); \qquad (11.54')$$

$$i = \sqrt{2} I_2 \cos \alpha y \sin \omega t. \qquad (11.55')$$

Dans le second membre de l'expression (11.54'), (celle de la tension), nous trouvons le facteur $\sin \alpha y \sin (\omega t + 90^\circ)$. Le même facteur existe dans l'expression (11.53') pour le courant i.

Par conséquent, l'allure de l'onde stationnaire de tension en cas de court-circuit à l'extrémité de la ligne reproduit au point de vue qualitatif l'allure de l'onde stationnaire de courant pour une ligne à vide.

De même, l'allure de l'onde stationnaire de courant pour une ligne en court-circuit reproduit qualitativement l'allure de l'onde stationnaire de tension pour une ligne à vide.

§ 338. Analogie entre les équations d'une ligne à paramètres distribués et les équations d'un quadripôle. La tension et le courant à l'entrée d'une ligne à paramètres distribués ($\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$) sont liés à la tension et au courant à l'extrémité de cette ligne ($\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$) par les équations suivantes [elles sont obtenues à partir de (11.35) et (11.36) dans lesquelles on a substitué à y la longueur l de l'ensemble de la ligne]:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_C \operatorname{sh} \gamma l;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l.$$

Comparons-les aux équations d'un quadripôle, données dans la première partie de ce cours :

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.$$

Il résulte de cette comparaison que les équations ont une forme parfaitement analogue et, si on admet que

$$A = D = \operatorname{ch} \gamma l; \tag{11.56}$$

$$B = Z_C \operatorname{sh} \gamma l; \tag{11.57}$$

$$C = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z_C}, \tag{11.58}$$

la relation entre $\dot{U}_1$ et $\dot{U}_2$ et $\dot{I}_2$, ainsi que la relation entre $\dot{I}_1$ et $\dot{U}_2$ et $\dot{I}_2$ dans les lignes à paramètres distribués, est exactement la même que pour un quadripôle. En d'autres termes, et lorsque les conditions (11.56)—(11.58) sont respectées, le quadripôle est équivalent à une ligne à paramètres distribués en ce qui concerne les relations entre les courants et les tensions d'entrée et de sortie.

§ 339. Remplacement d'un quadripôle par une ligne à paramètres distribués équivalente et remplacement inverse. Lorsque dans le circuit de la fig. 347 on permute la source et la charge, les courants dans cette

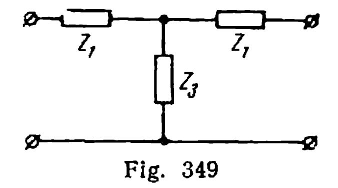


Fig. 349

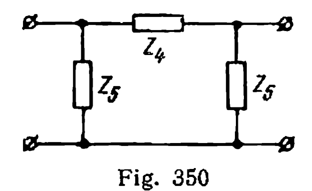


Fig. 350

source et dans cette charge ne varient pas. Un quadripôle symétrique possède la même propriété. Par conséquent, une ligne homogène à paramètres distribués peut être remplacée par un quadripôle symétrique et, inversement, un quadripôle symétrique peut être remplacé par un tronçon de ligne homogène à paramètres distribués. Pour effectuer ce remplacement il faut partir des équations (11.56)—(11.58) et des relations, par lesquelles les paramètres d'un quadripôle symétrique sont liés aux coefficients A, B, C.

Deux schémas équivalents d'un quadripôle ont été indiqués dans la première partie de ce cours (voir § 120) : le schéma en T (fig. 349) et le schéma en Π (fig. 350).

Pour un schéma symétrique en T

$$Z_1 = \frac{A-1}{C} \tag{11.59}$$

et

$$Z_3 = \frac{1}{C}, \tag{11.60}$$

ou

$$A = D = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}; \qquad (11.61)$$

$$B = 2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_3}; \qquad (11.62)$$

$$C = \frac{1}{Z_3}. \qquad (11.63)$$

Pour un schéma symétrique en П:

$$Z_4 = B. \qquad (11.64)$$

$$Z_5 = \frac{B}{A-1}. \qquad (11.65)$$

ou

$$A = 1 + \frac{Z_4}{Z_5} \qquad (11.66)$$

$$B = Z_4; \qquad (11.67)$$

$$C = \frac{2}{Z_5} + \frac{Z_4}{Z_5^2}. \qquad (11.68)$$

Examinons d'abord l'ordre des opérations à effectuer pour remplacer les schémas équivalents en T et en П d'un quadripôle par une ligne équivalente à paramètres distribués *.

Soit Z_1 et Z_3 les paramètres connus dans le schéma en T (ou Z_4 et Z_5 dans un schéma en П). On demande de trouver Z_C et γl pour la ligne équivalente.

Ordre des opérations à effectuer.

A l'aide des expressions (11.61)—(11.63) [ou respectivement (11.66)—11.68)] trouvons les coefficients A, B, C.

Pour calculer l'impédance caractéristique Z_c divisons (11.57) par (11.58) et trouvons

$$Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}}. \qquad (11.69)$$

Pour calculer γl procédons comme suit: écrivons les expressions pour th γl en utilisant (11.56), (11.57) et (11.69):

$$\text{th}\,\gamma l = \frac{\text{sh}\,\gamma l}{\text{ch}\,\gamma l} = \frac{\dfrac{B}{\sqrt{\dfrac{B}{C}}}}{A} = \frac{\sqrt{BC}}{A}. \qquad (11.70)$$

Mais

$$\text{th}\,\gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}.$$

* Il s'agit ici d'un remplacement effectué à fréquence fixe.

Multiplions le numérateur comme le dénominateur de cette dernière expression par $e^{\gamma l}$. Nous obtenons:

$$\text{th}\,\gamma l = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1}.$$

D'où

$$e^{2\gamma l} = e^{2\beta l} e^{j \cdot 2\alpha l} = \frac{1 + \text{th}\,\gamma l}{1 - \text{th}\,\gamma l}. \qquad (11.71)$$

Ecrivons le second membre de l'expression (11.71) sous forme exponentielle. Soit $Me^{j\nu}$ son expression. On a alors

$$e^{2\beta l} = M$$

et

$$2\alpha l = \nu.$$

Par conséquent,

$$\beta l = \frac{1}{2} \ln M \quad \alpha l = \frac{\nu}{2}.$$

Examinons maintenant l'ordre des opérations à effectuer pour remplacer une ligne à paramètres distribués par un quadripôle équivalent.

On connaît γl et Z_C.

On demande de trouver les impédances Z_1 et Z_3 pour un schéma en T (ou Z_4 et Z_5 pour un schéma en Π). A cette fin trouvons à l'aide des (11.56)—(11.58) les valeurs des coefficients A, B, C et, ensuite, à l'aide des (11.59) et (11.60) calculons Z_1 et Z_3 pour le schéma en T [ou à l'aide des (11.64) et (11.65) les impédances Z_4 et Z_5 pour le schéma en Π].

Examinons de plus près la question de la possibilité de remplacement d'un quadripôle symétrique quelconque par un tronçon de ligne à paramètres distribués ou d'une ligne quelconque à paramètres distribués par un quadripôle.

Evidemment un tel remplacement ne peut être effectué, que si les paramètres obtenus à la suite du calcul sont tels que le dispositif équivalent est réalisable au point de vue physique. En général le remplacement d'un tronçon de ligne à paramètres distribués par un quadripôle est toujours possible. Par contre, le remplacement inverse n'est pas toujours possible. Il est impossible lorsqu'on obtient comme résultat du calcul effectué une impédance caractéristique purement imaginaire ce qui ne peut exister dans les lignes réelles.

§ 340. Circuit en échelle. On rencontre quelquefois dans la pratique un montage constitué par plusieurs quadripôles symétriques identiques branchés en cascade (fig. 351).

On appelle un tel schéma un *schéma en échelle*. Il est commode d'étudier la distribution du courant et de la tension le long d'un schéma en échelle en faisant appel à la théorie des lignes à paramètres distribués.

En effet, nous avons parlé au paragraphe précédent du remplacement d'un quadripôle par un tronçon de ligne, de longueur l, à constante de propagation γ et à impédance caractéristique Z_C. Si le nombre des quadripôles faisant partie du montage est égal à n, la longueur du tronçon de la ligne à paramètres distribués est de n fois plus grande, c'est-à-dire égale à nl.

Désignons la tension et le courant à la sortie du quadripôle n par $\dot{U}_{n+1}$ et $\dot{I}_{n+1}$ respectivement ; alors la tension et le courant à l'entrée du premier quadripôle sont :

$$\dot{U}_1 = U_{n+1} \operatorname{ch} \gamma nl + \dot{I}_{n+1} Z_C \operatorname{sh} \gamma nl ; \tag{11.72}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{n+1}}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma nl + \dot{I}_{n+1} \operatorname{ch} \gamma nl. \tag{11.73}$$

La tension et le courant à l'entrée k à partir du commencement du quadripôle $(k \leqslant n)$:

$$\dot{U}_k = \dot{U}_{n+1} \operatorname{ch} (n-k+1) \gamma l + \dot{I}_{n+1} Z_C \operatorname{sh} (n-k+1) \gamma l ; \tag{11.74}$$

$$\dot{I}_k = \frac{\dot{U}_{n+1}}{Z_C} \operatorname{sh} (n-k+1) \gamma l + \dot{I}_{n+1} \operatorname{ch} (n-k+1) \gamma l. \tag{11.75}$$

Examinons plusieurs exemples numériques se rapportant aux §§ 316 à 339.

Exemple 153. On a effectué sur une certaine ligne de 5 *km* de longueur des essais à la fréquence de 1 000 *Hz* pour déterminer son impédance d'entrée à vide et en court-circuit à son extrémité. On a obtenu $Z_{ent\ mv} = 535\ e^{-j\,64°}\ \Omega$ et $Z_{ent\ cc} = 467{,}5\ e^{-j\,10°}\ \Omega$.

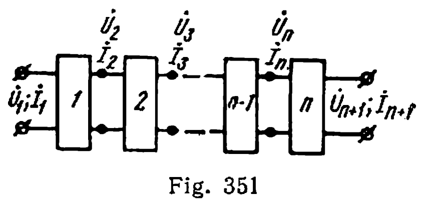


Fig. 351

Trouver l'impédance caractéristique Z_C et la constante de propagation γ de cette ligne pour la fréquence de 1000 *Hz*.

Solution. Il découle de l'expression (11.49) qu'en marche à vide, lorsque $Z_2 = \infty$

$$Z_{ent\ mv} = \frac{Z_C}{\operatorname{th} \gamma l}.$$

En court-circuit, lorsque $Z_2 = 0$,

$$Z_{ent\ cc} = Z_C \operatorname{th} \gamma l,$$

d'où

$$Z_C = \sqrt{Z_{ent\ mv} Z_{ent\ cc}} = \sqrt{535 e^{-j64°} 467{,}5 e^{-j10°}} = 500 e^{-j37°}\ \Omega ;$$

$$\operatorname{th} \gamma l = \sqrt{\frac{Z_{ent\ cc}}{Z_{ent\ mv}}} = \sqrt{\frac{467{,}5 e^{-j10°}}{535 e^{-j64°}}} = 0{,}935 e^{j27°}.$$

Conformément à (11.71) on a

$$e^{2\gamma l} = \frac{1 + \operatorname{th} \gamma l}{1 - \operatorname{th} \gamma l}.$$

Par conséquent,

$$e^{2\beta l}e^{j2\alpha l}=\frac{1+0{,}935e^{j27^\circ}}{1-0{,}935e^{j27^\circ}}=4{,}11e^{j81^\circ10'}=e^{1{,}414}e^{j1{,}414};$$

$$2\beta l=1{,}414;\ \beta=\frac{1{,}414}{2l}=0{,}1414;$$

$$2\alpha l=1{,}414;\ \alpha=0{,}1414;$$

$$\gamma=\beta+j\alpha=0{,}2e^{j45^\circ}\ 1/km.$$

E x e m p l e 154. Calculer R_0, L_0, G_0 et C_0 pour la ligne de l'exemple précédent, en supposant qu'on connaît $Z_C = 500\ e^{-j37^\circ}\ \Omega$ et $\gamma = 0{,}2\ e^{j\ 45^\circ}\ 1/km$.

S o l u t i o n. Conformément aux expressions (11.17) et (11.18) le produit

$$\gamma Z_C=R_0+j\omega L_0.$$

Par conséquent,

$$R_0+j\omega L_0=0{,}2e^{j45^\circ}\cdot 500e^{-j37^\circ}=100e^{j8^\circ}=99+j13{,}9.$$

Ou

$$R_0=99\ \Omega/km.$$

et

$$L_0=\frac{13{,}9}{2\pi\cdot 1000}=0{,}00\,222\ H/km;$$

$$\frac{\gamma}{Z_C}=G_0+j\omega C_0.$$

Ainsi

$$G_0+j\omega C_0=\frac{0{,}2e^{j45^\circ}}{500e^{-j37^\circ}}=0{,}0557\cdot 10^{-3}+j0{,}396\cdot 10^{-3}.$$

E x e m p l e 155. La ligne de l'exemple précédent est branchée sous une tension continue ($\omega = 0$). Calculer la tension et le courant au commencement de la ligne, si une charge de 400 Ω est branchée à l'extrémité de cette ligne, le courant dans cette charge étant égal à 0,5 A.

S o l u t i o n. A l'aide de l'expression (11.23) trouvons l'impédance caractéristique de la ligne Z_C, en courant continu :

$$Z_C=\sqrt{\frac{R_0}{G_0}}=\sqrt{\frac{99}{0{,}0557\cdot 10^{-3}}}=1330\ \Omega.$$

La constante de propagation [voir (11.19)] est

$$\gamma=\sqrt{R_0G_0}=\sqrt{99\cdot 0{,}0557\cdot 10^{-3}}=0{,}0743\ \ 1/km.$$

Trouvons à l'aide des (11.35) et (11.36) pour $y=l$

$$U_1=U_2\,\mathrm{ch}\,\gamma l+I_2Z_C\,\mathrm{sh}\,\gamma l;$$

$$I_1=I_2\,\mathrm{ch}\,\gamma l+\frac{U_2}{Z_C}\,\mathrm{sh}\,\gamma l.$$

Conformément aux conditions du problème :

$$I_2 = 0{,}5\ A\,;\ U_2 = I_2 R_2 = 0{,}5\cdot 400 = 200\ V\,;$$
$$\gamma l = \beta l = 0{,}0745\cdot 5 = 0{,}371\,;\ \mathrm{ch}\,\gamma l = \mathrm{ch}\,0{,}371 = 1{,}07^*\,;$$
$$\mathrm{sh}\,\gamma l = \mathrm{sh}\,0{,}371 = 0{,}379.$$

Par conséquent,

$$U_1 = 200\cdot 1{,}07 + 0{,}5\cdot 1330\cdot 0{,}379 = 466\ V\,;$$
$$I_1 = 0{,}5\cdot 1{,}07 + \frac{200}{1130}\cdot 0{,}379 = 0{,}694\ A.$$

Fxemple 156. La ligne de l'exemple 153, court-circuitée à son extrémité, est branchée à une source de tension sinusoïdale à fréquence de 1 000 *Hz*. Calculer la tension et le courant au commencement de la ligne, si le courant à son extrémité $\dot{I}_2 = 1\ A$.

Solution. En court-circuit

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2 Z_C\,\mathrm{sh}\,\gamma l \ \text{ et } \ \dot{I}_1 = \dot{I}_2\,\mathrm{ch}\,\gamma l.$$

Conformément aux données de l'exemple 153

$$\gamma = \beta + j\alpha = 0{,}1414 + j0{,}1414\ 1/km\,;\ l = 5\ km\,;$$
$$\gamma l = 0{,}707 + j0{,}707\,;\ Z_C = 500e^{-j37^\circ}\ \Omega\,;$$
$$e^{\gamma l} = e^{0{,}707}e^{j0{,}707} = 2{,}02\,(\cos 40^\circ 20' + j\sin 40^\circ 20') = 1{,}54 + j1{,}305\,;$$
$$e^{-\gamma l} = e^{-0{,}707}e^{-j0{,}707} = 0{,}495\,(\cos 40^\circ 20' - j\sin 40^\circ 20') = 0{,}377 - j0{,}32\,;$$
$$\mathrm{ch}\,\gamma l = 0{,}5\,(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) = 0{,}96 + j0{,}4925 = 1{,}07e^{j27^\circ 20'}\,;$$
$$\mathrm{sh}\,\gamma l = 0{,}5\,(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) = 0{,}582 + j0{,}812 \approx e^{j54^\circ 20'}.$$

Par conséquent,

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2 Z_C\,\mathrm{sh}\,\gamma l = 1\cdot 500e^{-j37^\circ}e^{j54^\circ 20'} = 500e^{j17^\circ 20'}\ V,$$
$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2\,\mathrm{ch}\,\gamma l = 1{,}07e^{j37^\circ 20'}\ A.$$

Exemple 157. La ligne de l'exemple 153 est shuntée à son extrémité par une résistance active $Z_2 = 400\ \Omega$. Calculer $\dot{U}_1$ et $\dot{I}_1$, si le courant dans la charge $\dot{I}_2 = 0{,}5\ A$; $f = 1000\ Hz$.

Solution.

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2\,\mathrm{ch}\,\gamma l + \dot{I}_2 Z_C\,\mathrm{sh}\,\gamma l = 200\cdot 1{,}07e^{j27^\circ 20'} + $$
$$+ 0{,}5\cdot 500e^{-j37^\circ}e^{j54^\circ 20'} = 463e^{j22^\circ}\ V\,;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2\,\mathrm{ch}\,\gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_C}\,\mathrm{sh}\,\gamma l = 0{,}5\cdot 1{,}07e^{j27^\circ 20'} + \frac{200}{500e^{-j37^\circ}}\,e^{j54^\circ 20'} = 0{,}8e^{j53^\circ 38'}\ A.$$

---

* Voir à la p. 414 les tables des fonctions hyperboliques : sh x, ch x et e^x.

Exemple 158. En partant des données de l'exemple 157, calculer la grandeur complexe de la valeur efficace de l'onde incidente au commencement de la ligne $\dot{A}_2$.

Solution. Conformément à (11.28)

$$\dot{A}_2 = \dot{A}_2 e^{j\psi_i} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C}{2};$$

$$\dot{A}_2 = \frac{463e^{j22^\circ} + 0,8e^{j53^\circ 38'} \cdot 500e^{-j37^\circ}}{2} = 431e^{j19^\circ 30'}\ V.$$

Exemple 159. Ecrire l'expression pour la valeur instantanée de l'onde incidente de tension au commencement et à l'extrémité de la ligne, en utilisant les données de l'exemple précédent.

Solution. La valeur instantanée de l'onde incidente de tension au commencement de la ligne pour $x = 0$ est :

$$\sqrt{2} \cdot 431 \sin(\omega t + 19^\circ 30').$$

La valeur instantanée de l'onde incidente de tension à l'extrémité de la ligne pour $x = l$ peut être écrite sous sa forme générale comme suit :

$$\sqrt{2} A_2 e^{-\beta l} \sin(\omega t + \psi_i - \alpha l);$$

$$e^{-\beta l} = e^{-0,707} = 0,495;$$

$$\alpha l = 0,707\ rad = 40^\circ 30';$$

$$\sqrt{2} A_2 e^{-\beta l} = \sqrt{2} \cdot 431 \cdot 0,495 = 301\ V;$$

$$\psi_i - \alpha l = 19^\circ 30' - 40^\circ 30' = -21^\circ.$$

Par conséquent, la valeur instantanée de l'onde incidente de tension à l'extrémité de la ligne est : $301 \sin(\omega t - 21^\circ)\ V$.

Exemple 160. Calculer la valeur de l'affaiblissement en nepers dans la ligne de l'exemple 153, si son extrémité est branchée à une charge adaptée.

Solution. L'affaiblissement en nepers est égal à βl. Puisque le produit βl est égal à $0,1414 \cdot 5 = 0,707$, l'affaiblissement de cette ligne est de $0,707\ Np$.

Exemple 161. Quelle doit être la valeur de l'inductance d'appoint $L_{0\,ap}$ qu'il faut brancher à chaque kilomètre d'une ligne téléphonique à paramètres suivants : $R_0 = 3\,\Omega/km$; $L_{0\,ap} = 2 \cdot 10^{-3}\ H/km$; $G_0 = 10^{-6}\ 1/\Omega \cdot km$; $C_0 = 6 \cdot 10^{-9}\ f/km$ pour supprimer les distorsions dans cette ligne ?

Solutin. Pour que la ligne soit exempte de distorsions, ses paramètres doivent satisfaire à l'équation (11.41). Par conséquent,

$$L_{0\,ap} + L_0 \frac{R_0 C_0}{G_0} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{10^{-6}} = 18 \cdot 10^{-3}\ H/km$$

et

$$L_{0\,ap} = 18 - 2 = 16\ mH/km.$$

Exemple 162. Calculer la longueur minimale d'une ligne aérienne à deux conducteurs, court-circuitée à son extrémité, pour que son impédance d'entrée soit égale à 800 j Ω à la fréquence de 10^8 *Hz*.

L'écartement des conducteurs $d = 20$ *cm*, le rayon de chaque conducteur $r = 2$ *mm*.

Solution. Conformément à (11.51)

$$Z_{ent\ cc} = j\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\operatorname{tg}\alpha y.$$

Pour une ligne à deux conducteurs

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{r};\quad C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{r}};\quad \frac{L_0}{C_0} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\ln\frac{d}{r}}{\pi}\right)^2;$$

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\ln\frac{d}{r}}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}};\quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ \Omega;$$

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 377\,\frac{\ln\frac{200}{2}}{\pi} = 553\ \Omega.$$

Conformément aux conditions imposées

$$800j = j553\operatorname{tg}\alpha y.$$

D'où

$$\operatorname{tg}\alpha y = \frac{800}{553} = 1{,}445;\quad \alpha y = 55°20' = 0{,}963\ rad;$$

$$\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{1}{3\cdot 10^{10}}\ s/cm;$$

$$\alpha = \omega\sqrt{L_0C_0} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{2\pi\cdot 10^8}{3\cdot 10^{10}} = 2{,}092\cdot 10^{-2}\ 1/cm.$$

Longueur cherchée de la ligne

$$y = \frac{0{,}963}{2{,}092\cdot 10^{-2}} = 46{,}1\ cm.$$

Exemple 163. Dans le schéma en T de la fig. 349 $Z_1 = 100\ \Omega$ $Z_3 = -500j\ \Omega$.

Calculer l'impédance caractéristique du quadripôle et la valeur de γl d'une ligne à paramètres distribués équivalente à ce quadripôle.

Solution. Conformément aux (11.61) — (11.63)

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} = 1 + \frac{100}{-500j} = 1 + 0{,}2j = 1{,}02e^{j11°18'};$$

$$B = 2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_3} = 200 + \frac{10^4}{-500j} = 200 + 20j \approx 200e^{j5°40'};$$

$$C = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{-500j} = 0{,}002e^{j90°}.$$

D'après (11.69)

$$Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{200e^{j5°40'}}{0,002e^{j90°}}} = 316e^{-j42°10'}\ \Omega.$$

D'après (11.70)

$$\text{th}\,\gamma l = \sqrt{\frac{BC}{A}} = \frac{\sqrt{200e^{j5°40'}\cdot 0,002e^{j90°}}}{1,02e^{j11°18'}} = 0,498 + j0,369.$$

Et enfin, d'après (11.71)

$$e^{2\gamma l} = e^{2\beta l}e^{j2\alpha l} = \frac{1+\text{th}\,\gamma l}{1-\text{th}\,\gamma l} = \frac{1,498+j0,369}{0,502-j0,369} = 2,475e^{j50°10'};$$

$$\beta l = \frac{1}{2}\ln 2,475 = 0,454;$$

$$\alpha l = 25°5' \approx 0,437\ rad;$$

$$\gamma l = 0,454 + j0,437.$$

* * *

Abordons maintenant l'étude de la théorie des filtres électriques.

§ 341. Définition des filtres électriques. On appelle filtres électriques les quadripôles intercalés entre la source d'alimentation et le récepteur (la charge), destinés à laisser passer sans obstacles — sans affaiblissement — vers le récepteur des courants de certaines fréquences et d'éliminer ou, plus précisément, de laisser passer avec un affaiblissement important les courants à d'autres fréquences.

§ 342. Introduction à la théorie des filtres. La bande des fréquences que le filtre laisse passer sans affaiblissement est appelée zone de filtrage (transparence). La bande des fréquences qu'il élimine ou atténue est appelée bande d'arrêt.

Les filtres électriques sont montés à partir des bobines d'inductance et des capacités. Ils sont utilisés essentiellement en radiotechnique et en téléphonie. Dans ces deux cas on a affaire à des courants à fréquences relativement élevées.

A fréquence élevée les réactances inductives ωL des bobines d'inductance sont très nettement supérieures à leurs résistances actives. Par conséquent, dans la théorie simplifiée des filtres, exposée ci-dessous, on admet que les résistances actives des bobines d'inductance soient nulles. En d'autres termes, nous allons supposer que les filtres ne soient constitués que par des éléments réactifs.

Les filtres sont habituellement montés suivant un schéma symétrique en T ou en Π (fig. 349 et 350). Il a déjà été dit précédemment qu'une ligne à paramètres distribués peut être également remplacée par un montage symétrique en T ou en Π. Ainsi, le schéma d'un filtre est le même que le schéma équivalent d'une ligne à paramètres distribués. Par conséquent, en étudiant les filtres on peut faire appel à la notion de la constante (de l'exposant) d'affaiblissement et de la constante (de

l'exposant) de phase introduites précédemment pour les lignes à paramètres distribués.

Convenons d'appeler l'impédance Z_1 du schéma de la fig. 349 et l'impédance Z_4 du schéma de la fig. 350 impédances longitudinales (série), et de désigner l'impédance Z_3 du schéma de la fig. 349 ainsi que l'impédance Z_5 du schéma de la fig. 350 par impédances transversales (shunt).

Les filtres dans lesquels le produit de l'impédance longitudinale par l'impédance transversale correspondante est un certain nombre constant, indépendant de la fréquence, pour le filtre considéré (nombre k), sont appelés habituellement filtres du type k.

Les filtres pour lesquels ce produit dépend de la fréquence sont appelés filtres du type m*.

Dans les filtres du type k l'impédance de la charge, branchée à la sortie du filtre est égale à l'impédance caractéristique de ce filtre (on l'appelle charge adaptée). Dans le filtre du type m la charge peut ne pas être adaptée (dans ces filtres l'impédance caractéristique dépend moins de la fréquence que dans les filtres type k).

Dans le présent cours nous n'examinons que les bases de la théorie des filtres les plus simples, à savoir des filtres type k. Les bases de la théorie des filtres type m sont exposées dans les manuels spéciaux, traitant de la technique de communications et de radiotechnique.

Le filtre est d'autant meilleur que ses propriétés de filtrage sont plus nettement prononcées.

Les propriétés de filtrage des quadripôles reposent au point de vue physique sur l'amorçage dans ces filtres des régimes de résonance, à savoir des résonances des courants ou des résonances des tensions.

§ 343. Bases de la théorie des filtres. Nous avons déjà indiqué que, si la charge Z_2 est adaptée à l'impédance caractéristique Z_C d'un quadripôle (ou d'une ligne à paramètres distribués, équivalente à ce quadripôle), la tension $\dot{U}_2$ et le courant $\dot{I}_2$ dans la charge sont liés à la tension $\dot{U}_1$ et au courant $\dot{I}_1$ à l'entrée du quadripôle (ou de la ligne à paramètres distribués, équivalente à ce quadripôle) par les relations suivantes :

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-\gamma l}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-\gamma l}.$$

Posons

$$\gamma l = \beta l + j\alpha l = b + ja.$$

On a alors

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 e^{-b} e^{-ja};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-b} e^{-ja}.$$

* Les filtres du type m ont des propriétés de filtrage meilleures, mais leur théorie est quelque peu plus compliquée que la théorie des filtres du type k.

Le facteur e^{-b} indique combien de fois le module de la tension (du courant) à la sortie du filtre est plus petit que le module de la tension (du courant) à son entrée.

Si $b = 0$ on a $e^{-b} = e^0 = 1$ et le filtre laisse passer les oscillations sans affaiblissement. Dans ce cas dans la zone de filtrage $b = 0$.

Dans la zone d'arrêt $b > 0$. Le facteur e^{-ja}, dont le module est égal à 1, indique que la tension $\dot{U}_2$ et le courant $\dot{I}_2$ sont en retard de l'angle a sur $\dot{U}_1$ et $\dot{I}_1$ respectivement. L'étude des propriétés filtrantes d'un quadripôle repose sur la comparaison de l'expression du coefficient A d'un quadripôle à l'expression, qui lui est égale [voir (11.56)], du cosinus hyperbolique de l'argument $b + ja$:

$$A = \operatorname{ch}(b + ja).$$

Le cosinus hyperbolique d'une somme (étant donné que ch ja = cos a et sh $ja = j \sin a$) peut être écrit de la manière suivante :

$$\operatorname{ch}(b + ja) = \operatorname{ch} b \cos a + j \operatorname{sh} b \sin a.$$

Pour un filtre quelconque, monté suivant un schéma symétrique en T [voir (11.61)],

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}.$$

Et pour un filtre, monté suivant un schéma en Π [voir (11.66)],

$$A = 1 + \frac{Z_4}{Z_5}.$$

Quelles que soient les réactances utilisées dans un filtre, le rapport $\frac{Z_1}{Z_3}$ pour un schéma en T et le rapport $\frac{Z_4}{Z_5}$ pour un schéma en Π est toujours un nombre réel (et non pas un nombre imaginaire pur ou complexe). En effet le rapport de deux nombres imaginaires purs est toujours un nombre réel.

Par conséquent, le coefficient A est toujours un nombre réel. Mais si A est réel, l'expression ch $(b + ja)$, qui lui est égale, doit être réelle aussi :

$$\operatorname{ch}(b + ja) = \operatorname{ch} b \cos a + j \operatorname{sh} b \sin a = A.$$

L'expression $\operatorname{ch}(b + ja)$ est un nombre réel si

$$\operatorname{sh} b \sin a = 0. \qquad (11.76)$$

Dans ces conditions

$$\operatorname{ch} b \cos a = A. \qquad (11.77)$$

Les expressions (11.76) et (11.77) sont utilisées pour déterminer les frontières de la zone de filtrage et le caractère de variations de l'angle a à l'intérieur de cette zone, ainsi que pour déterminer le caractère de variations de la constante d'affaiblissement b dans la bande (les bandes) d'affaiblissement.

L'expression (11.76) est satisfaite dans la zone de filtrage ($b = 0$) puisque sh b = sh 0 = 0. Du fait que ch 0 = 1, l'expression (11.77)

pour la zone de filtrage prend la forme suivante :

$$\cos a = A. \qquad (11.78)$$

Le cosinus circulaire ($\cos a$) peut varier entre $+1$ et -1. Par conséquent, les valeurs limites du coefficient A [qui est une fonction de la fréquence — $A(\omega)$] dans la zone de filtrage sont égales à ± 1.

La zone de filtrage est située dans le cas le plus général dans la bande des fréquences comprises entre ω_1 et ω_2. Les valeurs ω_1 et ω_2 pour les filtres passe-bas et passe-haut sont déterminées en résolvant l'équation suivante (voir pour les détails le § 344).

$$A(\omega) = \pm 1. \qquad (11.79)$$

Pour les filtres passe-bande et les filtres coupe-bande (voir § 344) ω_1 et ω_2 sont calculés comme les racines de l'équation $A(\omega) = -1$. Pour ces filtres l'équation $A(\omega) = 1$ permet de calculer la fréquence ω_0, dite de résonance, se trouvant dans l'intervalle entre ω_1 et ω_2.

Le caractère de variation de l'angle a en fonction de ω dans la zone de filtrage est déterminé conformément à l'équation (11.78)de la manière suivante :

$$a = \arccos A(\omega). \qquad (11.78')$$

Examinons maintenant comment calculer b et a pour la zone d'arrêt. Dans cette zone $b > 0$. L'équation (11.76) est satisfaite pour

$$\sin a = 0, \qquad (11.80)$$

autrement dit pour

$$a = 0 \qquad (11.80')$$

et/ou pour

$$a = \pm \pi. \qquad (11.80'')$$

Il découle de l'équation (11.77) que pour $a = 0$

$$\operatorname{ch} b = A(\omega) \qquad (11.81')$$

et pour

$$a = \pm \pi \operatorname{ch} b = -A(\omega). \qquad (11.81'')$$

Les équations (11.81′) et (11.81″) permettent en partant des valeurs de A considérées comme une fonction de ω de calculer $\operatorname{ch} b$ dans la zone d'arrêt, et d'après la valeur de $\operatorname{ch} b$, ainsi trouvée, de calculer b et de construire ainsi la courbe $b = f(\omega)$. Il découle des équations (11.80′) et (11.81″) que dans la zone d'arrêt la tension $\dot{U}_2$ à la sortie du filtre est soit en phase (pour $a = 0$), soit en opposition de phase (pour $a = \pm \pi$) avec la tension $\dot{U}_1$ à l'entrée du filtre.

En conclusion, il y a lieu de faire deux remarques importantes.

Premièrement, les coefficients B et C d'un quadripôle varient en fonction de la fréquence ω et, par conséquent, l'impédance caractéristique $Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}}$ varie également en fonction de cette fréquence.

Afin que les filtres débitent sur une charge adaptée (la théorie des filtres exposée ci-dessus n'est vraie qu'à cette condition), il faut faire varier l'impédance de la charge lorsque la fréquence varie *.

Deuxièmement, dans la zone de filtrage l'impédance caractéristique du filtre est toujours active et dans la zone d'arrêt elle est toujours réactive (inductive ou capacitive).

§ 344. Classification des filtres en filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande. On appelle filtre passe-bas ceux qui laissent passer uniquement les fréquences basses, en commençant par $\omega_1 = 0$ et allant jusqu'à ω_2. Leur zone d'arrêt se trouve dans l'intervalle de ω_2 à ∞.

Les schémas de deux filtres passe-bas sont représentés sur la fig. 352, *a* et *b*. Le caractère des variations de la constante, affaiblissement *b* et de la constante de phase *a* est illustré qualitativement par les courbes de la fig. 352, *c*.

On appelle filtres passe-haut ceux qui laissent passer uniquement des fréquences élevées, en commençant par la fréquence ω_1 et allant à ∞. La zone d'arrêt de ces filtres se trouve dans l'intervalle des fréquences entre 0 et ω_1.

Les schémas des deux filtres passe-haut sont représentés sur la fig. 353, *a* et *b*. Le caractère de variation de *b* et de *a* est illustré par les courbes de la fig. 353, *c*.

Examinons le problème de variation de la valeur de l'impédance caractéristique Z_C d'un filtre dans la zone de filtrage pour un filtre passe-bas en T (fig. 352, *a*) et pour un filtre passe-haut également en T (voir fig. 353, *a*).

A cette fin, substituons dans l'expression $Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}}$ à toutes les valeurs de B et C, celles obtenues à l'aide des (11.59) — (11.63) et analysons les expressions ainsi obtenues.

Pour un filtre passe-bas en T (fig. 352, *a*) $Z_C = \sqrt{\frac{2L}{C} - \omega^2 L^2}$. Pour $\omega = \omega_1 = 0$, $Z_C = \sqrt{\frac{2L}{C}}$. Lorsque la fréquence croît Z_C décroît, mais au début il ne diffère que peu de la valeur $\sqrt{\frac{2L}{C}}$. Lorsque la fréquence atteint la valeur $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ Z_C s'annule.

---

* Si la charge du filtre n'est pas purement ohmique ou n'est pas adaptée à l'impédance caractéristique de ce filtre ou si on veut tenir compte de l'influence de la résistance ohmique des bobines d'inductance sur le fonctionnement du filtre (ce qui est particulièrement important pour les basses fréquences), on peut pour construire la courbe de la fonction $\frac{U_1}{U_2} = f(\omega)$, ainsi que la courbe de l'angle de déphasage entre $\dot{U}_1$ et $\dot{U}_2$ en fonction de la fréquence, utiliser, par exemple, la méthode des valeurs proportionnelles, exposée dans la première partie de ce cours.

A cette fin, on prend plusieurs valeurs de la fréquence angulaire et pour chacune d'elles on trouve par la méthode analytique ou graphique la tension complexe $\dot{U}_1$ à l'entrée du filtre, en supposant que le courant à l'entrée de ce filtre est égal à 1 *A*, par exemple.

Pour un filtre en T passe-haut (voir fig. *a*) $Z_C = \sqrt{\frac{2L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}}$. Le caractère de variation de Z_C est dans ce cas quelque peu différent : pour $\omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ $Z_C = 0$, ensuite lorsque ω croît également et pour $\omega \to \infty$, Z_C devient égal à $\sqrt{\frac{2L}{C}}$.

On peut analyser les variations de Z_C en fonction de ω d'une manière analogue pour un filtre en П.

Si un filtre est destiné à fonctionner à des fréquences comprises dans sa zone de filtrage et suffisamment éloignées des valeurs de ω, pour lesquelles $Z_C = 0$,

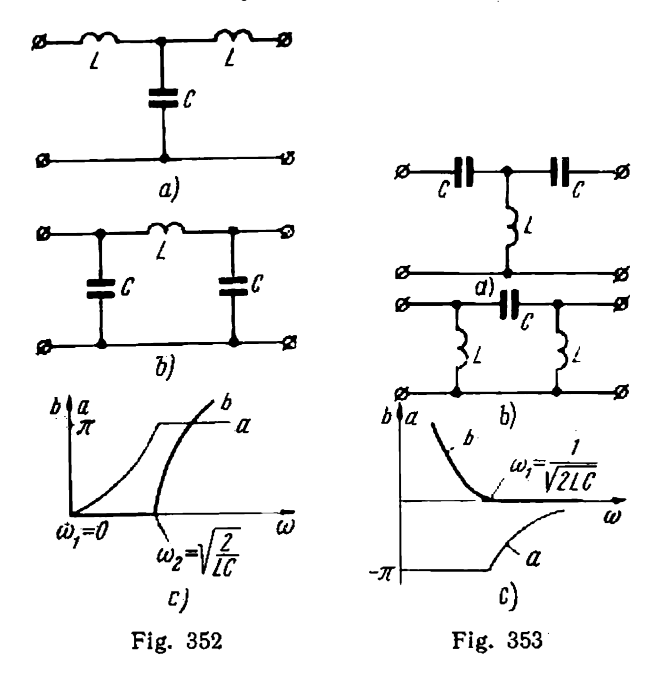


Fig. 352 Fig. 353

l'impédance de la charge Z_{ch}, à la sortie des filtres passe-bas est habituellement prise égale à l'impédance caractéristique du filtre pour $\omega = \omega_1 = 0$; pour un filtre en T (fig. 352, *a*) elle est égale à $\sqrt{\frac{2L}{C}}$.

Pour les filtres passe-haut la charge est habituellement adaptée à l'impédance caractéristique du filtre en question pour $\omega = \infty$: pour les filtres en T (fig. 353, *a*) cette impédance est aussi égale à $\sqrt{\frac{2L}{C}}$.

Remaquons en conclusion que dans la zone (les zones) d'arrêt Z_C est un nombre imaginaire pur.

Les filtres passe-bande sont des filtres laissant passer seulement une bande étroite de fréquences, comprises entre ω_1 et ω_2, les zones d'arrêt se trouvant à gauche de ω_1 et à droite de ω_2. Le schéma d'un filtre passe-bande le plus simple, du type *k*, est représenté sur la fig. 354, *a*.

Ses paramètres doivent satisfaire à l'équation suivante :

$$L_1C_1 = L_2C_2.$$

L'allure des variations de b et a pour un filtre passe-bande est illustrée par les courbes de la fig. 354, *b*.

On appelle filtres coupe-bande les filtres pour lesquels la zone de filtrage est pour ainsi dire coupée en deux parties par une zone d'arrêt

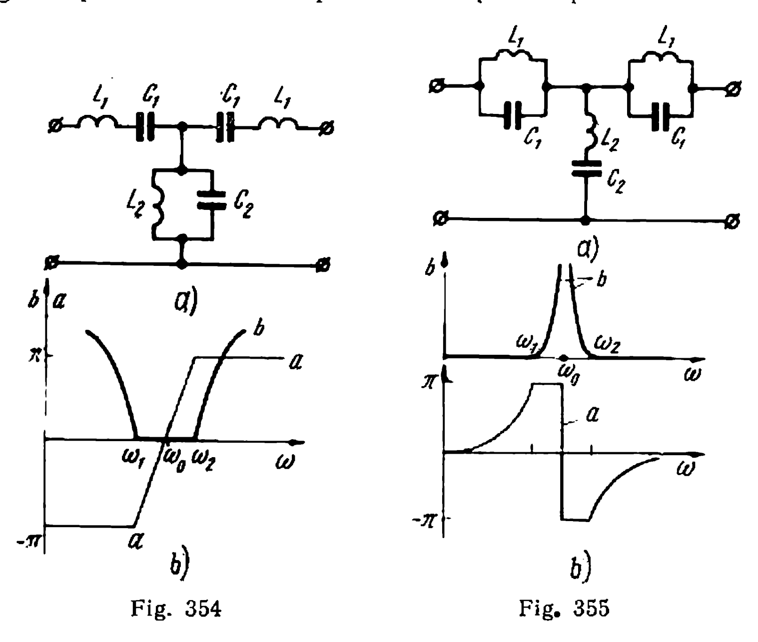


Fig. 354 Fig. 355

(fig. 355, *b*). Les deux parties de la zone de filtrage se trouvent l'une à gauche de la fréquence ω_1 et l'autre à droite de la fréquence ω_2.

Le schéma d'un filtre coupe-bande le plus simple est représenté sur la fig. 355, *a*. Pour ce filtre

$$L_1C_1 = L_2C_2.$$

Exemple 164. Soit pour le schéma de la fig. 352, *a* $L = 10\ mH$; $C = 10\ \mu F$. Déterminer les frontières de la zone de filtrage, la loi de variation de la constante a dans cette zone, construire le diagramme vectoriel pour $\omega = 2000\ rad/s$ et $I_2 = 0{,}2\ A$ et déterminer la loi de variation de la constante b dans la zone d'arrêt.

Solution. Pour un schéma en T

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} = 1 + j\omega L\, j\omega C = 1 - \omega^2\ LC.$$

En posant $A = 1$, trouvons $\omega_1 = 0$.

En posant $A = -1$, trouvons

$$-1 = 1 - \omega^2 LC,$$

d'où

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}} = 4470 \; rad/s.$$

Dans la zone de filtrage a = arc cos A = arc cos $(1 - \omega^2 LC)$.

Pour la fréquence $\omega = 2000 \; rad/s$, située à l'intérieur de la zone de filtrage $Z_C \sqrt{\frac{2L}{C} - \omega^2 L^2} = 40 \, \Omega$. Lorsque le filtre débite sur l'impédance caractéristique, la tension à sa sortie $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_C = 0{,}2 \cdot 40 = 8 \; V$.

La tension à l'entrée $\dot{U}_1$, égale aussi à $8 \; V$, est en avance de l'angle a = arc cos $0{,}6 \approx 53°$ sur la tension $\dot{U}_2$ (fig. 356).

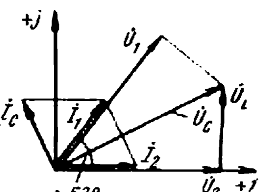


Fig. 356

Pour déterminer la loi de variation de b dans la zone d'arrêt, à l'intérieur de laquelle A est négatif pour le filtre considéré, utilisons l'équation

$$\operatorname{ch} b = -A = \omega^2 LC - 1.$$

Calculons b, par exemple, pour $\omega = 2\omega_2 = 8940 \; rad/s$:

$$\operatorname{ch} b = (8940)^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5} = 8; \; b = 2{,}77 \; Np.$$

Donnons, sans l'établir, l'expression pour calculer les paramètres du filtre passe-bande de la fig. 354, a pour des fréquences données f_1 et f_2 et une valeur donnée de l'impédance de charge Z_C du filtre à la fréquence $f_0 \frac{\omega_0}{2\pi}$:

1) fréquence de résonance $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$;

2) $C_1 = \frac{f_2 - f_1}{2\pi f_1 f_2 Z_C}$;

3) $L_1 = \frac{Z_C}{2\pi (f_2 - f_1)}$;

4) $C_2 = \frac{1}{Z_C (f_2 - f_1)}$;

5) $L_2 = \frac{Z_C (f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}$.

Exemple 165. Calculer les paramètres du filtre passe-bande de la fig. 354, a pour qu'il laisse passer une bande de fréquence comprise entre $f_1 = 750$ et $f_2 = 850 \; Hz$, l'impédance de charge étant égale à l'impédance caractéristique Z_C du filtre, à la fréquence de résonance, égale à $800 \, \Omega$.

Solution: 1) fréquence de résonance $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{750 \cdot 850} = 798\ Hz$.

2) $C_1 = \frac{850 - 750}{2\pi \cdot 750 \cdot 850 \cdot 800} = 0{,}0312\ \mu F$;

3) $L_1 = \frac{800}{2\pi (850 - 750)} = 1{,}273\ H$;

4) $C_2 = \frac{1}{\pi \cdot 800 \cdot 100} = 3{,}94\ \mu F$;

5) $L_2 = \frac{800 \cdot 100}{4\pi \cdot 750 \cdot 850} = 0{,}01\ H$.

§ 345. Détermination du type du filtre. Indiquons en conclusion qu'on peut, en partant du schéma d'un filtre et sans effectuer une analyse mathématique détaillée, déterminer auquel des types énumérés ci-dessus appartient le filtre en question. Cette recherche repose sur le caractère de l'impédance longitudinale du filtre *.

Si l'impédance longitudinale ne comprend que des inductances, le filtre appartient à la catégorie des filtres passe-bas.

Si l'impédance longitudinale est purement capacitive le filtre est du type passe-haut.

Si l'impédance longitudinale comprend des L et C *couplés en série*, le filtre est du type passe-bande. Enfin, si l'impédance longitudinale est constituée par L et C *couplés en parallèle* ce filtre est du type coupe-bande.

---

* La nature de l'impédance longitudinale (série) du filtre est en général directement contraire à la nature de l'impédance transversale (shunt). On peut s'en assurer en examinant les schémas des fig. 352, *a*, 353, *a* et 354, *a*. En effet, si l'impédance longitudinale est inductive, l'impédance transversale est capacitive. Si l'impédance longitudinale est constituée par L et par C, couplés en série, l'impédance transversale est formée par L et C couplés en parallèle, etc.

CHAPITRE XII

PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES DANS LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES COMPRENANT DES LIGNES À PARAMÈTRES DISTRIBUÉS

§ 346. Introduction. Nous avons examiné au chapitre X les phénomènes transitoires dans les circuits électriques linéaires, à paramètres localisés.

Cependant les phénomènes transitoires dans les circuits électriques comprenant des lignes à paramètres distribués jouent également un très grand rôle dans la production et l'utilisation de l'énergie électrique, en téléphonie, télégraphie, machines calculatrices et radiotechnique.

Pour les tronçons des circuits, pouvant être considérés comme des tronçons à paramètres localisés, le calcul des phénomènes transitoires doit être effectué par les méthodes examinés au chapitre X. Dans le présent chapitre nous allons discuter les particularités des phénomènes transitoires dans les lignes à paramètres distribués elles-mêmes, ainsi que les questions d'adaptation et d'interaction de ces phénomènes avec les phénomènes transitoires se déroulant dans les tronçons des circuits à paramètres localisés.

Comme nous l'avons indiqué au § 317, les équations fondamentales pour les lignes à paramètres distribués sont les (11.1) et (11.4). Ces équations sont valables pour les régimes permanents, comme pour les régimes transitoires.

Du fait que l'intégration du système constitué par les deux équations aux dérivées partielles [(11.1) et (11.4)] sous leur forme générale est un problème assez compliqué au point de vue mathématique, les phénomènes transitoires sont étudiés dans ce cours d'un point de vue quelque peu simplifié; l'étude des phénomènes transitoires se limite ici aux lignes homogènes sans pertes, c'est-à-dire pour $R_0 = 0$ et $G_0 = 0$.

Il est parfaitement justifié de poser ainsi le problème au point de vue pratique également, puisque les lignes réelles à paramètres distribués ont en général des pertes relativement faibles.

L'étude des phénomènes transitoires pour $R_0 = 0$ et $G_0 = 0$ permet de se rendre compte au point de vue qualitatif des traits essentiels de ces phénomènes. Au point de vue quantitatif le fait de négliger R_0 et G_0 n'exerce pas, en général, d'influence sensible sur les stades initiaux du phénomène transitoire ; par contre, il est désirable de tenir compte de R_0 et G_0 pour les stades suivants de l'évolution du phénomène.

Dans les installations énergétiques, téléphoniques et télégraphiques comprenant des lignes à paramètres distribués, les phénomènes transitoires prennent naissance par suite du branchement de ces lignes à une source de F.E.M., en cas de leur coupure de la source de F. E. M., lors de branchement et de coupure de la charge, ainsi que par suite des décharges atmosphériques (des orages).

Dans les dispositifs radiotechniques et dans ceux utilisés dans les calculatrices on rencontre également les phénomènes transitoires du type examiné dans le présent chapitre. Ils ont lieu, par exemple, dans les lignes de retard et dans les lignes de formation d'impulsions.

§ 347. Equations fondamentales et leur solution. Il découle des équations (11.1) et (11.4) pour $R_0 = 0$ et $G_0 = 0$ que

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \tag{12.1}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{12.2}$$

Le courant et la tension sont des fonctions de deux variables : de la distance x du commencement de la ligne et du temps t. Dérivons (12.1) par rapport à x et (12.2) par rapport à t :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t}; \tag{12.3}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t} = C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{12.4}$$

Conformément à (12.4), substituons dans le second membre de (12.3) $-C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ à $\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t}$ et désignons $L_0C_0 = \frac{1}{v^2}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{12.5}$$

Il découle de ce qui a été dit précédemment [voir § 324, expression (11.39)] que $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 c_0}}$ est la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique le long d'une ligne. Si on dérive l'expression (12.2) par rapport à x et l'expression (12.1) par rapport à t et si on substitue dans l'équation dérivée (12.2), le second membre de l'équation dérivée (12.1), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \tag{12.6}$$

Les (12.5) et (12.6) sont des équations aux dérivées partielles du second ordre. Ce sont les équations d'onde étudiées dans les cours de mathématiques.

La solution de l'équation (12.5) est donnée par la somme de fonctions arbitraires f_1 et f_2, l'argument de la fonction f_1 étant $(t - \frac{x}{v})$ et celui de la fonction f_2 $(t + \frac{x}{v})$:

$$u = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{12.7}$$

Pour simplifier les écritures nous désignerons par la suite :

$$u_i = f_1\left(t-\frac{x}{v}\right); \tag{12.8}$$

$$u_r = f_2\left(t+\frac{x}{v}\right). \tag{12.9}$$

Par conséquent,

$$u = u_i + u_r. \tag{12.10}$$

La nature des fonctions f_1 et f_2 dépend des conditions aux limites au commencement et à la fin de la ligne.

Dans le cas général les fonctions f_1 et f_2 doivent être deux fois différentiables : par rapport à x et par rapport à t.

La substitution des fonctions $f_1\,(t-\frac{x}{v})$ et $f_2\,(t+\frac{x}{v})$ dans (12.5) donne une identité.

Solution de l'équation (12.6) :

$$i = \varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right) + \varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right). \tag{12.11}$$

Désignons pour simplifier l'écriture :

$$i_i = \varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right); \tag{12.12}$$

$$i_r = \varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right). \tag{12.13}$$

On a alors

$$i = i_i + i_r. \tag{12.14}$$

§ 348. Ondes incidentes et réfléchies dans des lignes. Conformément aux équations (12.7) et (12.11), la tension et le courant dans une ligne peuvent être représentés sous forme de deux fonctions. Les fonctions $f_1\,(t-\frac{x}{v})$ et $\varphi_1\,(t-\frac{x}{v})$ représentent les ondes incidentes, $f_2\,(t+\frac{x}{v})$ et $\varphi_2\,(t+\frac{x}{v})$ les ondes réfléchies. Les ondes incidentes se déplacent à la vitesse v de la source d'énergie vers le récepteur, c'est-à-dire dans le sens de l'accroissement de la coordonnée x.

Les ondes réfléchies se déplacent dans la ligne du récepteur d'énergie vers la source, c.-à-d. dans le sens de la diminution de la coordonnée x.

Discutons la signification du fait que $t-\frac{x}{v}$ est l'argument de la fonction f (le même raisonnement peut être pour les autres fonctions).

Soit F_1 la valeur de la fonction $f_1\left(t_1-\frac{x_1}{v_1}\right)$ en un certain point de la ligne $x = x_1$ pour $t = t_1$. La fonction f_1 prendra également cette valeur dans tous les points de la ligne, où $x > x_1$, avec un certain retard égal à $\frac{x-x_1}{v}$, car la vitesse de la propagation de l'onde le long de la ligne est finie.

Ainsi, au point $x = x_2$ la valeur de la fonction f_1 sera égale à F_1 pour

$$t = t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v}.$$

En effet

$$f_1\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right) = F_1.$$

Ainsi, quelle que soit la loi f_1 de variation de la tension de l'onde incidente au commencement de la ligne, la tension de l'onde incidente en un point quelconque de cette ligne variera suivant la même loi, mais avec un certain retard.

§ 349. Relation entre les fonctions f_1 et f_2 d'une part et les fonctions φ_1, φ_2 d'autre part. Trouvons la relation entre la fonction f_1 et la fonction φ_1, ainsi qu'entre f_2 et φ_2.

A cette fin substituons (12.7) et (12.11) dans (12.1) et (12.2) et, pour simplifier les écritures, désignons :

$$\frac{df_1\left(t - \frac{x}{v}\right)}{d\left(t - \frac{x}{v}\right)} = f_1'; \qquad \frac{d\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right)}{d\left(t - \frac{x}{v}\right)} = \varphi_1;$$

$$\frac{df_2\left(t + \frac{x}{v}\right)}{d\left(t + \frac{x}{v}\right)} = f_2'; \qquad \frac{d\varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right)}{d\left(t + \frac{x}{v}\right)} = \varphi_2'.$$

L'équation (12.1) donne alors:

$$\frac{1}{v} f_1' - \frac{1}{v} f_2' = L_0 \varphi_1' + L_0 \varphi_2'. \tag{12.15}$$

Il découle à son tour de (12.2) que

$$\frac{1}{v} \varphi_1' - \frac{1}{v} \varphi_2' = C_0 f_1' + C_0 f_2'. \tag{12.16}$$

Récrivons (12.15) et (12.16) comme suit:

$$f_1' - f_2' = vL_0 (\varphi_1' + \varphi_2'); \tag{12.15'}$$

$$f_1' + f_2' = \frac{1}{vC_0} (\varphi_1' - \varphi_2'). \tag{12.16'}$$

Mais

$$vL_0 = \frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_C;$$

$$\frac{1}{vC_0} = \frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_C,$$

où Z_C — impédance caractéristique d'une ligne homogène, sans pertes [voir (11.23')]. Ainsi

$$f_1' - f_2' = Z_C (\varphi_1' + \varphi_2'); \tag{12.15''}$$

$$f_1' + f_2' = Z_C (\varphi_1' - \varphi_2'). \tag{12.16''}$$

Par conséquent,

$$\varphi_1' = \frac{f_1'}{Z_C} \cdot \qquad (12.17)$$

$$\varphi_2' = -\frac{f_2'}{Z_C}. \qquad (12.18)$$

Si les dérivées de deux fonctions (φ'_1 et f'_1 par exemple) sont égales pour toutes les valeurs de x et de t, il s'ensuit que les fonctions (φ_1 et f_1) sont elles-mêmes égales à la constante d'intégration près. Par conséquent,

$$\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right) = \frac{1}{Z_C} f_1\left(t-\frac{x}{v}\right) \qquad (12.19)$$

et

$$\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right) = -\frac{1}{Z_C} f_2\left(t+\frac{x}{v}\right). \qquad (12.20)$$

Nous avons omis les constantes d'intégration, car nous supposons que les courants et les tensions des ondes incidente et réfléchie ne contiennent pas de composantes constantes, indépendantes de x et de t. Récrivons les deux dernières équations en tenant compte de (12.8 et 12.9) et de (12.12 et 12.13) :

$$i_i = \frac{u_i}{Z_C}; \qquad (12.19')$$

$$i_r = -\frac{u_r}{Z_C}. \qquad (12.20')$$

Il découle de (12.19) que le courant de l'onde incidente à n'importe quel instant et à n'importe quel point de la ligne est égal au quotient de la tension de cette onde au même instant et au même point de la ligne, par l'impédance caractéristique Z_C.

Il résulte de même de (12.20) que le courant de l'onde réfléchie à un instant quelconque et en un point quelconque de la ligne est égal au quotient de la tension de cette onde au même point de la ligne et au même instant par l'impédance caractéristique, pris avec le signe inverse.

Le signe — dans (12.20) a la même signification que ce signe dans (11.38).

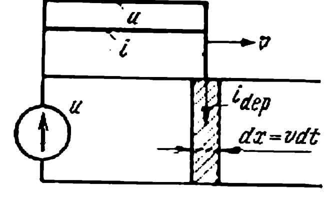


Fig. 357

§ 350. Phénomènes électromagnétiques dus à la propagation d'une onde rectangulaire le long d'une ligne. Supposons qu'une source de tension continue u, à résistance interne nulle, soit branchée à une ligne homogène non chargée, à paramètres distribués, pour laquelle $R_0 = G_0 = 0$ (fig. 357).

Une onde électromagnétique incidente se propagera le long de cette ligne. Le tronçon initial de l'onde, se déplaçant le premier le long de la ligne, est appelé front d'onde. Dans notre cas l'onde a un front rectangulaire.

En se déplaçant le long de la ligne l'onde crée les champs électrique et magnétique entre les conducteurs de cette ligne.

L'accroissement du flux magnétique à l'endroit du front de l'onde pendant le temps dt est égal au produit du courant i par l'inductance de l'élément de la ligne dx (c.-à-d. par $L_0 dx$):

$$d\psi = iL_0\, dx.$$

L'accroissement du flux magnétique à l'endroit du front d'onde engendre une F.E.M.

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -iL_0\frac{dx}{dt} = -iL_0 v = -i\frac{L_0}{\sqrt{L_0C_0}} =$$
$$= -i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = -iZ_C = -u_i = -u.$$

Ainsi une F.E.M. d'auto-induction, numériquement égale à la tension du générateur d'alimentation, prend naissance à l'emplacement du front d'onde.

En outre les conducteurs de la ligne se trouvent chargés à l'emplacement du front d'onde : l'un des conducteurs (le conducteur supérieur, par exemple), raccordé au pôle plus de la source de la F.E.M., acquiert une charge positive, et l'autre (le conducteur inférieur) reçoit une charge négative (de valeur égale).

Un courant de déplacement $i_{dép} = \frac{dq}{dt}$ apparaît à l'endroit du front d'onde. Ici dq est l'accroissement de la charge sur l'un des conducteurs de la ligne pendant le temps dt :

$$dq = C_0 u\, dx = C_0 uv\, dt$$

et

$$i_{dép} = \frac{dq}{dt} = C_0 uv = \frac{u_i}{Z_C}.$$

Par conséquent, le courant de déplacement traversant le diélectrique à l'endroit du front d'onde est exactement égal au courant de l'onde incidente, se propageant le long des conducteurs de la ligne.

Une onde électromagnétique se déplaçant le long de la ligne communique à chaque unité de longueur de cette dernière une énergie du champ électrique $\frac{C_0 u_i^2}{2}$ et une énergie du champ magnétique.

On peut démontrer que ces énergies sont égales l'une à l'autre. En effet

$$u_i = i_i Z_C = i_i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{C_0 u_i^2}{2} = \frac{C_0 i_i^2 L_0}{2C_0} = \frac{L_0 i_i^2}{2}.$$

Lorsque l'onde incidente atteint l'extrémité de la ligne, une certaine charge ou une autre ligne (à impédance caractéristique différente), étant

raccordée à cette extrémité, dans le cas le plus général une partie de l'onde incidente pénètre dans la charge (ou respectivement dans la deuxième ligne) et l'autre partie est réfléchie en donnant naissance à une onde réfléchie.

Pour savoir quelle sera la forme de l'onde pénétrant dans la charge, et quelle sera celle de l'onde réfléchie, ainsi que pour savoir comment elles vont se déformer en fonction du temps, on utilise un schéma de calcul équivalent, spécialement établi, pour l'étude des phénomènes ondulatoires dans une ligne à paramètres distribués.

§ 351. Schéma équivalent pour l'étude des phénomènes ondulatoires dans les lignes à paramètres distribués. Pour justifier la manière dont ce schéma équivalent est établi, rapportons-nous à la fig. 358. On voit

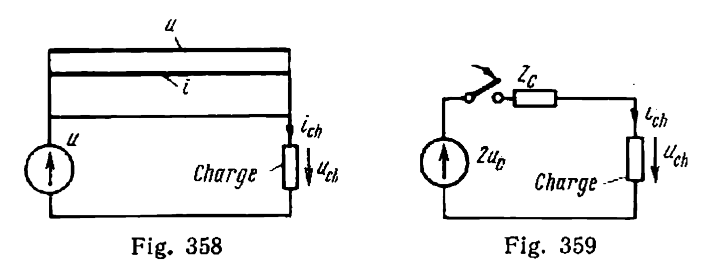


Fig. 358 Fig. 359

sur cette figure une ligne à paramètres distribués avec une certaine charge branchée à son extrémité. A partir de l'instant où l'onde incidente atteint l'extrémité de la ligne, le courant i_{ch} circule dans la charge et la tension u_{ch} est créée à ses bornes *.

Conformément aux expressions (12.10) et (12.14), la tension et le courant en un point quelconque de la ligne peuvent être représentés par la somme des ondes incidentes et réfléchies. Cette règle s'applique également pour la tension et le courant à l'extrémité de la ligne. Par conséquent,

$$u_i + u_r = u_{ch}; \qquad (12.21)$$

$$i_i + i_r = i_{ch}. \qquad (12.22)$$

Substituons $\frac{u_i}{Z_C}$ à i_i et $\frac{-u_r}{Z_C}$ à i_r. Nous obtenons:

$$u_i + u_r = u_{ch};$$

$$u_i - u_r = i_{ch}Z_C$$

ou

$$2u_i = u_{ch} + i_{ch}Z_C. \qquad (12.23)$$

Ainsi, la tension u_{ch} à l'extrémité de la ligne et le courant i_{ch} dans la charge, indépendamment du carractère de cette dernière, sont liés à la tension de l'onde incidente u_i par l'équation (12.23).

* Les épures des ondes de tension et de courant dans cette ligne sont représentées sur la fig. 358 pour cet instant.

Le circuit à paramètres distribués représenté à la fig. 359 satisfait à cette équation. Dans ce schéma on branche la charge et l'impédance caractéristique Z_C couplées en série, à la source de la F.E.M. de tension $2u_i$.

Le calcul des phénomènes transitoires dans le circuit à paramètres distribués de la fig. 359 peut être fait par l'une quelconque des méthodes exposées au chapitre X.

Le calcul à l'aide du schéma de la fig. 359 permet de trouver $i_{ch} = f(t)$ et $u_{ch} = f(t)$. Après avoir trouvé ces fonctions, on peut déterminer le caractère de variation dans le temps de la tension et du courant de l'onde réfléchie : $u_r = f(t)$ et $i_r = f(t)$. En effet il résulte des équations (12.21) et (12.20′) que

$$\left.\begin{aligned} u_r(t) &= u_{ch}(t) - u_i(t); \\ i_r(t) &= -\frac{u_r(t)}{Z_C}; \\ Z_C &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.21')$$

Examinons plusieurs exemples, illustrant l'utilisation de ce schéma équivalent.

§ 352. **Branchement d'une ligne ouverte à son extrémité à une source de tension continue (fig. 360, *a*).** Des oscillations entretenues prennent naissance dans ces conditions dans une ligne sans pertes, de même que dans un circuit oscillant sans pertes.

La période des oscillations peut être répartie en quatre parties ou stades de durée égale à $\frac{l}{v}$, où l — longueur de la ligne, v — vitesse de la propagation de l'onde. Pour examiner ces stades il faut utiliser deux schémas équivalents différents. Le premier de ces schémas (fig. 361) correspond à l'extrémité ouverte de la ligne ($Z_{ch} = \infty$) lorsque l'onde incidente, provenant du commencement de la ligne, arrive à son extrémité. Le deuxième schéma (fig. 362) correspond à l'arrivée de l'onde réfléchie au commencement de la ligne, auquel est branché le générateur de tension continue, dont la résistance interne est supposée nulle ($Z_{ch} = 0$).

Examinons séparément chaque stade du phénomène.

Premier stade. Une onde de tension $u_{i1} = u$ et une onde de courant $i_{i1} = \frac{U_{i1}}{Z_c} = i$ se propagent du générateur vers l'extrémité de la ligne.

Le premier stade est illustré sur la fig. 360, *a*.

Le deuxième stade correspond au déplacement de l'onde réfléchie u_{r1} et i_{r1} de l'extrémité de la ligne vers son commencement. On utilise le schéma de la fig. 361 pour déterminer u_{r1}. Ce schéma est établi conformément à la méthode générale exposée au § 351. Dans ce schéma on branche à la source de tension $2u_{i1} = 2u$ l'impédance caractéristique de la ligne Z_C et l'impédance de la charge $Z_{ch} = \infty$ (la ligne est ouverte à son extrémité).

Il découle du schéma de la fig. 361 que la tension aux bornes de la charge est égale au double de la tension de l'onde incidente. En effet, pour $Z_{ch} \to \infty$

$$u_{Z_{ch}} = 2u_{i1} \frac{Z_{ch}}{Z_{ch} + Z_C} = 2u_{i1} = 2u.$$

Conformément à l'expression (12.21′) l'onde réfléchie de tension

$$u_{r1} = u_{ch} - u_{i1} = 2u_{i1} - u_{i1} = u_{i1} = u.$$

L'onde réfléchie de courant [voir (12.20′)]

$$i_{r1} = -\frac{u_{r1}}{Z_C} = -i_{i1} = -i.$$

Ainsi au cours du deuxième stade du phénomène transitoire l'onde réfléchie $u_{r1} = u$, $i_{r1} = -i$ se propage de l'extrémité de la ligne vers son

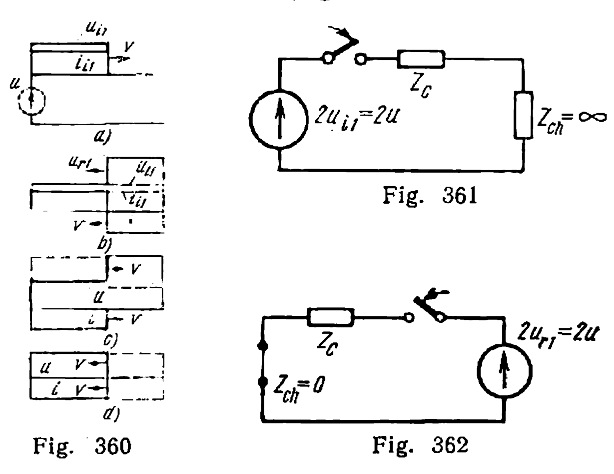


Fig. 360

Fig. 361

Fig. 362

commencement. L'état résultant de la ligne est déterminé par la superposition de la première onde incidente (u_{i1}, i_{i1}) à la première onde réfléchie (u_{r1}, i_{r1}). L'épure de la distribution de tension et de courant le long de la ligne, pour un certain instant du deuxième stade, est représentée sur la fig. 360, *b* *.

Le troisième stade de ce phénomène est celui où l'onde u_{r1}, i_{r1}, ayant atteint le commencement de la ligne, est réfléchie par ce commencement comme par une extrémité court-circuitée de la ligne (la résistance interne du générateur étant considérée comme nulle) ; ceci donne lieu à la propagation le long de la ligne dans le sens allant du générateur vers l'extrémité de la ligne d'une deuxième onde incidente (u_{i2}, i_{i2}) qui est en réalité une onde réfléchie par rapport à l'onde u_{r1}, i_{r1}.

Pour déterminer le caractère de la réflexion des ondes par le commencement de la ligne, utilisons le schéma de la fig. 362. Dans ce schéma

* Dans ce stade et pour les tronçons de la ligne parcourus par les ondes réfléchies, la tension résultante est égale à $2u$ et le courant résultant est nul.

$Z_{ch}=0$, la tension $2\,u_{r1}=2\,u$. Puisque $Z_{ch}=0$, la tension aux bornes de la charge Z_{ch} est également nulle. Mais la tension aux bornes de la charge, conformément à (12.21'), est égale à la somme de l'onde incidente (dans le cas présent $u_{r1}=u$) et de la tension de l'onde réfléchie par le commencement de la ligne, se propageant du générateur vers l'extrémité de la ligne ; c'est pour cela qu'elle a été appelée tout à l'heure deuxième onde incidente. Par conséquent,

$$0=u+u_{i2}.$$

D'où

$$u_{i2}=-u\,;\qquad i_{i2}=\frac{u_{i2}}{Z_C}=-i.$$

L'état résultant de la ligne au cours du troisième stade du phénomène est représenté sur la fig. 360, *c*. Cet état découle de la superposition des trois ondes suivantes : de la première onde incidente u_{i1}, i_{i1}, de la première onde réfléchie par l'extrémité de la ligne u_{r1}, i_{r1} et de la deuxième onde incidente u_{i2}, i_{i2}.

Au cours du quatrième stade une quatrième onde, constituée par la réflexion de la deuxième onde incidente par l'extrémité ouverte de la ligne, se superpose aux trois ondes précédentes.

La réflexion de la deuxième onde incidente par l'extrémité de la ligne se déroule conformément au schéma équivalent de la fig. 361, avec la seule différence qu'au lieu de $2u_{i1}=2u$ la tension dans ce schéma est

$$2u_{i2}=-2u.$$

Pour la deuxième onde réfléchie $u_{r2}=-u$, $i_{r2}=i$. L'état résultant de la ligne au quatrième stade (fig. 360, *d*) est caractérisé par la superpositon des quatre ondes suivantes :

$$u_{i1}+u_{r1}+u_{i2}+u_{r2}=u+u-u-u=0\,;$$
$$i_{i1}+i_{r1}+i_{i2}+i_{r2}=i-i-i+i=0.$$

Ainsi, à la fin du quatrième stade, la tension le long de l'ensemble de la ligne, de même que le courant dans toute la ligne, sont nuls. La ligne acquiert le même état qu'elle avait au commencement du premier stade. Ensuite le phénomène se répète à l'infini, puisque R_0 et G_0 ont été considérés comme nuls. En réalité, du fait de la présence de la résistance R_0 et de la perditance G_0, le phénomène oscillatoire s'amortit progressivement et un régime correspondant au régime permanent dans une ligne à courant continu s'établit dans la ligne considérée.

Dans l'exemple que nous venons d'examiner la ligne était ouverte à son extrémité et, par conséquent, les ondes réfléchies avaient la même forme rectangulaire que les ondes incidentes.

Dans le cas général les ondes réfléchies auront une forme ne ressemblant pas à la forme de l'onde incidente, si la charge à l'extrémité de la ligne comprend des capacités et/ou des inductances, ainsi que lorsque à l'endroit de raccordement d'une ligne à une autre il existe des inductances et/ou des capacités localisées.

§ 353. Phénomènes transitoires lors du branchement d'une source de tension continue à deux lignes raccordées en série, en présence d'une capacité à l'endroit de raccordement des lignes. Soit une première ligne de longueur l_1 et à impédance caractéristique Z_{C1} et une seconde ligne de longueur l_2 et à $Z_{C2} \neq Z_{C1}$. La tension de la source de la F.E.M. est égale à u (fig. 363). Une capacité localisée C existe à l'endroit de raccordement des lignes.

On demande de déterminer la forme de l'onde pénétrant dans la deuxième ligne, le caractère de variation de courant à travers la capacité localisée, ainsi que la répartition résultant de la tension et du courant le long de la première ligne, lorsque l'onde réfléchie par le raccordement des lignes se propage dans la première d'entre elles.

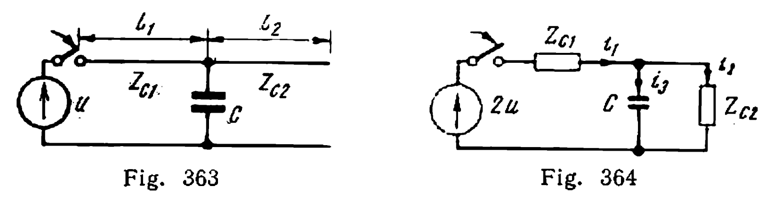


Fig. 363

Fig. 364

Le phénomène transitoire commence par la propagation d'une onde incidente à front rectangulaire $u_{i1} = u$ et du courant $i_{i1} = \frac{u}{Z_{c1}}$, provenant du générateur, le long de la première ligne.

Pour déterminer le caractère de variation des courants et des tensions lorsque l'onde incidente atteint l'endroit de raccordement des lignes, rapportons-nous au schéma équivalent à paramètres localisés (fig. 364).

Dans ce schéma la charge est constituée par deux branches couplées en parallèle, dont l'une contient la capacité C et l'autre l'impédance caractéristique Z_{c2} de la deuxième ligne.

Ces deux branches parallèles figurent dans le schéma équivalent du fait que dans le schéma initial de la fig. 363 l'onde incidente, après avoir atteint l'endroit de raccordement des lignes, trouve deux voies le long desquelles elle peut se propager : la première voie est la capacité C et la seconde est la deuxième ligne à impédance caractéristique Z_{C2}.

Un phénomène transitoire se déroulant dans un circuit analogue à celui de la fig. 364 a été examiné dans l'exemple 128. Il découle de cet exemple que (en remplaçant E par $2u$, R_1 par Z_{C1} et R_2 par Z_{C2})

$$i_2 = \frac{2u}{Z_{C1}+Z_{C2}}(1-e^{pt}) ; \qquad (12.24)$$

$$i_3 = \frac{2u}{Z_{C1}} e^{pt} ; \qquad (12.25)$$

$$i_1 = \frac{2u}{Z_{C1}+Z_{C2}}\left(1+\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}} e^{pt}\right) ; \qquad (12.26)$$

$$u_C = u_{Z_{C2}} = \frac{2uZ_{C2}}{Z_{C1}+Z_{C2}}(1-e^{pt}) ; \qquad (12.27)$$

$$p = -\frac{Z_{C1}+Z_{C2}}{Z_{C1}Z_{C2}C} . \qquad (12.28)$$

Le caractère des variations de i_2, i_3, i_1 et u_C en fonction du temps est représenté sur la fig. 365. Au premier instant après l'arrivée de l'onde à l'endroit de raccordement des lignes, la tension tombe à zéro puisque la capacité non chargée agit au premier instant comme un court-circuit.

La valeur initiale du courant traversant la capacité est égale à $\frac{2u}{Z_{c1}}$. Ensuite la capacité se charge, la tension à ses bornes croît et le courant qui y circule diminue. Le courant i_2 dans le schéma équivalent est le courant de l'onde électromagnétique se propageant le long de la deuxième ligne; la tension de cette onde est égale à $i_2 Z_{C2}$.

Pour obtenir l'onde réfléchie de tension se propageant le long de la première ligne dans le sens allant de l'endroit de raccordement des lignes vers le générateur, il faut soustraire des ordonnées de la courbe de la fig. 365, *d* la tension de l'onde incidente u et, ensuite, transporter la courbe ainsi obtenue sur la ligne en tenant compte de la vitesse de l'onde réfléchie.

L'onde réfléchie de tension et l'onde réfléchie de courant sont représentées respectivement sur les fig. 366, *a* et *b*.

L'épure de la distribution de tension et de courant le long de la première et de la deuxième lignes pour l'instant où l'onde réfléchie par le raccordement des lignes atteint le milieu de la première ligne, est représentée respectivement sur les fig. 367, *a* et *b*.

La diminution brusque de courant *ef* dans la courbe de la fig. 367, *b* est égale au courant à travers la capacité à l'instant considéré. Le long de la deuxième ligne l'onde a parcouru une distance double de celle parcourue par l'onde réfléchie le long de la première ligne. Ceci provient de ce que la première ligne est une ligne à câbles et que la deuxième ligne est aérienne. La vitesse de propagation d'une onde le long d'une ligne aérienne est égale à 300 000 *km/s* et celle le long d'une ligne à câbles est de 150 000 *km/s* environ *.

Exemple 166. Dans le schéma de la fig. 363 $Z_{C1} = 50\ \Omega$; $Z_{C2} = 400\ \Omega$; $l_2 = 100\ km$; $C = 5{,}62\ \mu F$; $l_1 = 60\ km$; $u = 10\ kV$. La première ligne est à câbles et la deuxième est aérienne. Construire l'épure de propagation de l'onde de tension et de l'onde de courant le long de ces lignes, à l'instant où l'onde se propageant le long de la seconde ligne atteint extrémité de cette dernière.

Solution. Conformément à (12.28)

$$p = -\frac{50+400}{50\cdot 400\cdot 5{,}62\cdot 10^{-6}} = -4000 s^{-1}.$$

Le courant de l'onde incidente le long de la première ligne est

$$i_i = \frac{u}{Z_{C1}} = \frac{10^4}{50} = 200\ A.$$

Suivant (12.24)

$$i_2 = 44{,}5\,(1 - e^{-4000t})\ A.$$

* L'expression pour le calcul de la vitesse v de propagation d'une onde le long d'une ligne est donnée au § 347, p. 472 et les L_0 et C_0, figurant dans l'expression sont définies à la. page 445.

La courbe $i_2 = f(t)$ est représentée sur la fig. 365, *a*. Conformément à (12.25)

$$i_3 = 400e^{-4000t} A.$$

La courbe de $i_3 = f(t)$ est représentée sur la fig. 365, *b*. Conformément à (12.26)

$$i_1 = 44{,}5\,(1 + 8e^{-4000t})\ \text{A}.$$

La courbe du courant i_1 est représentée sur la fig. 365, *c*. Conformément à (12.27)

$$u_C = u_{Z_{C2}} = 17\,750\,(1 - e^{-4000t})\ V.$$

La courbe de u_C est représentée sur la fig. 365, *d*.

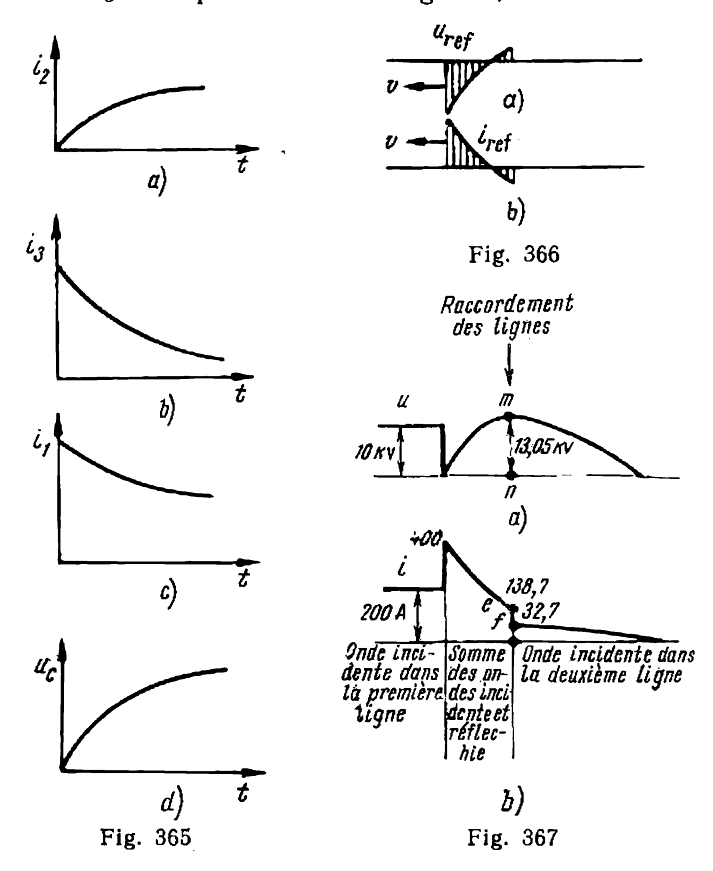


Fig. 365

Fig. 366

Fig. 367

Suivant les conditions imposées, l'onde incidente doit atteindre l'extrémité de la deuxième ligne (aérienne). La distance l_2, égale à 100 *km*, sera parcourue par l'onde pendant le temps

$$t = \frac{l_2}{v} = \frac{100}{300\,000} = \frac{1}{3000}\ s.$$

Pendant ce temps l'onde réfléchie par l'endroit de raccordement des lignes parcourra le long de la première ligne (à câbles) une distance deux fois moindre.

Les courbes de répartition de u et i le long des lignes sont représentées sur la fig. 367.

La diminution brusque de courant ef sur la fig. 367, b est égale au courant i_3 pour $t=\frac{1}{3000}\,s$;

$$i_3=400e^{-\frac{4}{3}}=106\ A.$$

Le tronçon fg est égal au courant i_2 pour $t=\frac{1}{3000}\,s$;

$$i_2=44{,}5\,(1-e^{-\frac{4}{3}})=32{,}7\,A.$$

Le tronçon mn de la fig. 367, a est égal à la tension u_C pour $t=\frac{1}{300}\,s$:

$$u_C=13\,050\,V.$$

Exemple 167. Une ligne aérienne de 100 km de longueur à impédance caractéristique de 500 Ω comporte à son extrémité une charge, constituée par une résistance active $R_{ch}=R=700\ \Omega$ et une inductance

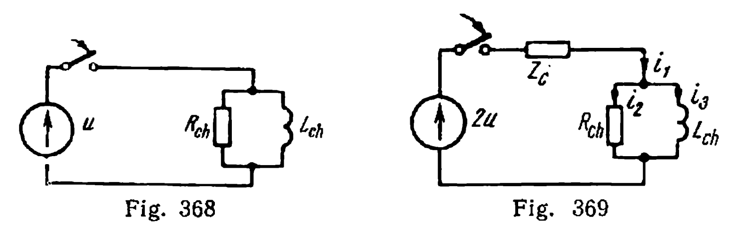


Fig. 368 Fig. 369

$L=0{,}1\,H$ branchées en parallèle (fig. 368). Cette ligne est mise sous une tension de $u=30\ kV$. Construire les épures de la répartition de la tension et du courant le long de la ligne à l'instant où l'onde réfléchie par l'extrémité de la ligne atteint le milieu de cette dernière.

Solution. Calculons d'abord le courant de l'onde incidente

$$i_i=\frac{u}{Z_C}=\frac{30\cdot 10^3}{500}=60\,A.$$

Construisons ensuite le schéma équivalent (fig. 369). Il résulte de ce schéma que

$$Z_C+\frac{RpL}{R+pL}=0.$$

D'où

$$p=-\frac{RZ_C}{(R+Z_C)\,L}=-\frac{700\cdot 500}{1200\cdot 0{,}1}=-2910\ s^{-1};$$

$$i_1=\frac{2u}{Z_C}\left(1-\frac{R}{R+Z_C}e^{pt}\right)=120\,(1-0{,}583e^{-2910t})\,A;$$

$$i_3 = \frac{2u}{Z_C}(1 - e^{pt}) = 120\,(1 - e^{-2910t})\,A;$$

$$u_L = u_{ch} = L\frac{di_3}{dt} = 2u\,\frac{R}{R+Z_C}\,e^{pt} = 35\cdot 10^3 e^{-2910t}\,V.$$

Les courbes $u_{ch} = f(t)$ et $i_1 = f(t)$ sont représentées sur la fig. 370.

Les épures de répartition de la tension et du courant à l'instant considéré sont représentées sur la fig. 371, *a* et *b*.

Dans les exemples examinés ci-dessus, le circuit électrique comprenant une ligne à paramètres distribués était branché à une source de courant continu.

Cependant, on rencontre souvent dans la pratique des circuits dans lesquels la F.E.M. de la source varie en fonction du temps suivant une loi sinusoïdale. Si la longueur de la ligne à paramètres distribués et la fréquence de la F.E.M. sinusoïdale sont telles que le temps de parcours de

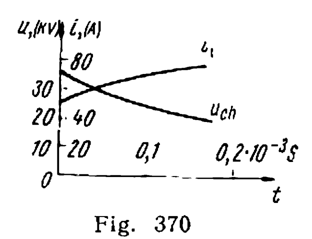


Fig. 370

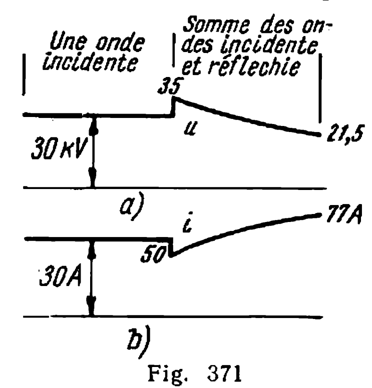


Fig. 371

la ligne par l'onde $\left(t = \frac{l}{v}\right)$ est nettement inférieure à la période T du courant alternatif, étant par exemple de l'ordre de $\left(\text{de } \frac{1}{30} \text{ à } \frac{1}{50}\right) T$ on peut, en étudiant le premier stade du phénomène transitoire, admettre en première approximation que la ligne soit branchée à une source de tension continue; la F.E.M. de cette source est prise égale à l'amplitude de la F.E.M. sinusoïdale (le calcul est ainsi effectué dans les conditions les plus dures).

Mais si le temps de parcours de l'onde le long de la ligne atteint une fraction de la période, supérieure à $\left(\text{de } \frac{1}{30} \text{ à } \frac{1}{50}\right) T$, il faut tenir compte dans les calculs de la variation de la F.E.M. de la source pendant le déplacement de l'onde incidente le long de la ligne.

APPENDICE A

CIRCUITS ÉLECTRIQUES À PARAMÈTRES VARIABLES EN FONCTION DU TEMPS

§ 354. **Introduction.** Les circuits électriques à paramètres variables en fonction du temps sont des circuits qui comprennent des résistances actives, des inductances, des capacités et des inductances mutuelles variables en fonction du temps (il suffit que dans le circuit considéré une au moins des résistances énumérées soit variable en fonction du temps, pour que ce circuit appartienne à la catégorie des circuits examinés dans le présent appendice).

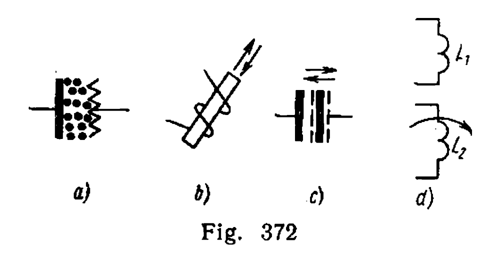


Fig. 372

Un microphone charbon est une résistance active variable simple (fig. 372, *a*). Sa résistance est une fonction de la pression acoustique exercée par la membrane sur la grenaille de graphite. Une bobine d'inductance à noyau ferromagnétique ouvert, pouvant être introduit dans cette bobine ou sorti de cette dernière (fig. 372, *b*), est un exemple d'inductance variable en fonction du temps.

Un condensateur, dont les armatures peuvent être écartées ou rapprochées sans se toucher (fig. 372, *c*), est un exemple d'une capacité variable en fonction du temps.

Deux bobines d'inductance L_1 et L_2 (fig. 372, *d*), dont la disposition mutuelle varie en fonction du temps, par exemple, lorsque l'une d'elles tourne autour d'un axe perpendiculaire au schéma est un exemple d'induction mutuelle variable en fonction du temps.

La variation en fonction du temps des paramètres d'un circuit se fait habituellement sous l'effet d'une force mécanique extérieure. Nous n'allons pas examiner ici les origines de cette force.

Un paramètre d'un circuit peut varier périodiquement ou non périodiquement en fonction du temps. On voit sur la fig. 373 plusieurs lois périodiques différentes de variation d'un paramètre quelconque.

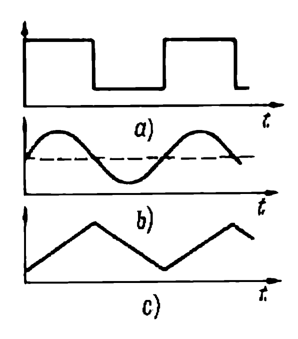


Fig. 373

§ 355. **Certaines propriétés communes des circuits électriques à paramètres variables.** Les circuits à paramètres variables en fonction du temps, tout en étant des circuits linéaires (c'est-à-dire pouvant être décrits par des équations différentielles linéaires), possèdent certaines propriétés qui les rapprochent des circuits non linéaires.

Les résistances variables en fonction du temps, de même que les résistances non linéaires, sont des générateurs d'harmoniques supérieurs de courant. De ce fait, les circuits à paramètres variables sont parcourus par des courants ayant non seulement les fréquences présentes dans la source de la F.E.M. et dans la composante variable de la résistance, mais également par des courants de beaucoup d'autres fréquences encore.

Grâce à ceci, des phénomènes de résonance à harmoniques supérieurs et inférieurs peuvent apparaître dans les circuits à paramètres variables, comprenant

des inductances et des capacités, même en l'absence des harmoniques de ces rangs dans la source de la F.E.M.

Il y a lieu de souligner que les amplitudes de divers harmoniques de courant dans les circuits à paramètres variables dépendent linéairement des valeurs des amplitudes des autres harmoniques (dans les circuits non linéaires la fonction analogue n'est pas linéaire).

En outre, les circuits à paramètres variables en fonction du temps possèdent une propriété linéaire, qui les diffère en principe des circuits non linéaires.

Nous voulons dire ici que dans les circuits à paramètres variables en fonction du temps, les amplitudes des harmoniques de courant et de tension sont proportionnelles à l'amplitude de la F.E.M. de la source. En d'autres termes, lorsque la F.E.M. de la source prend une valeur double, les amplitudes des courants et de tension augmentent également de deux fois. Par contre dans les circuits à résistances non linéaires, où on a affaire au phénomène de saturation, cette proportionnalité n'existe pas.

Fig. 374

Nous avons déjà signalé qu'une résistance variable joue le rôle d'un générateur d'harmoniques supérieurs de courant. Démontrons-le sur l'exemple le plus simple. La fig. 374 représente un circuit comprenant une source de F.E.M. continue E et une résistance active, variable en fonction du temps conformément à la courbe de la fig. 373, b:

$$R(t) = R_0(1 - k \sin \omega t). \tag{A.1}$$

$$[k < 1$$

D'après la loi d'Ohm le courant dans ce circuit est

$$i = \frac{E}{R(t)} = \frac{E}{R_0} \frac{1}{1 - k \sin \omega t}.$$

On sait que la fonction $\frac{1}{1-x}$, pour $(x) < 1$, peut être développée en la série exponentielle:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n. \tag{A.2}$$

Le rôle joué par x dans (A.2) est assumé par $k \sin \omega t$ dans (A.1). Par conséquent, pour $k < 1$

$$\frac{i}{\frac{E}{R_0}} = 1 + k \sin \omega t + k^2 \sin^2 \omega t + k^3 \sin^3 \omega t + \ldots \tag{A.3}$$

Utilisons les expressions trigonométriques connues: $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$;

$$\sin^3 \alpha = -\frac{1}{4} \sin 3\alpha + \frac{1}{4} \sin \alpha;$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha$$

et groupons les termes du second membre de la série (A.3) ayant des arguments de même multiplicité. Nous obtenons

$$\frac{i}{\frac{E}{R_0}} = \left(1 + \frac{k^2}{2} + \frac{3k^4}{8} + \ldots\right) + \left(k + \frac{k^3}{4} + \ldots\right) \sin \omega t -$$

$$- \left(-\frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{2} + \ldots\right) \cos 2\omega t - \left(\frac{k^3}{4} + \ldots\right) \sin 3\omega t \ldots$$

Ainsi, bien que la F.E.M. intercalée dans le circuit de la fig. 374 soit continue et que la composante variable de la résistance varie suivant une loi sinusoïdale à la fréquence angulaire ω, le courant comprend également des harmoniques supérieurs (à fréquences 2ω, 3ω). La composante continue et les amplitudes des harmoniques du courant dépendent du coefficient k suivant une loi non linéaire, mais sont une fonction linéaire de la F.E.M. E.

Soulignons également que pour $k \neq 0$, la composante continue du courant dans le circuit de la fig. 374 n'est pas égale à $\frac{E}{R_0}$. En d'autres termes, un certain effet redresseur, d'un genre particulier, est observé dans ce circuit.

Si dans le circuit de la fig. 374, la résistance R (t) varie en fonction du temps suivant une loi plus compliquée, comme par exemple

$$R_0[1-k_1\sin\omega t-k_2\sin(2\omega t+\varphi)]\,;\quad k_1<0{,}5\,;\quad k_2<0{,}5,$$

on peut s'assurer, après avoir effectué des calculs similaires, que la composante continue ainsi que les amplitudes de tous les harmoniques de courant dépendent de k_1, k_2 et φ.

L'énergie dégagée sous forme de chaleur dans un circuit à paramètres variables en fonction du temps est fournie non seulement par les sources de F.E.M. (ou de courant) existant dans le circuit, mais également par d'autres sources extérieures (par exemple, par des moteurs mécaniques), effectuant un travail quelconque par suite des variations du paramètre (ou des paramètres) du circuit.

La part d'énergie fournie par la source de F.E.M. et celle fournie par la source extérieure, effectuant un certain travail par suite des variations du paramètre du circuit, doivent être calculées pour chaque circuit à paramètres variables suivant les conditions concrètes existentes; ces problèmes ne seront pas examinés ici. Signalons seulement que la part d'énergie, fournie par la source extérieure, peut être 0 ou 100% dans des cas extrêmes limites.

Signalons également que des oscillations électriques, entretenues, engendrées dans les circuits électriques, en l'absence de sources d'énergie électriques, par suite de la variation périodique en fonction du temps de l'inductance ou de la capacité faisant partie de ce circuit, sont appelées *oscillations paramétriques* (hétéroparamétriques). Elles sont entretenues aux dépens du travail de la force mécanique, exécuté pour faire varier le paramètre (l'inductance ou la capacité) du circuit. La fréquence de ces oscillations est deux fois moindre que la fréquence des variations du paramètre, en question.

§ 356. Méthode de calcul du régime permanent des circuits électriques à paramètres variables. Si le paramètre variable d'un circuit varie périodiquement en fonction du temps, en subissant des variations brusques en forme de sauts (voir fig. 373, *a*), le calcul de ces circuits peut être fait par la méthode classique de calcul des phénomènes transitoires. Dans cette éventualité les constantes d'intégration sont déterminées en partant des lois de la commutation et de la périodicité du phénomène. L'application de cette méthode est exposée plus loin, dans l'exemple 168.

Si, par contre, le paramètre varie de telle manière qu'on peut le représenter sous forme d'une composante constante et d'une ou de plusieurs composantes sinusoïdales, le calcul est fait par la méthode du bilan harmonique.

La méthode du bilan harmonique, appliquée aux circuits non linéaires a été examinée au § 231. Elle reste la même dans les grandes lignes ici également. L'ordre des opérations de calcul est le suivant: le courant cherché (ou toute autre grandeur quelconque) est représenté sous forme d'une série de Fourier, par exemple sous la forme:

$$I_0+I_{11}\sin\omega t+I_{12}\cos\omega t+I_{21}\sin 2\omega t+I_{22}\cos 2\omega t+\ldots$$

Ensuite on substitue ce courant dans l'équation différentielle du circuit et on en tire l'équation exprimant l'égalité des composantes continues des premier et second membres de cette équation, ainsi que l'équation exprimant l'égalité des composantes sinusoïdales des premier et second membres, etc. Chacune de ces équations comprend en général plusieurs inconnues (I_0, I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}), mais est

une équation linéaire par rapport à I_0, I_{11}, I_{12}, I_{22} (c'est là la différence avec les circuits non linéaires). Ensuite on résout le système d'équations linéaires par rapport à I_0, I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}. La méthode du bilan harmonique peut être utilisée pour le calcul des circuits comprenant plusieurs paramètres variables en fonction du temps (par exemple, une résistance active et une inductance variables en fonction du temps, la F.E.M. pouvant varier suivant une loi périodique quelconque). Cette méthode est examinée plus loin sur un exemple simple 169.

Exemple 168. Dans le circuit de la fig. 375, *a* la F.*E*.M. E et l'inductance L sont constantes, tandis que la résistance R varie comme indiqué sur la fig. 375, *b*. Déterminer la loi de variation du courant en régime permanent dans ce circuit.

Solution. Puisque la résistance varie périodiquement, le courant va varier également suivant une loi périodique. Désignons le courant à l'instant $t = 0$ par I_2. A ce moment la résistance du circuit a augmenté par saut de la valeur R_2 à la valeur R_1 et le courant dans le circuit commence à diminuer. A l'instant $t = \tau$ le courant acquiert la valeur I_1 et à cet instant précis la résistance diminue par saut de la valeur R_1 à la valeur R_2. De ce fait le courant commence à croître.

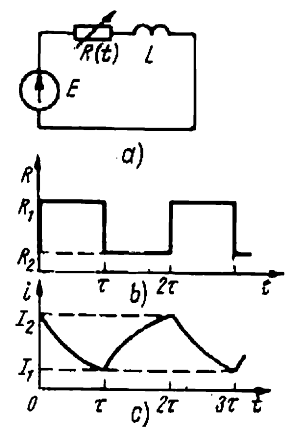


Fig. 375

Dans l'intervalle du temps entre $t = 0$ et $t = \tau$ le courant peur être représenté comme la somme du courant forcé $\frac{E}{R_1}$ et du courant libre $C_1 e^{p_1 t}$. Ici p_1 est la racine de l'équation caractéristique du circuit $pL + R_1 = 0$; $p_1 = -\frac{R_1}{L}$; C_1 — constante d'intégration.

Pendant le deuxième intervalle de temps $i = \frac{E}{R_2} + C_2 e^{p_2 (t-\tau)}$; $p_2 = -\frac{R_2}{L}$. Le problème se ramène à la recherche des constantes C_1 et C_2.

Pour $t = 0$ $i = I_2$; par conséquent,

$$I_2 = \frac{E}{R_1} + C_1. \tag{A.4}$$

Pour $t = \tau$ $i = I_1$; par conséquent :

$$I_1 = \frac{E}{R_1} + C_1 e^{p_1 \tau}. \tag{A.5}$$

La valeur initiale du courant pour le deuxième intervalle du temps I_1 peut être trouvé autrement aussi, à savoir:

$$I_1 = \frac{E}{R_2} + C_2. \tag{A.6}$$

A la fin du deuxième intervalle de temps lorsque $t = 2\tau$, $i = I_2$ et, par conséquent,

$$I_2 = \frac{E}{R_2} + C_2 e^{p_2 \tau}. \tag{A.7}$$

En écrivant que les seconds membres des équations (A.4) et (A.7) sont égaux, obtenons

$$\frac{E}{R_1} + C_1 = \frac{E}{R_2} + C_2 e^{p_2 \tau}.$$

De même il résulte des (A.5) et (A.6) que

$$\frac{E}{R_2}+C_2=\frac{E}{R_1}+C_1e^{p_1\tau}.$$

La résolution en commun de ces dernières équations donne

$$C_1=\frac{a(1-e^{p_2\tau})}{1-e^{p_1\tau+p_2\tau}};\qquad (A.8)$$

$$C_2=-a+C_1e^{p_1\tau}.\qquad (A.9)$$

Ici $a=\frac{E}{R_1}-\frac{E}{R_2}$.

Pour le premier intervalle de temps $i=\frac{E}{R_1}+C_1e^{p_1t}$ et pour le deuxième $i=\frac{E}{R_2}+C_2e^{p_2(t-\tau)}$.

La courbe $i=f(t)$ est représentée sur la fig. 375, *c*.

Exemple 169. Soit dans le circuit de la fig. 376 la F.E.M. $e=E+E_m\sin(\omega t+\psi)$; $L=L_0(1+k\sin\omega t)$; la résistance active R n'est pas une fonction du temps. Calculer la composante continue ainsi que les premier et second harmoniques du courant ($k<1$).

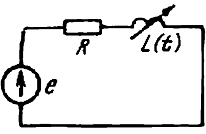


Fig. 376

Solution. Dans l'équation différentielle

$$Ri+\frac{d}{dt}(Li)=E+E_m\sin(\omega t+\psi)\qquad (A.10)$$

substituons le courant

$$i=I_0+I_{11}\sin\omega t+I_{12}\cos\omega t+I_{21}\sin 2\omega t+I_{22}\cos 2\omega t.\qquad (A.11)$$

En isolant la composante continue, nous obtenons l'équation (A.12):

$$RI_0=E.\qquad (A.12)$$

L'égalité des coefficients de $\sin\omega t$ dans les deux membres de l'équation (A.10), après substitution de (A.11) dans cette équation et sa division par R, donne

$$I_{11}-aI_{12}-\frac{ka}{2}I_{21}=\frac{E_m}{R}\cos\psi.\qquad (A.13)$$

L'égalité des coefficients de $\cos\omega t$ (et la division par R) donne :

$$aI_{11}+I_{12}-\frac{ak}{2}I_{22}=-akI_0+\frac{E_m}{R}\sin\psi.\qquad (A.14)$$

L'égalité des coefficients de $\sin 2\omega t$ donne:

$$akI_{11}+I_{21}-2aI_{22}=0.\qquad (A.15)$$

L'égalité des coefficients de $\cos 2\omega t$ donne:

$$akI_{12}+2aI_{21}+I_{22}=0,\qquad (A.16)$$

$$a=\frac{\omega L_0}{R}.\qquad (A.17)$$

Il résulte de l'équation (A.12) que dans le circuit de la fig. 376 la composante continue du courant I_0 ne dépend pas de la composante variable de l'inductance et de la composante variable de la F.E.M. Cependant, la composante continue du flux magnétique total, égal à $L_0I_0+\frac{kL_0I_{11}}{2}$, dépend de l'amplitude de la compo-

sante alternative de l'inductance (kL_0) et de l'amplitude du premier harmonique du courant alternatif.

Cette propriété rappelle dans un certain sens la première des propriétés des résistances non linéaires symétriques, décrite au § 200.

Ecrivons la solution du système (A.13) — (A.16):

$$I_{11}=\frac{M\alpha+N\beta}{\alpha^2+\beta^2},\quad I_{12}=\frac{N-\beta I_{11}}{\alpha},$$

$$I_{21}=\gamma I_{11}-\nu I_{12},\quad I_{22}=\nu I_{11}-\gamma I_{12},$$

où

$$M=\frac{E_m}{R}\cos\psi,\quad N=\frac{E_m}{R}\sin\psi-ak\,I_0,$$

$$\alpha=\frac{1+4a^2-0{,}5a^2k^2}{1+4a^2},\quad \beta=\frac{a(1+4a^2-a^2k^2)}{1+4a^2}$$

$$\gamma=\frac{ak}{1+4a^2},\quad \nu=\frac{2a^2k}{1+4a^2}.$$

APPENDICE B

INTÉGRALE DE FOURIER

§ 357. Introduction. On utilise l'intégrale de Fourier en radiotechnique, dans la technique de communications, en acoustique, optique, hydrodynamique et dans d'autres branches de la technique encore, afin de mettre en évidence les propriétés fréquentielles et énergétiques des impulsions non périodiques et leurs effets sur les systèmes sélectifs (résonnants). Dans la théorie de régulation automatique l'intégrale de Fourier est pris comme base pour établir des formules approchées, permettant de déterminer la nature de la variation de la valeur cherchée, en partant de la courbe de réponse en fréquence de l'impédance d'entrée du circuit, relevée expérimentalement. Toutes les questions énumérées ne seront pas traitées dans le présent cours, mais il est quand même utile d'avoir une idée de l'intégrale de Fourier et des problèmes qui lui sont liés (du spectre de la fonction, des liens entre les spectres de la fonction et l'image de Laplace); on sera ainsi mieux préparé à la lecture des ouvrages spéciaux, traitant des branches mentionnées de la technique.

§ 358. Série de Fourier écrite sous forme complexe. Nous avons déjà indiqué (voir § 168) que n'importe quelle fonction périodique $f(t)$, satisfaisant aux conditions de Dirichlet, peut être développée en une série de Fourier.

Désignons par T la période de la fonction et par $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ sa fréquence fondamentale.

La série de Fourier peut être écrite de deux manières différentes.

Première forme d'écriture:

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(k\omega_0t+\psi_k). \tag{B.1a}$$

Deuxième forme d'écriture:

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A'_k\sin k\omega_0t+A''_k\cos k\omega_0t), \tag{B.1b}$$

où A_0 — composante continue de la série; A_k — amplitude de l'harmonique du rang k, ψ_k — phase initiale de l'harmonique k;

$$A'_k = A_k \cos \psi_k; \quad A''_k = A_k \sin \psi_k,$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt, \tag{B.2}$$

$$A'_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t\, dt, \tag{B.3}$$

$$A''_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t\, dt. \tag{B.4}$$

On sait que

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}.$$

Par conséquent,

$$\sin (k\omega_0 t + \psi_k) = \frac{1}{2j} \left[e^{j(k\omega_0 t + \psi_k)} - e^{-j(k\omega_0 t + \psi_k)} \right]. \tag{B.5}$$

En substituant le second membre de l'expression (B.5) dans (B.1a), nous obtenons:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[e^{j(k\omega_0 t + \psi_k)} - e^{-j(k\omega_0 t + \psi_k)} \right]. \tag{B.5a}$$

Posons

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k}; \tag{B.6}$$

$$\dot{A}_{-k} = -A_k e^{-j\psi_k}. \tag{B.7}$$

Alors la série (B.5a) peut être écrite comme suit:

$$f(t) = A_0 + \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t}. \tag{B.8}$$

L'expression (B.8) est la forme complexe d'écriture de la série de Fourier. L'indice courant k peut prendre toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, mais ne peut être nul, puisque la composante continue de la série figure sous forme d'un terme indépendant.

Exemple 170. Ecrire la fonction $f(t) = 2 + 3 \sin (\omega_0 t + 30°) + 2 \sin (2\omega_0 t - 45°)$ sous sa forme complexe.

Solution. $\dot{A}_0 = 2$; $\dot{A}_1 = 3e^{j\,30°}$; $\dot{A}_{-1} = -3e^{-j\,30°}$; $\dot{A}_2 = 2e^{-j\,45°}$; $\dot{A}_{-2} = -2e^{j\,45°}$; $f(t) = 2 + \frac{1}{2j}\left[3e^{j(\omega_0 t + 30°)} - 3e^{-j(\omega_0 t + 30°)} + 2e^{j(2\omega_0 t - 45°)} - 2e^{-j(2\omega_0 t - 45°)}\right]$.

Ecrivons l'expression pour l'amplitude complexe $\dot{A}_k$. Par définition [voir (B.6)]

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k} = A_k \cos \psi_k + jA_k \sin \psi_k = A_k' + jA_k''. \qquad \text{(B.9)}$$

A_k' est donné par (B.3) et A_k'' par (B.4).

Substituons les seconds membres des expressions (B.3) et (B.4) dans (B.9)

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\sin k\omega_0 t + j \cos k\omega_0 t)\, dt = \frac{2j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - j \sin k\omega_0 t)\, dt.$$

Ou

$$\dot{A}_k = \frac{2j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt. \qquad \text{(B.10)}$$

Substituons le second membre de l'expression (B.10) dans (B.8). Nous aurons alors

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{jk\omega_0 t} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt. \qquad \text{(B.11)}$$

§ 359. Spectre d'une fonction et intégrale de Fourier. La série de Fourier est une série trigonométrique, représentant une fonction périodique par la somme de sinusoïdes d'amplitudes finies et dont les arguments sont multiples de la fréquence fondamentale ω_0.

On entend par intégrale de Fourier une série trigonométrique, représentant une fonction non périodique par une somme d'un nombre infini de sinusoïdes, dont les amplitudes sont infiniment petites et dont les arguments des sinusoïdes contiguës diffèrent d'une valeur infiniment petite.

La formule de l'intégrale de Fourier est obtenue à partir de la formule de la série de Fourier [de l'expression (B.11)] et en passant à la limite lorsque la période T tend vers l'infini.

On impose une limitation à la fonction $f(t)$ représentée par l'intégrale de Fourier, à savoir: on suppose que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ soit finie (et non pas infinie). C'est une limitation très sérieuse. Un certain nombre de fonctions ne peuvent satisfaire à cette condition *.

---

* L'exemple le plus important pour la pratique des fonctions $f(t)$ pour lesquelles l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ est divergente, est la fonction $f(t) = A$, où A est un nombre constant. Afin de pouvoir représenter par l'intégrale de Fourier une fonction aussi importante pour la pratique que $f(t) = A$, on a recours à l'artifice suivant. On trouve l'intégrale de Fourier pour la fonction $f(t) = Ae^{-\beta t}$, où $\beta > 0$ et $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Pour cette fonction $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et peut être par conséquent représentée par une intégrale de Fourier. Puis on fait tendre β vers 0 dans l'expression ainsi obtenue.

Puisqu'on a par définition [(voir (B.2)]

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt$$

et que pour $T \to \infty$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ est finie, on a $A_0 = 0$. Transformons la grandeur

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

sous le signe de sommation dans (B.11). A cette fin, substituons ω au produit $k\omega_0$ et considérons ω comme fréquence variable (courante). Dans la série de Fourier la différence des deux fréquences contiguës est $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Par conséquent, $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$.

Pour $T \to \infty$ $\Delta\omega$ substituons la différentielle $d\omega$ à $\Delta\omega$. Nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

Désignons

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \qquad \text{(B.12)}$$

La formule (B.12) permet de transformer la fonction du temps $f(t)$ en une fonction de fréquence $G(\omega)$; $G(\omega)$ est appelée spectre de la fonction $f(t)$. C'est une quantité complexe, qui dépend de la nature de la fonction $f(t)$. Conformément à (B.12) substituons dans l'expression (B.11) $\frac{1}{2\pi} G(\omega)\, d\omega$ à $\frac{1}{T} \int f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$ et en tenant compte que lorsque k varie de $-\infty$ à $+\infty$ $\omega = k\omega_0$ varie également de $-\infty$ à $+\infty$. Par conséquent,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} e^{j\omega t} G(\omega)\, d\omega.$$

Remplaçons la somme par une intérgale. Nous obtenons :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \qquad \text{(B.13)}$$

L'expression (B.13) est l'écriture de l'intégrale de Fourier. Elle exprime une fonction non périodique $f(t)$ sous forme d'un nombre infini d'oscillations sinusoïdales de fréquences infiniment voisines et d'amplitudes infiniment petites $G(\omega)\,d\omega$ [$G(\omega)$ est finie, mais le produit $G(\omega)\,d\omega$ est infiniment petit, puisque $d\omega$ est infiniment petit].

Les transformations (B.12) et (B.13) sont l'inverse l'une de l'autre.

Notons que la représentation de la fonction $f(t)$ dans sa forme complexe par l'intégrale de Fourier a nécessité l'introduction, au point de vue formel, d'une fréquence angulaire négative.

§ 360. Relation entre le spectre d'une fonction et sa transformée de Laplace. Comparons l'expression (B.12) à (B.14) de la transformation de Laplace:

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt \tag{B.14}$$

avec la condition $f(t)=0$ pour $t<0$.

Si l'on tient compte que $f(t)=0$ pour $t<0$ et si on remplace p par $j\omega$, (B.14) se transforme en la formule (B.12). Par conséquent, les formules pour le spectre $G(\omega)$ de la fonction peuvent être obtenues à partir des formules correspondantes pour les transformées de Laplace, si on substitue $j\omega$ dans ces dernières à p.

Exemple 171. En utilisant le tableau (du § 291) trouver le spectre $G(\omega)$ de la fonction $f(t)=e^{-\alpha t}$, en supposant que $f(t)=0$ pour $t<0$.

Solution. On trouve dans le tableau (voir § 291) les transformées de Laplace. Les transformées de $e^{-\alpha t}$ est $\frac{1}{\alpha+p}$. Substituant $j\omega$ à p, nous obtenons le spectre $G(\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}$; $G(\omega)$ est une quantité complexe, égale à $Ge^{-j\varphi_G}$. Son module G est égal à $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$; l'argument $\varphi_G=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{\alpha}$.

§ 361. Ordre des opérations de calcul du courant dans un circuit à l'aide de l'integrale de Fourier. Le calcul à l'aide de l'intégrale de Fourier a la signification physique suivante: pour trouver la réponse du système à une action quelconque, il faut représenter cette action par une infinité d'actions harmoniques, trouver par la méthode symbolique la réponse du système à chacune de ces actions et, ensuite, faire la somme des réponses à toutes ces actions.

Soit une F.E.M. $e(t)$ agissant sur un circuit à conditions initiales nulles et à paramètres connus. On demande de trouver à l'aide de l'intégrale de Fourier le courant $i(t)$. Ce problème est résolu en quatre étapes. Dans la première étape on trouve, à l'aide des tables de transformées de Laplace, le spectre $E(\omega)$ de la F.E.M. donnée $e(t)$. La deuxième étape est le calcul de l'impédance d'entrée $Z(\omega)$, considérée comme une fonction de la fréquence. En réalité $Z(\omega)$ est l'impédance d'entrée du circuit en courant alternatif. La troisième étape comprend le calcul à l'aide de la loi d'Ohm du spectre du courant:

$$I(\omega)=\frac{E(\omega)}{Z(\omega)}=E(\omega)\,Y(\omega).$$

La quatrième étape est le calcul du courant en fonction du temps, en partant du spectre $I(\omega)$ de ce courant. Le passage de $I(\omega)$ à $i(t)$ est possible en principe à l'aide de la formule (B.13). Mais dans la pratique le calcul de $i(t)$ à partir de $I(\omega)$ se fait habituellement à l'aide de même tableau de correspondance entre l'image de Laplace et la fonction du temps, qui a déjà été utilisé dans la première étape du calcul pour trouver le spectre $F(\omega)$ de la F.E.M.

En fait, toutes les étapes de calcul mentionnées ci-dessus reproduisent totalement les étapes du calcul qu'on doit exécuter en utilisant la méthode opérationnelle.

Signalons en conclusion que le calcul à l'aide de l'intégrale de Fourier est nettement simplifié en réalité pour les systèmes résonnants à faibles pertes (à facteur Q élevé).

Dans ce cas il suffit de tenir compte non pas de la caractéristique $Y(\omega)$ en totalité, mais seulement de sa partie principale, au voisinage de la fréquence de résonance ω_2. On peut estimer que dans les limites de cette partie de la caractéristique $Y(\omega)$, $E(\omega)$ est égale à sa valeur à fréquence de résonance $E(\omega_2)$.

Grâce à ceci et lorsqu'une certaine impulsion agit sur un circuit résonnant, ce circuit sélectionne lui-même les fréquences correspondantes à sa fréquence de résonance propre et les oscillations amorcées dans le circuit auront la forme des oscillations libres.

APPENDICE C

PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES DANS LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES NON LINÉAIRES

§ 362. Introduction et caractéristiques générales des méthodes d'analyse et de calcul des phénomènes transitoires dans les circuits électriques non linéaires. Il résulte du chapitre IX que la nature même des phénomènes se déroulant dans les circuits non linéaires est bien plus complexe et plus variée que pour les circuits linéaires. Par conséquent, il est parfaitement naturel que l'analyse et le calcul des phénomènes transitoires dans les circuits électriques non linéaires soient souvent bien plus compliqués que pour les circuits linéaires.

On connaît plusieurs méthodes et modes de calcul différents des phénomènes transitoires se déroulant dans les circuits non linéaires. Dans ce chapitre nous allons examiner seulement ceux d'entre eux qui présentent le plus grand intérêt.

Les méthodes d'analyse et de calcul des phénomènes transitoires dans les circuits non linéaires, examinées ci-dessous, peuvent être classées de la manière suivante:

1. suivant la nature des principales opérations qu'il faut exécuter pour intégrer les équations différentielles non linéaires: en méthodes graphiques (grapho-analytiques) et analytiques;
2. suivant la nature de la grandeur pour laquelle on effectue le calcul: en calculs des valeurs instantanées des courants et des tensions et en calculs des valeurs instantanées des enveloppes des courants et des tensions.

Nous appellerons par convention « méthodes de calcul graphiques (grapho-analytiques) » celles dans lesquelles les opérations principales, exécutées pour déterminer les courants et les tensions cherchés en fonction du temps, sont des constructions graphiques, souvent accompagnées par certains calculs numériques auxiliaires.

Il y a lieu de préciser que dans les méthodes graphiques (grapho-analytiques) de calcul, les caractéristiques des résistances non linéaires n'ont pas besoin d'être exprimées analytiquement.

Les méthodes graphiques suivantes seront examinées dans ce chapitre:

1. Méthode basée sur le calcul graphique d'une intégrale définie (§ 363).
2. Méthode de Volynkine (§ 366).

On appelle méthodes analytiques de calcul celles dans lesquelles l'opération essentielle, lors de la détermination des courants et des tensions cherchés en fonction du temps, est l'intégration analytique précise ou approchée des équations différentielles du circuit; on substitue dans ces équations les expressions analytiques des caractéristiques des résistances non linéaires.

Nous examinerons ci-dessous les méthodes analytiques suivantes:

1. Méthode d'approximation non linéaire intégrale (§ 364).
2. Méthode d'approximation linéaire par morceaux (§ 365).
3. Méthode d'amplitudes variant lentement (§ 368).

Les méthodes graphiques ont les avantages suivants sur les méthodes analytiques:

1. Elles ne demandent pas en général d'exprimer analytiquement les caractéristiques des résistances non linéaires et, par conséquent, elles sont exemptes des erreurs liées à la représentation analytique des caractéristiques des résistances non linéaires.
2. Elles permettent de tenir compte assez simplement de l'hystérésis et d'autres fonctions non linéaires compliquées.

A leur tour les méthodes analytiques comportent certains avantages par rapport aux méthodes graphiques.

Leur avantage principal est la possibilité d'obtenir une solution sous une forme générale et non pas pour une combinaison concrète des paramètres seulement. Il est souvent désirable d'obtenir une solution sous sa forme générale, car l'analyse de cette solution permet de se rendre compte de toutes les particularités du phénomène en cas de variation de tous ses paramètres.

Comme nous l'avons déjà indiqué, toutes les méthodes de calcul peuvent être subdivisées en deux sous-groupes suivants: le calcul d'après les valeurs instantanées des courants et des tensions et le calcul d'après les valeurs instantanées des enveloppes des courants et des tensions.

Le calcul suivant les enveloppes est très important, car il permet de se rendre compte de la macrostructure du phénomène sans entrer dans les détails de ces variations pendant chaque période de la F.E.M. périodique agissant sur le circuit ou pendant chaque période des auto-oscillations dans un système oscillant.

Evidemment, le calcul suivant les enveloppes est possible non seulement pour les circuits non linéaires; il présente un intérêt certain pour les circuits linéaires également.

D'autre part, la précision du calcul suivant les enveloppes est moindre, que celle du calcul suivant les valeurs instantanées. Cependant la rapidité relative des calculs suivant les enveloppes et la possibilité de se rendre compte de la macrostructure du phénomène sont souvent les facteurs décisifs du choix de cette méthode.

Il est en général rationnel, chaque fois que ceci est nécessaire de compléter le calcul suivant les enveloppes par le calcul suivant les valeurs instantanées.

La méthode de calcul suivant les enveloppes est représentée ici par la méthode des amplitudes variant lentement (voir § 368). Toutes les autres méthodes se rapportent au sous-groupe de calcul suivant les valeurs instantanées.

Il arrive souvent que les circuits électriques comportent plusieurs résistances non linéaires. Les phénomènes transitoires dans ces circuits peuvent être calculés en utilisant la méthode de Volynkine (voir § 366).

§ 363. Méthode de calcul des phénomènes transitoires dans les circuits non linéaires, basée sur le calcul graphique d'une intégrale définie. Cette méthode est applicable aux circuits électriques pouvant être exprimés par des équations différentielles du premier ordre, permettant la séparation des variables. Cette dernière réserve est très importante. Elle indique que la méthode est applicable aux circuits à courant continu et n'est pas applicable en général aux circuits à courant variable.

Les méthodes fondamentales et l'ordre des opérations de calcul seront expliqués à l'aide de l'exemple concret suivant.

Exemple 172. Soit un condensateur non linéaire branché à une source de tension U par l'intermédiaire de la résistance R (fig. 377). La caractéristique charge-tension de ce condensateur est donnée sous forme d'une courbe (fig. 378). En supposant que les conditions initiales de ce circuit sont nulles, construire les courbes de la charge q, de la tension aux bornes de la capacité u_C et du courant i en fonction du temps.

S o l u t i o n. Ecrivons l'équation différentielle du circuit

$$u_C(q) + R\frac{dq}{dt} = U.$$

Séparons les variables

$$dt = R\frac{dq}{U - u_C(q)} \qquad (C.1)$$

où

$$dt = RF(q)\,dq.$$

La fonction

$$F(q) = \frac{1}{U - u_C(q)} \qquad (C.2)$$

(fig. 379) est construite en partant de la caractéristique charge-tension. A cette fin, prenons des valeurs arbitraires de q, à l'aide de la caractéristique charge-tension trouvons les valeurs correspondantes de u_C et calculons $F(q)$ suivant de l'expression (B.2).

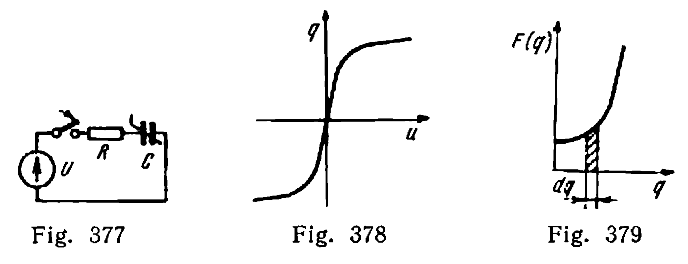


Fig. 377 Fig. 378 Fig. 379

Pour $q = 0$ $u_C = 0$ et $F(q) = \frac{1}{U}$; pour $u_C = U F(q) = \infty$. Intégrons le premier membre de l'équation (C.1) par rapport à t, de 0 jusqu'à la valeur courante de t et intégrons le second membre par rapport à q, de $q = 0$ à la valeur courante de q. Nous obtenons

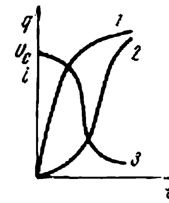


Fig. 380

$$t = R\int_0^q F(q)\,dq. \qquad (C.3)$$

L'expression $F(q)\,dq$, sous le signe d'intégration, correspond à l'aire hachurée de la fig. 379.

Conformément à l'équation (C.3) pour calculer le temps t, correspondant à une valeur quelconque concrète de q, il faut déterminer l'aire exprimée par l'intégrale définie $\int_0^q F(q)\,dq$ et la multiplier par la résistance R.

La courbe 1 de la fig. 380 représente qualitativement q en fonction de t. A l'aide de cette courbe et de la caractéristique charge-tension de la capacité non linéaire utilisée on construit la fonction $u_C = f(t)$, représentée par la courbe 2 de la fig. 380.

Le courant dans le circuit en un instant arbitraire quelconque est calculé à l'aide de l'expression

$$i = \frac{U - u_C}{R}.$$

La courbe 3 de la fig. 380 représente qualitativement $i = f(t)$.

§ 364. **Calcul des phénomènes transitoires dans les circuits non linéaires par la méthode d'approximation non linéaire intégrable.** Cette méthode repose sur l'approximation de la caractéristique de la résistance non linéaire par une fonction non linéaire, qui doit répondre aux conditions suivantes: elle doit représenter en premier lieu avec une précision suffisante la caractéristique de la résistance non linéaire dans l'intervalle prévu de déplacement du point figuratif sur cette caractéristique; deuxièmement, et c'est essentiel du reste, elle doit permettre d'intégrer exactement l'équation écrite en fonctions connues.

Cette méthode est intéressante, car elle permet d'obtenir à la suite de l'intégration la valeur cherchée en fonction du temps et de tous les paramètres du circuit.

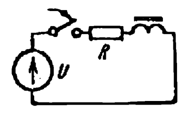


Fig. 381

Elle est applicable aux équations différentielles du premier ordre, ainsi qu'aux équations pouvant être ramenées aux équations de premier ordre par changement des variables.

E x e m p l e 173. Déterminer la loi d'accroissement du courant i en fonction du temps lors de l'enclenchement de l'interrupteur du circuit de la fig. 381. On admet que le courant i, en fonction du flux magnétique total ψ de l'inductance non linéaire, puisse être exprimée par la formule $i = k\psi^4$. Les conditions initiales du schéma sont nulles.

S o l u t i o n. Ecrivons l'équation différentielle du circuit

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = U$$

de la manière suivante:

$$dt = \frac{d\psi}{U - Ri}.$$

Mettons R en facteur au dénominateur et substituons $k\psi^4$ à i:

$$dt = \frac{1}{R}\,\frac{d\psi}{I_{per} - k\psi^4}$$

$$\text{Ici } I_{per} = \frac{U}{R}.$$

Posons $I_{per} = a^2$ et substituons ψ_1^4 à $k\psi^4$ et $\frac{d\psi_1}{\sqrt[4]{k}}$ à $d\psi$. Nous obtenons

$$dt = \frac{1}{R\sqrt[4]{k}}\,\frac{d\psi_1}{a^2 - \psi_1^4};$$

$$\frac{1}{a^2 - \psi_1^4} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a - \psi_1^2} + \frac{1}{a + \psi_1^2}\right);$$

$$\int \frac{dx}{a - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{a}}};$$

$$\int \frac{dx}{a + x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}$$

Par conséquent,

$$t = \frac{1}{2I_{per}^{\frac{3}{4}} Rk^{\frac{1}{4}}}\left(0,5 \ln \frac{1 + \sqrt[4]{\frac{i}{I_{per}}}}{1 - \sqrt[4]{\frac{i}{I_{per}}}} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt[4]{\frac{i}{I_{per}}}\right). \qquad \text{(C. 4)}$$

On peut, à l'aide de (C.4), calculer la valeur du temps nécessaire pour que le rapport $\frac{i}{I_{per}}$ atteigne la valeur désirée.

§ 365. Méthode de calcul des phénomènes transitoires dans les circuits non linéaires, basée sur la substitution à la caractéristique de la résistance non linéaire des segments de droites (méthode d'approximation linéaire par morceaux). La substitution à la caractéristique d'une résistance non linéaire de segments de droites permet de passer d'une équation différentielle non linéaire à plusieurs équations linéaires, ne différant l'une de l'autre que par des coefficients.

Chacune de ces équations linéaires est satisfaite seulement pour l'intervalle du temps au cours duquel le point de fonctionnement se déplace le long du tronçon linéarisé considéré. Cette méthode est applicable aux circuits comprenant des sources de F.E.M. continues et/ou sinusoïdales, ainsi qu'aux circuits de premier ordre et d'ordres supérieurs.

La difficulté principale de calcul par cette méthode pour les circuits non linéaires compliqués, comprenant une source (des sources) de F.E.M. sinusoïdale, consiste dans la détermination des constantes d'intégration et du temps de fonctionnement pour chaque tronçon linéaire, en partant des lois de la commutation. Dans les circuits compliqués les inconnues sont calculées habituellement à l'aide d'équations transcendantes. Pour résoudre les équations transcendantes on a recours souvent aux calculatrices.

Examinons les étapes principales de ce calcul à l'aide d'un exemple simple.

E x e m p l e 174. Soit un condensateur chargé à travers une résistance non linéaire par une source de tension continue U (fig. 382, *a*). Déterminer la loi de variation du courant dans ce circuit au cours de la charge.

Fig. 382

S o l u t i o n. Remplaçons la caractéristique courant-tension de la résistance non linéaire par deux segments de droites (fig. 382, *b*). Soit pour le tronçon allant de $i=0$ à $i=i_1$

$$u_{RNL}=k_2 i,$$

où u_{RNL} — tension aux bornes de la résistance non linéaire.

Pour le tronçon $i>i_1$

$$u_{RNL}=U_0+k_1 i.$$

Les dimensions des coefficients k_1 et k_2 sont celles d'une résistance.

Dans l'équation du circuit

$$u_C+u_{RNL}=U.$$

Substituons $\frac{1}{C}\int i\,dt$ à u_C; pour le premier tronçon substituons à u_{RNL} — $U_0+k_1 i$ et pour le deuxième tronçon, substituons-lui $k_2 i$.

Au cours de la charge du condensateur le courant va décroître progressivement de sa valeur maximale à zéro. Par conséquent, le point figuratif va se déplacer d'abord le long du premier tronçon et, ensuite, le long du deuxième. Nous avons pour le premier tronçon

$$\frac{1}{C}\int i\,dt+U_0+k_1 i=U.$$

et pour le deuxième tronçon

$$\frac{1}{C}\int i\,dt+k_2 i=U.$$

La solution pour le premier tronçon

$$i=i_f+i_e=0+A_1 e^{-\frac{t}{k_1 C}}.$$

Trouvons la constante d'intérgation en partant des conditions initiales: pour $t = 0$ $u_C = 0$, et par conséquent,

$$U_0 + k_1 i_1 (0_+) = U;$$

$$i_1 (0_+) = \frac{U - U_0}{k_1} = A_1.$$

Donc au cours du fonctionnement le long du premier tronçon

$$i = \frac{U - U_0}{k_1} e^{-\frac{t}{k_1 C}}. \tag{C.5}$$

Admettons que pour $t = t_1$ le courant i devient égal à i_1. Substituons i_1 à i dans (C.5) et t_1 à t et résolvons par rapport à t_1 l'équation ainsi obtenue

$$t_1 = k_1 C \ln \frac{U - U_0}{k_1 i_1}. \tag{C.6}$$

A partir de t_1 la charge s'effectue le long du deuxième tronçon; on a alors $i = A_2 e^{-\frac{(t - t_1)}{k_2 C}}$, et $A_2 = i_1$.

* * *

Dans la pratique nous avons souvent affaire à un régime transitoire se déroulant dans un transformateur en marche à vide (à enroulement secondaire ouvert)

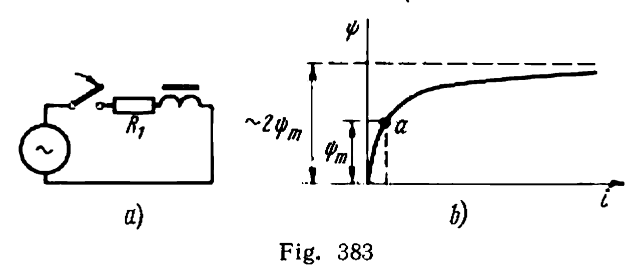


Fig. 383

ou dans une inductance non linéaire branchée à une source de F.E.M. sinusoïdale $E_m \sin (\omega t + \psi)$ (fig. 383, *a*). Examinons ce problème au point de vue qualitatif.

Si la résistance active R_1 de l'enroulement primaire du transformateur est faible et si l'amplitude de la valeur permanente du flux magnétique total $\psi_m = \frac{E_m}{\omega}$ se trouve à proximité du point *a* (fig. 383, *b*) on a dans le circuit à l'instant d'enclenchement de l'interrupteur, lorsque la F. E. M. $E_m \sin (\omega t + \psi)$ passe par zéro, des pointes de courant très importantes, fugitives. Ces pointes peuvent être de 20 à 50 fois et même davantage plus grandes que l'amplitude du courant à vide du transformateur.

Au point de vue physique, ces pointes apparaissent du fait qu'à la fin de la première alternance $\left(\frac{2\pi}{2\omega}\right)$, après l'enclenchement, le flux magnétique total atteint une valeur très voisine de $2\psi_m$.

On voit sur la courbe de la fig. 383, *b* que si $\psi \approx 2\psi_m$ le courant dans le circuit est très grand, beaucoup de fois supérieur au courant pour $\psi = \psi_m$.

Bien que ces pointes de courant soient de très courte durée, elles sont indésirables dans les systèmes, comprenant des transformateurs puissants et nécessitent des précautions spéciales pour éliminer leurs conséquences néfastes.

§ 366. Bases du calcul des phénomènes transitoires dans les circuits non linéaires par substitution d'une somme approximative à l'intégrale définie. Il résulte du cours de mathématiques, qu'en subdivisant l'intervalle d'intégration $(b - a)$ dans

l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ en n parties égales et en désignant par a, $y_0, y_1, y_2 \ldots, y_n$ les valeurs de la fonction $f(x)$ pour $x_0 = a$, $x_1 = a + h$; $x_2 = a + 2h$, etc. respectivement, où $h = \frac{b-a}{n}$, on a

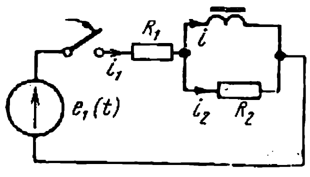


Fig. 384

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + 2y_n). \tag{C.7}$$

Examinons cette méthode en prenant le circuit de la fig. 384 comme exemple. Ce circuit comprend une inductance non linéaire et les résistances R_1 et R_2. La valeur de ψ en fonction de i pour l'inductance non linéaire est donnée par la courbe de la fig. 385. Supposons que la F.E.M. $e_1(t)$ ait la forme représentée sur la fig. 386.

Désignons les courants dans les branches conformément à la fig. 384. Ecrivons les équations suivant les lois de Kirchhoff:

$$i_1 = i + i_2;$$

$$i_2 = \frac{1}{R_2}\frac{d\psi}{dt}; \quad i_1R_1 + \frac{d\psi}{dt} = e_1(t).$$

D'où

$$\frac{d\psi}{dt} + i\,\frac{R_1}{1+\frac{R_1}{R_2}} = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}}\,e_1(t). \tag{C.8}$$

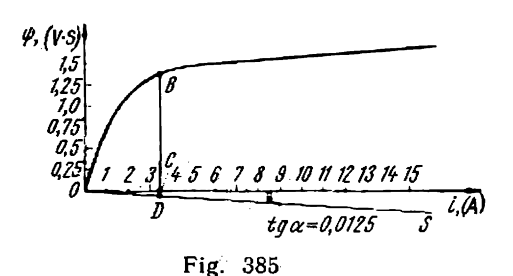


Fig. 385

Fig. 386

Pour simplifier les écritures désignons:

$$R = \frac{R_1}{1+\frac{R_1}{R_2}}, \qquad e(t) = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}}\,e_1(t).$$

Alors l'équation du circuit peut s'écrire comme suit:

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = e(t). \tag{C.9}$$

Subdivisons le temps t en des intervalles égaux τ ($t = n\tau$); nous aurons alors à la place de $\frac{b-a}{2n}$:

$$\frac{n\tau - 0}{2n} = \frac{\tau}{2}.$$

Intégrons successivement (C.9) de $t = 0$ à $t = \tau$ et, ensuite, de $t = 0$ à $t = 2\tau$, etc. et utilisons la formule du trapèze.

Nous obtenons pour le premier intervalle:

$$\psi_1 - \psi_0 + R \int_0^\tau i\,dt = \int_0^\tau e(t)\,dt,$$

mais nous avions, suivant (C.7)

$$\int_0^\tau i\,dt = \frac{\tau}{2} i_1.$$

Par conséquent,

$$\psi_1 + \frac{R\tau}{2} i_1 = \psi_0 + \int_0^\tau e(t)\,dt, \qquad \text{(C.10)}$$

où ψ_0 est le flux magnétique total résiduel. Nous supposerons par la suite qu'il soit nul.

Pour $t = 2\tau$

$$\psi_2 + R \int_0^{2\tau} i\,dt = \int_0^{2\tau} d(t)\,dt,$$

mais suivant (C.7)

$$\int_0^{2\tau} i\,dt = \frac{\tau}{2}(2i_1 + i_2).$$

Par conséquent, pour $t = 2\tau$

$$\psi_2 + \frac{R\tau}{2} i_2 = \int_0^{2\tau} e(t)\,dt - R\tau i_1. \qquad \text{(C.11)}$$

Et pour $t = n\tau$

$$\psi_n + \frac{R\tau}{2} i_n = \int_0^{n\tau} e(t)\,dt - R\tau \sum_{k=1}^{k=n-1} i_k. \qquad \text{(C.12)}$$

L'équaiton (C.12) permet de trouver successivement i_1, i_2, i_3, etc. Le courant inconnu i_n fait partie de son premier membre ainsi que le flux magnétique total correspondant ψ_n, tandis que la valeur $\sum i_k$, figurant dans son second membre est connue à la suite des calculs pour les intervalles de temps qui précèdent.

L'ordre des opérations à effectuer est suivant:

1. En partant de $e(t)$ construisons la courbe $\int_0^{n\tau} e(t)\,dt$ (fig. 387).

2. Sur la figure, où est représentée la courbe $\psi = f(i)$ (voir fig. 385), traçons sous un angle α avec l'axe des abscisses, la droite OS de manière que la tangente de cette angle soit égale à $\frac{R\tau}{2}$.

3. La valeur de i_1 est trouvée à partir de l'équation (C.10). A cette fin prenons la valeur de $\int_0^\tau e(t)\,dt$ en utilisant la fig. 387. Supposons qu'elle soit égale au segment $11'$. Transportons ce segment sur la fig. 385 et déplaçons-le parallèlement

à l'axe des ordonnées jusqu'à ce que l'une de ses extrémités atteigne la courbe $\psi(i)$, au point B, et que son autre extrémité se trouve sur la droite OS au point D. Dans ces conditions le segment BC est égal à ψ_1, et le segment CD est égal à $\frac{R\tau}{2} i_1$.

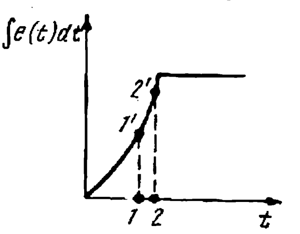


Fig. 387

4. Le courant i_2 est trouvé d'une manière identique, à ceci près que, conformément à l'équation (C.11), il faut commencer par soustraire $R\tau i_1$ de $\int_0^{2\tau} e(t)\,dt$, égale au tronçon $22'$ et ne déplacer qu'ensuite le segment ainsi obtenu parallèlement à l'axe des ordonnées.

5. Pour calculer i_3 il faut soustraire $R\tau(i_1 + i_2)$ de $\int_0^{3\tau} e(t)\,dt$, etc.

Si $e(t)$ est une fonction périodique de période T il est recommandé de prendre

$$\tau = \left(\frac{1}{18} \text{ à } \frac{1}{36}\right) T.$$

Si $e(t)$ est une fonction non périodique, la valeur de τ doit être choisie par tâtonnement.

Examinons un exemple numérique.

E x e m p l e 175. Soit pour le circuit de la fig. 384 $R_1 = R_2 = 2\Omega$. La fonction $\psi = f(i)$ est représentée par la courbe de la fig. 385.

Dans l'intervalle entre $t = 0$ et $t = 0{,}1$ s $e(t) = 400\,t$, ensuite $e(t) = 0$. Construire la courbe $i = f(t)$ en supposant les conditions initiales nulles et le flux magnétique total résiduel $\psi_0 = 0$.

S o l u t i o n. Prenons l'intervalle de temps $\tau = 0{,}025\,s$. Résumons les résultats du calcul dans le tableau suivant:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n\tau$	0,025	0,05	0,075	0,10	0,125	0,15	0,175	0,2
$\int_0^{n\tau} e(t)\,dt$	0,125	0,5	1,13	2	2	2	2	2
$\frac{R_1\tau}{1+\frac{R_1}{R_2}} \sum_{k=1}^{n-1} i_k$	0	0,004	0,01	0,057	0,45	0,565	0,645	0,715
$\int_0^{n\tau} e(t)\,dt - \frac{R_1\tau}{1+\frac{R_1}{R_2}} \sum_{k=1}^{n-1} i_k$	0,125	0,496	1,12	1,943	1,55	1,435	1,355	1,285
i_n	0,16	0,24	1,85	15,7	4,6	3,2	2,76	2,36

En partant des données de ce tableau on a construit sur la fig. 387 la courbe

$$\int e(t)\,dt = f(t)$$

ainsi que la courbe

$$i = f(t)$$

sur la fig. 388.

§ 367. Calcul des phénomènes transitoires dans les circuits à plusieurs résistances non linéaires. La méthode décrite ci-dessus peut être appliquée également aux circuits à plusieurs résistances non linéaires, de même qu'aux circuits, pouvant être représentés par des équations du second ordre, du troisième et d'ordre supérieur.

Examinons à titre d'exemple les phénomènes transitoires dans le circuit le plus simple, à deux résistances non linéaires.

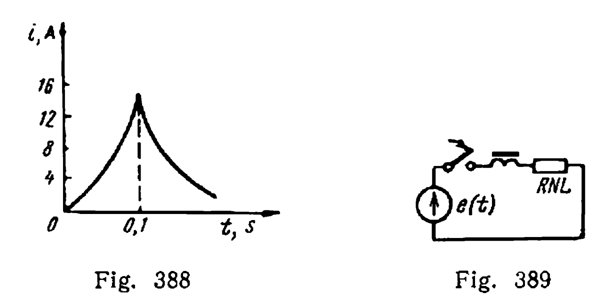


Fig. 388 Fig. 389

On branche en série avec la source de la F.E.M. $e(t)$, du circuit de la fig. 389, une inductance non linéaire (dont la valeur de ψ est donnée en fonction de i et une résistance active non linéaire à caractéristique courant-tension $u_R = f(i)$ donnée. Intégrons l'équation de ce circuit

$$\frac{d\psi}{dt} + u_R(i) = e(t)$$

par rapport à t, de 0 à $t = n\tau$.

N'oublions pas que

$$\int_0^{n\tau} u_R(i)\,dt = \frac{\tau}{2}\left[2u_R(i_1) + 2u_R(i_2) + \ldots + 2u_R(i_{n-1}) + u_R(i_n)\right].$$

Nous obtenons une expression analogue à (C.12):

$$\psi_n + \frac{\tau}{2} u_R(i_n) = \int_0^{n\tau} e(t)\,dt - \tau \sum_{k=1}^{k=n-1} u_R(i_k). \tag{C.13}$$

L'ordre des opérations à exécuter conformément à (C.13) est le même que pour l'expression (C.12). La seule différence est qu'au lieu de la droite $\frac{\tau R i}{2}$ (droite OS de la fig. 385) il faut tracer sur la fig. 385 la courbe $\frac{\tau}{2} u_R(i)$.

§ 368. **Méthode des amplitudes variant lentement.** La méthode de calcul des phénomènes transitoires, appelée habituellement « méthode des amplitudes variant lentement », est très largement utilisée en électrotechnique, radiotechnique et en d'autres domaines de la technique.

Exposons les bases de cette méthode en examinant un circuit non linéaire de second ordre sur lequel agit une force perturbante périodique.

Soit l'équation de ce circuit

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A\sin\omega t. \qquad \text{(C.14)}$$

On sait en outre que dans ce circuit, sous l'effet d'une force périodique à fréquence ω, s'établit une oscillation forcée à fréquence ω et que les harmoniques supérieurs n'y sont représentés que faiblement. Admettons que la fonction cherchée $x(t)$ puisse être écrite comme suit:

$$x=a\sin\omega t+b\cos\omega t\,; \qquad \text{(C.15)}$$

ici a et b sont les amplitudes de l'oscillation cherchée, variant lentement en fonction du temps.

Le caractère lent des variations de a et b en fonction du temps découle du fait que leurs dérivées par rapport au temps sont des infiniment petits du premier ordre par rapport à ωa et ωb:

$$\frac{da}{dt}\ll\omega a \text{ et } \frac{db}{dt}\ll\omega b. \qquad \text{(C.16)}$$

Si on en tient compte, on peut, au lieu de prendre $\frac{dx}{dt}$ égal à

$$\frac{dx}{dt}=a\omega\cos\omega t-b\omega\sin\omega t+\sin\omega t\frac{da}{dt}+\cos\omega t\frac{db}{dt}, \qquad \text{(C.17)}$$

écrire en première approximation:

$$\frac{dx}{dt}\approx a\omega\cos\omega t-b\omega\sin\omega t. \qquad \text{(C.18)}$$

De même, au lieu de prendre la seconde dérivée sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}\approx-\omega^2a\sin\omega t-\omega^2b\cos\omega t+\omega\cos\omega t\frac{da}{dt}-\omega\sin\omega t\frac{db}{dt}+$$
$$+\frac{d^2a}{dt^2}\sin\omega t+\frac{d^2b}{dt^2}\cos\omega t+\omega\cos\omega t\frac{da}{dt}-\omega\sin\omega t\frac{db}{dt},$$

on peut y négliger les termes du second ordre et n'y laisser que les termes de premier ordre. Nous obtenons ainsi:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\approx-\left(\omega^2a+2\omega\frac{db}{dt}\right)\sin\omega t+\left(-\omega^2b+2\omega\frac{da}{dt}\right)\cos\omega t. \qquad \text{(C.19)}$$

Il y a lieu de remarquer que les termes de premier ordre sont conservés dans l'expression de $\frac{d^2x}{dt^2}$, mais qu'ils sont négligés dans l'expression de $\frac{dx}{dt}$.

Ceci s'explique par les faibles pertes du circuit examiné, d'où il résulte que l'amplitude du deuxième terme du premier membre de l'équation (C.14) est relati-

vement faible par rapport aux amplitudes des premier et troisième termes du premier membre de cette équation.

Substituons ensuite (C.15) à x dans la fonction $f(x)$ et développons $f(x)$ en série de Fourier. Ceci fait, multiplions la série de Fourier de $f(x)$ par $\frac{dx}{dt}$ (par le second membre de l'expression C.18). Nous obtenons ainsi:

$$f(x)\frac{dx}{dt}=F_0(a, b)+F_1(a, b)\sin\omega t+F_2(a, b)\cos\omega t+$$
$$+F_3(a, b)\sin 2\omega t+F_4(a, b)\cos 2\omega t+\ldots \qquad (C.20)$$

Du fait que le calcul est effectué suivant le premier harmonique, on peut négliger par la suite la composante continue $F_0(a, b)$, ainsi que les harmoniques supérieurs de la série de Fourier [c.-à-d. $F_3(a, b)$, $F_4(a, b)$].

Dans (C.14) substituons le second membre de (C.19) à $\frac{d^2x}{dt^2}$ et écrivons à la place de $f(x)\frac{dx}{dt}$

$$F_1(a, b)\sin\omega t+F_2(a, b)\cos\omega t.$$

Enfin substituons à $\omega_0^2 x$

$$\omega_0^2(a\sin\omega t+b\cos\omega t).$$

Alors l'équation (C.14) se scinde en deux équations. L'une d'elles, l'équation (C.21), exprime l'égalité des coefficients de $\sin\omega t$ des premier et second membres de l'équation (C.14), et l'autre, l'équation (C.22), l'égalité des coefficients de $\cos\omega t$ des premier et second membres de l'équation (C.14):

$$-2\omega\frac{db}{dt}+F_1(a, b)+a(\omega_0^2-\omega^2)=A; \qquad (C.21)$$

$$2\omega\frac{da}{dt}+F_2(a, b)+b(\omega_0^2-\omega^2)=0. \qquad (C.22)$$

Les équations (C.21) et (C.22) constituent un système de deux équations différentielles, écrites par rapport aux valeurs instantanées des amplitudes a et b variant lentement.

Dans le cas général le système (C.21), (C.22) peut être résolu par les méthodes d'intégration numérique ou à l'aide de la méthode de Volynkine. Dans le cas particulier où la force périodique perturbante est nulle ($A=0$) et la fonction $F_1(a, b)=0$, le système se réduit à une équation différentielle de premier ordre:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{F_2(a)}{2\omega}; \qquad (b=0). \qquad (C.23)$$

Nous avons examiné déjà les étapes principales de passage d'une équation différentielle pour les valeurs instantanées [équation (C.14)] aux équations différentielles pour les amplitudes variant lentement. Cette méthode est applicable également aux équations plus compliquées.

Il y a lieu de dire en conclusion que si la valeur maximale du terme $f(x)\frac{dx}{dt}$ dans l'équation (C.14) (et dans des équations similaires) exprimant la chute de tension dans la résistance active du circuit (ou des circuits) est de même ordre de grandeur que les valeurs maximales des autres termes de l'équation (C.14), il faut maintenir dans l'expression $\frac{dx}{dt}$ les termes de premier ordre, que nous avons négligés

précédemment. L'enveloppe des oscillations est exprimée par l'équation $f(t) = \sqrt{a^2(t)+b^2(t)}$.

Exemple 176. Déterminer la loi de l'accroissement des amplitudes des oscillations de tension à la grille du générateur à lampes du § 239.

Solution. L'équation du générateur à lampes a été établie précédemment [voir (9.56)]. Reproduisons-la ci-dessous

$$LC\frac{d^2u_g}{dt^2}+RC\frac{du_g}{dt}+u_g-M\frac{di_a}{dt}=0.$$

A son tour le courant anodique i_a peut être exprimé en fonction de la tension grille u_g de la manière suivante:

$$i_a=i_{a0}+a'u_g-bu_g^3.$$

Comparez à l'équation (9.46), courbe en pointillé de la fig. 254.

La dérivée du courant anodique par rapport au temps s'écrit

$$\frac{di_a}{dt}=(a'-3bu_g^2)\frac{du_g}{dt}.$$

Substituons-la dans l'équation (9.56). Nous obtenons:

$$LC\frac{d^2u_g}{dt^2}+(RC-a'M+3bMu_g^2)\frac{du_g}{dt}+u_g=0.$$

Divisons cette dernière équation par $LC=\frac{1}{\omega_0^2}$, où ω_0 — fréquence angulaire des auto-oscillations [voir (9.61)] et désignons

$$k_1=\frac{Ma'-RC}{LC}; \quad \text{(C.24)}$$

$$k_2=\frac{3bM}{Ma'-RC}. \quad \text{(C.25)}$$

Nous avons alors

$$\frac{d^2u_g}{dt^2}-k_1(1-k_2u_g^2)\frac{du_g}{dt}+\omega_0^2u_g=0.$$

Prenons

$$x=u_g\sqrt{k_2}; \quad \frac{du_g}{dt}=\frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{dx}{dt};$$

$$\frac{d^2u_g}{dt^2}=\frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2}-k_1(1-x^2)\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0. \quad \text{(C.26)}$$

Le facteur $-k_1(1-x^2)$ représente justement la fonction $f(x)$ de l'équation (C.14).

Du fait qu'aucune force périodique extérieure n'agit pas sur le système et que la fréquence angulaire des auto-oscillations est égale à ω_0 et non pas à ω, nous pouvons écrire

$$x = a \sin \omega_0 t.$$

Alors

$$\frac{dx}{dt} \approx a\omega_0 \cos \omega_0 t, \tag{C.27}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx 2\omega_0 \frac{da}{dt} \cos \omega_0 t - \omega_0^2 a \sin \omega_0 t. \tag{C.28}$$

Substituons (C.27) et (C.28) dans (C.26). Etant donné que

$$\sin^2 \omega_0 t \cos \omega_0 t = \frac{1}{4} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t).$$

Nous obtenons

$$2\omega_0 \cos \omega_0 t \frac{da}{dt} - a\omega_0^2 \sin \omega_0 t + a\omega_0^2 \sin \omega_0 t - k_1 a\omega_0 \cos \omega_0 t +$$

$$+ \frac{k_1 \omega_0 a^3}{4} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) = 0.$$

Du fait que le calcul est effectué suivant le premier harmonique à variation lente, on peut négliger le terme à $\cos 3\omega_0 t$. Nous obtenons

$$2 \frac{da}{dt} = ak_1 (1 - 0{,}25a^2). \tag{C.29}$$

Introduisons une nouvelle variable:

$$y = 0{,}25a^2.$$

Nous aurons alors à la place de (C.29)

$$\frac{dy}{dt} = k_1 y (1 - y). \tag{C.30}$$

L'équation (C.30) est une équation à variables séparables

$$k_1 t = \int \frac{dy}{y(1-y)};$$

$$k_1 t = -\ln C_0 + \ln \frac{y}{1-y}.$$

Ici $-\ln C_0$ désigne la constante d'intégration

$$\frac{y}{1-y} = C_0 e^{k_1 t}; \quad y = \frac{C_0 e^{k_1 t}}{1 + C_0 e^{k_1 t}} = \frac{1}{1 + C_1 e^{-k_1 t}}.$$

$$C_1 = \frac{1}{C_0}; \quad a = 2\sqrt{y} = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1 e^{-k_1 t}}},$$

$$x = a \sin \omega_0 t = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1 e^{-k_1 t}}} \sin \omega_0 t.$$

L'amplitude de la tension aux bornes du condensateur varie comme suit en fonction du temps

$$U_C = \frac{a}{\sqrt{K_2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1 e^{-k_1 t}}} \sqrt{\frac{aM - RC}{3bM}} \tag{C.31}$$

La constante d'intégration C_1 est calculée à l'aide de la valeur initiale de l'amplitude de tension U_C. Donc si pour $t = 0$

$$U_C = U_C(0_-),$$

on a

$$C_1 = \frac{4}{U_C^2(0_-)} \frac{a'M - RC}{3bM} - 1.$$

La valeur instantanée de la tension aux bornes du condensateur

$$u_C = U_C \sin \omega_0 t = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1 e^{-k_1 t}}} \sqrt{\frac{a'M - RC}{3bM}} \sin \omega_0 t. \quad \text{(C.32)}$$

APPENDICE D

BASES DE LA THÉORIE DE STABILITÉ DES RÉGIMES DES CIRCUITS NON LINÉAIRES

§ 369. Introduction. Stabilité « locale » et stabilité « globale ». Stabilité suivant Liapounov. Le régime de fonctionnement d'un circuit électrique quelconque, comprenant des résistances non linéaires, peut être soit stable soit instable. En général le régime de fonctionnement de la très grande majorité des circuits électriques est stable, et ce n'est que dans des cas relativement rares qu'il est instable.

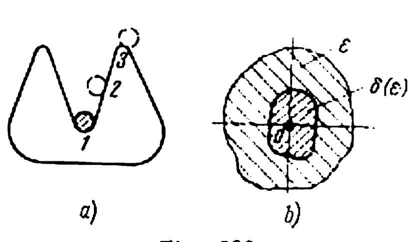


Fig. 390

On distingue la stabilité « locale » et la stabilité « globale ». On entend par régime stable « local » un régime pour lequel un écart suffisamment faible par rapport au régime initial (permanent) indépendamment des causes qui l'ont provoqué, décroît avec le temps et le système revient à son état initial.

Pour un régime de fonctionnement localement instable, un écart suffisamment faible augmente avec le temps et le système ne revient pas à son état initial.

On appelle régime globalement stable, un régime de fonctionnement pour lequel le système ayant subi un écart initial suffisamment grand revient à son état initial après la fin de l'effet perturbateur.

Si, pour un écart suffisamment grand de l'état initial et après la fin de l'effet perturbateur, le système ne revient pas à son état initial, on l'appelle système globalement instable.

La différence entre la stabilité locale et la stabilité globale peut être expliquée clairement à l'aide de la fig. 390, *a*. Ce dessin représente une rigole contenant une bille. Si on lance cette bille de manière qu'elle arrive à la position *2* et si ensuite on l'abandonne à elle-même, la bille revient sous l'effet de la force de pesanteur à sa position initiale *1* (position d'équilibre). Mais si on pousse cette bille avec une force plus grande, elle passe par la position *3* et s'échappe de la rigole. Ainsi, le système de la fig. 390, *a* est localement stable, mais globalement instable.

On rencontre également dans les ouvrages spécialisés l'expression « stabilité suivant Liapounov ». On appelle système stable suivant Liapounov, un système pour lequel on peut définir un domaine des écarts admissibles [domaine δ (ε) de la fig. 390, *b*] par rapport à l'état d'équilibre (du point 0), tel qu'aucun des mouvements, qui prennent naissance à l'intérieur de ce domaine δ ne peut sortir des limites d'un certain domaine déterminé ε.

La grandeur du domaine δ dépend de celle du domaine ε.

Dans les circuits électriques non linéaires les régimes (types de mouvement) suivants sont possibles en général: 1) état d'équilibre; 2) mouvement périodique en l'absence de sources de F.E.M. ou de courant périodiques dans le système, appelé état d'auto-oscillations; 3) mouvement périodique à la fréquence de la source de F.E.M. (ou de courant) périodique, appelé oscillations forcées; 4) phénomènes de résonance aux harmoniques supérieurs, inférieurs et fractionnels; 5) phénomènes quasi-périodiques, du type d'automodulation, ainsi qu'un certain nombre d'autres types de mouvements plus compliqués. Chacun de ces régimes (types de mouvement) peut être étudié au point de vue de la stabilité.

Pour la très grande majorité des problèmes pratiques on examine la stabilité locale. C'est ce problème qui sera examiné aux paragraphes suivants. L'étude de la stabilité globale se fait par analyse de l'allure des courbes intégrales dans le plan des phases ou en faisant appel à la deuxième méthode de Liapounov et ne sera pas discutée ici. Nous n'examinons pas non plus les méthodes d'étude de la stabilité suivant Liapounov.

§ 370. Principes fondamentaux de l'étude de la stabilité locale. Examinons les principes fondamentaux de l'étude de la stabilité locale. Ils sont applicables à tous, ou plus exactement, à presque tous les types de mouvements connus à l'heure actuelle. Evidemment, il peut y avoir dans chaque cas concret certaines particularités d'application des principes généraux. Nous parlerons de ces particularités aux paragraphes suivants.

Pour étudier la stabilité on fait subir à la grandeur x considérée (ou aux grandeurs) un faible accroissement Δx, on développe les équations décrivant le phénomène étudié en série des puissances de cet accroissement Δx, et Δx étant petit, on néglige tous les termes de la série contenant Δx à des puissances supérieures à la première.

Dans l'équation (ou les équations) ainsi obtenue on sépare les termes contenant Δx et les dérivées de Δx par rapport au temps et on forme à partir de ces termes une équation (des équations) différentielle par rapport à Δx. On donne à cette équation une forme algébrique, on obtient ainsi une équation caractéristique et on recherche ses racines.

Si une racine au moins de l'équation caractéristique (en présence de racines réelles) est positive ou si la partie réelle des racines complexes conjuguées est positive, ceci indique que l'accroissement Δx apparu ne diminue pas, mais augmente au contraire en fonction du temps.

En d'autres termes, le mouvement examiné est instable.

Si, par contre, toutes les racines de l'équation caractéristique sont négatives et si toutes les racines complexes conjuguées ont une partie réelle négative, le mouvement examiné est stable.

En présence d'une racine nulle et de racines purement imaginaires il ne suffit pas pour résoudre le problème de stabilité du mouvement de tenir compte seulement de la première puissance de l'accroissement Δx de la grandeur étudiée. Dans ce cas particulier il faut tenir compte également des quantités du second ordre par rapport à Δx. L'équation caractéristique écrite par rapport à l'accroissement Δx pour un système de deuxième ordre a la forme:

$$a_0p^2+a_1p+a_2=0.$$

Et pour un système de troisième ordre:

$$a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=0.$$

Plusieurs critères mathématiques ont été élaborés pour permettre de juger de la nature des racines de l'équation caractéristique. Utilisons à cette fin le critère de Hurwitz.

Le critère (le théorème) de Hurwitz s'énonce comme suit: pour que les parties réelles des racines de l'équation caractéristique

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}p^{n-1}+a_n=0$$

soient négatives, il est nécessaire et suffisant que tous les mineurs diagonaux (Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{n-1}) du déterminant de Hurwitz Δ_n soient positifs.

Le déterminant de Hurwitz:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \dots & & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}.$$

Par conséquent, les conditions nécessaires pour que les parties réelles des racines de l'équation caractéristique soient négatives s'expriment comme suit:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \text{ etc.}$$

Le déterminant de Hurwitz Δ_n lui-même s'établit comme suit:

1. On écrit suivant la diagonale principale du déterminant les coefficients dans l'ordre des indices croissants.

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

2. On inscrit dans la partie de chaque colonne, située au-dessus de la diagonale principale, les coefficients dans l'ordre des indices croissants.
3. On inscrit dans la partie de chaque colonne, située au-dessous de la diagonale principale, les coefficients dans l'ordre des indices décroissants (jusqu'à a_0 inclusivement).

Le lemme suivant découle du théorème de Hurwitz:

Tous les coefficients de l'équation caractéristique ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$) d'un système stable sont positifs.

Il résulte de ce qui vient d'être exposé que pour un système d'équations caractéristiques du second ordre, les racines réelles (ou les racines complexes conjuguées à partie réelle positive) seront positives lorsque l'un des coefficients quelconques de l'équation (a_0, a_1, a_2) est négatif. Pour un système à équations caractéristiques d'ordre trois, il y aura des racines réelles positives (ou des racines complexes conjuguées à partie réelle positive) lorsque: 1) l'un des coefficients quelconque (a_0, a_2, a_3) est négatif ou 2) lorsque $a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0$.

Des conclusions analogues peuvent être établies également pour les systèmes à équations caractéristiques d'ordres supérieurs.

Les coefficients $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ peuvent être négatifs dans les cas principaux suivants:

1. Lorsque le système, dont on étudie la stabilité, comprend des résistances actives non linéaires, à caractéristique, comprenant un tronçon tombant, et lorsque le point d'équilibre se trouve sur ce tronçon tombant.
2. Dans les systèmes où l'action du circuit de sortie sur le circuit d'entrée est très grande, autrement dit dans les circuits à réaction positive trop serrée. Dans ce cas l'énergie cédée par le circuit de sortie au circuit d'entrée est supérieure à l'énergie absorbée par le circuit d'entrée et l'accroissement Δx augmente.
3. Dans les circuits à inductances non linéaires contrôlables et à capacités non linéaires contrôlables, en présence de réactions agissant implicitement (ou même explicitement dans certains cas). Dans ces circuits les réactions donnent lieu dans certaines conditions déterminées à l'apparition de tronçons tombants dans les caractéristiques des inductances non linéaires ou des capacités non linéaires. Le régime de fonctionnement d'un tel système peut devenir instable, si le point figuratif arrive à se trouver sur le tronçon tombant de la caractéristique de l'inductance non linéaire contrôlable ou de la capacité non linéaire contrôlable.
4. Dans les circuits comprenant des résistances non linéaires à grande inertie thermique.

§ 371. Etude de la stabilité de la position d'équilibre des systèmes, soumis à une force agissante constante. Il existe deux particularités dans l'étude de la stabilité de la position d'équilibre des systèmes, soumis à une force agissante constante.

1. Les caractéristiques de toutes les résistances non linéaires sont habituellement remplacées par des segments de lignes droites, coïncidant avec les tangentes aux caractéristiques des résistances non linéaires au point d'équilibre.

2. Si le point d'équilibre d'un système à résistance active non linéaire, dont la caractéristique courant-tension a une forme en S ou en N, se trouve être dans le tronçon tombant de cette caractéristique, il faut dans l'étude de la stabilité de la position d'équilibre tenir compte des faibles paramètres « parasitaires » de la résistance non linéaire. Ces derniers ne jouent pas de rôle substantiel dans un phénomène permanent (stationnaire), mais pour un phénomène transitoire et surtout pour des phénomènes se déroulant très rapidement, leur rôle peut devenir important.

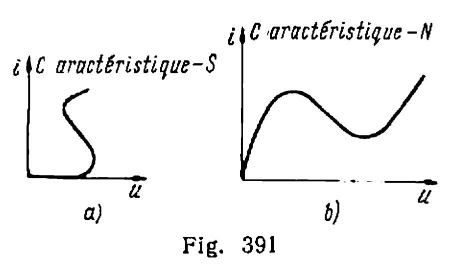


Fig. 391

L'expérience a montré qu'une résistance non linéaire à caractéristique courant-tension en forme de S (fig. 391, a) doit être représentée dans le schéma équivalent, utilisé pour l'étude de la stabilité, sous forme d'une résistance différentielle R_0 et d'une très faible inductance parasitaire L_p de la résistance non linéaire, couplées en série (fig. 392, d). Une résistance non linéaire, dont la caractéristique courant-tension a la forme de N (fig. 391, b), doit être représentée dans le schéma équivalent par une résistance différentielle R_0 couplée en parallèle avec la très faible capacité parasitaire C_p de la résistance non linéaire *.

Nous donnons au § 373 un exemple de l'étude de la stabilité de la position d'équilibre dans un système auto-oscillant à relaxation, comprenant une résistance non linéaire dont la caractéristique courant-tension a une forme en S.

Au § 374 nous donnons un exemple d'étude de la stabilité de l'équilibre d'un système auto-oscillant à réaction explicite.

§ 372. Etude de la stabilité des auto-oscillations et des oscillations forcées, suivant le premier harmonique. On utilise comme équations de départ dans l'étude de la stabilité des auto-oscillations et des oscillations forcées, les équations obtenues par la méthode des amplitudes à variations lentes (voir § 368).

Si on désigne par a et b les amplitudes variant lentement des composantes sinusoïdale et cosinusoïdale de l'oscillation examinée, on peut, en partant des équations initiales du système, obtenir les deux équations suivantes pour les amplitudes à variations lentes

$$\frac{da}{dt} = A(a,\ b)\ ; \tag{D.1}$$

$$\frac{db}{dt} = B(a,\ b). \tag{D.2}$$

Ici A et B sont des fonctions des amplitudes a et b, ainsi que des fonctions de tous les paramètres du circuit, de la fréquence angulaire des oscillations ω et de l'amplitude de la force appliquée. Désignons par a_0 et b_0 les valeurs de a et b en régime permanent (lorsque les amplitudes ne varient pas en fonction du temps). Pour calculer a_0 et b_0 il faut écrire dans les équations (D.1) et (D.2) que $\frac{da}{dt} = 0$

---

* Autrement dit, en tenant compte du paramètre « parasitaire », dont le rôle est particulièrement important dans la résistance non linéaire en cas d'un effet de basculement éventuel.

et $\frac{db}{dt}=0$ et résoudre le système d'équations suivant:

$$A(a_0,b_0)=0, \tag{D.3}$$

$$B(a_0,b_0)=0. \tag{D.4}$$

Supposons que, par suite d'une perturbation, les amplitudes des oscillations aient reçu de faibles accroissements Δa et Δb et soient devenues

$$a=a_0+\Delta a \text{ et } b=b_0+\Delta b.$$

Substituons ces valeurs de a et b dans (D.1) et (D.2), développons $A(a_0+\Delta a, b_0+\Delta b)$ et $B(a_0+\Delta a, b_0+\Delta b)$ en série de Taylor en Δa et Δb et limitons-nous au premier ordre. Nous obtenons ainsi:

$$A(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b)=A(a_0,\ b_0)+\Delta aA_1+\Delta bB_1; \tag{D.5}$$

$$B(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b)=B(a_0,\ b_0)+\Delta aA_2+\Delta bB_2. \tag{D.6}$$

Pour simplifier les écritures, nous avons désigné ici:

$$A_1=\left|\frac{\partial A(a,\ b)}{\partial a}\right|_{per};\quad B_1=\left|\frac{\partial A(a,\ b)}{\partial b}\right|_{per}; \tag{D.7}$$

$$A_2=\left|\frac{\partial B(a,\ b)}{\partial a}\right|_{per};\quad B_2=\left|\frac{\partial B(a,\ b)}{\partial b}\right|_{per}. \tag{D.8}$$

L'indice *per* rappelle qu'on doit substituer dans les dérivées partielles les valeurs de a et b en régime permanent, c.-à-d. a_0 et b_0.

Les coefficients A_1, B_1, A_2, B_2 sont des fonctions de a_0 et b_0, mais sont indépendants des accroissements Δa et Δb. Substituons les seconds membres des équations (D.5) et (D.6) dans les équations (D.1) et (D.2), tenons compte des équations (D.3) et (D.4) ainsi que de

$$\frac{d(a_0+\Delta a)}{dt}=\frac{d(\Delta a)}{dt} \text{ et } \frac{d(b_0+\Delta b)}{dt}=\frac{d(\Delta b)}{dt}.$$

Nous obtenons ainsi les deux équations suivantes:

$$\frac{d(\Delta a)}{dt}=A_1\Delta a+B_1\Delta b; \tag{D.9}$$

$$\frac{d(\Delta b)}{dt}=A_2\Delta a+B_2\Delta b. \tag{D.10}$$

Conférerons-leur une forme algébrique:

$$p\Delta a=A_1\Delta a+B_1\Delta b; \tag{D.9'}$$

$$p\Delta b=A_2\Delta a+B_2\Delta b. \tag{D.10'}$$

Ecrivons l'équation caractéristique

$$p^2+mp+q=0. \tag{D.11}$$

Ici

$$m=-(A_1+B_2); \tag{D.12}$$

$$q=A_1B_2-B_1A_2. \tag{D.13}$$

Conformément au critère de Hurwitz il faut, pour que Δa et Δb s'amortissent:

$$\left.\begin{aligned} m &> 0, \\ q &> 0. \end{aligned}\right\} \tag{D.14}$$

Dans les systèmes auto-oscillants, il n'existe pas en général de forces perturbatrices périodiques et, par conséquent, on peut prendre $b = 0$, c'est-à-dire représenter l'oscillation sous la forme $a(t) \sin \omega t$ (voir par exemple les auto-oscillations d'un générateur à lampes de l'exemple 176). Nous aurons alors au lieu de deux équations (D.1) et (D.2) une seule équation $\frac{da}{dt} = A(a)$. De même au lieu de deux équations (D.9) et (D.10) nous avons une seule (D.15):

$$\frac{d(\Delta a)}{dt} = A_1 \Delta a, \tag{D.15}$$

où

$$A_1 = \left| \frac{dA(a)}{da} \right|_{a=a_0}. \tag{D.16}$$

Pour que les auto-oscillations soient stables, il faut dans ce cas que la condition $A_1 < 0$ soit satisfaite.

Voir au § 364 un exemple d'étude de la stabilité des auto-oscillations à l'aide de l'expression (D.15).

Examinons maintenant deux exemples d'étude de la stabilité des régimes de fonctionnement.

Premier exemple: étude de la stabilité du régime d'équilibre dans un oscillateur à relaxation. Deuxième exemple: étude de la stabilité d'un mouvement périodique dans un générateur à lampes d'oscillations sinusoïdales.

§ 373. Oscillations à relaxation. Etude de la stabilité de la position d'équilibre dans un oscillateur à relaxation. Les oscillations à relaxation sont des auto-oscillations qui apparaissent dans certaines conditions dans les circuits électriques non

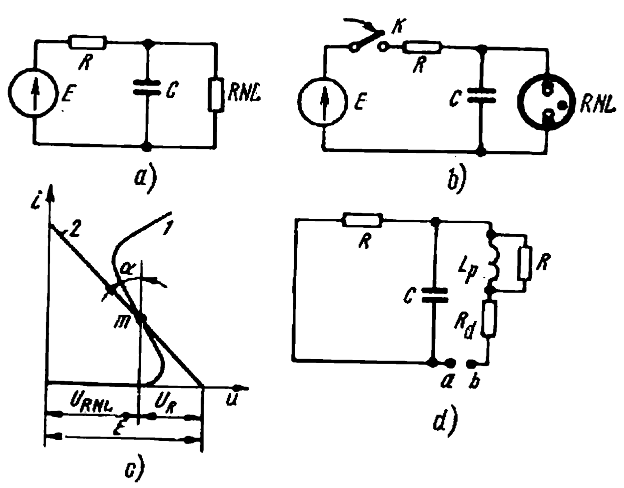


Fig. 392

linéaires à un seul accumulateur d'énergie, comme par exemple dans un circuit essentiellement capacitif (sans inductance) ou dans un circuit essentiellement inductif (sans capacité).

La fig. 392, *a* représente le schéma de principe d'un oscillateur à relaxation. Ce schéma comprend une source de F.E.M. continue E, une résistance linéaire R,

un condensateur C et une résistance non linéaire RNL couplée en parallèle avec ce condensateur, et dont la caractéristique courant-tension a une forme en S.

On peut prendre comme RNL, dont la caractéristique a la forme indiquée ci-dessus, une lampe à néon ou un thyratron. Le schéma d'un oscillateur, débitant sur une lampe à néon est représenté sur la fig. 392, *b*.

La courbe *1* de la fig. 392, *c* est la caractéristique courant-tension d'une lampe à néon, la droite *2* de la même figure est la caractéristique courant-tension de la résistance linéaire R.

En l'absence d'oscillations à relaxion le régime d'un tel circuit serait déterminé par le point m à l'intersection de la courbe *1* avec la droite *2*.

En ce point la somme des chutes de tensions aux bornes de RNL et de la résistance R est égale à la F.E.M. E, conformément à la deuxième loi de Kirchhoff.

Appelons le point m point d'équilibre. Il détermine le régime de fonctionnement du circuit lorsqu'un courant continu circule dans la résistance R et dans la lampe à néon.

Il est facile de se rendre compte que ce régime est instable: il suffit d'un écart infiniment petit de la position d'équilibre pour que le point représentatif quitte le point m et n'y revienne plus. Des oscillations à relaxation prennent alors naissance dans ce circuit.

Pour être sûr de l'instabilité de l'état d'équilibre, dressons le schéma équivalent linéaire d'un oscillateur à relaxion.

Du fait que la RNL a une caractéristique courant-tension en forme de S, cette résistance est simulée dans le schéma équivalent (conformément au § 371) par la résistance différentielle R_0 et par une inductance parasitaire infiniment petite L_p, branchée en série avec cette résistance.

Au point m la résistance différentielle R_∂ est proportionnelle à la tangente de l'angle α de la fig. 392, *c* et est une grandeur négative.

La source de F.E.M. n'est pas figurée dans le schéma équivalent (fig. 392, *d*), puisqu'on étudie le comportement du circuit en régime d'accroissements par rapport au régime déterminé par le point m.

Trouvons l'impédance d'entrée du circuit, écrite sous forme opérationnelle

$$Z(p)=R+\frac{\frac{1}{Cp}(R_\partial+pL_p)}{\frac{1}{Cp}+R_\partial+pL_p}.$$

L'équation caractéristique:

$$p^2+2bp+\omega^2=0,$$

où

$$b=\frac{L_p+RR_\partial C}{2RL_pC}\approx\frac{R_\partial}{2L_p} \quad \text{et} \quad \omega^2=\frac{R+R_\partial}{RL_pC},$$

a les racines suivantes:

$$p_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-\omega^2}.$$

Puisque

$$R_\partial<0, \text{ on a } b>0 \text{ également.}$$

Si le rapport entre les paramètres est tel que $b^2>\omega^2$ les deux racines sont réelles et positives.

Si $b^2<\omega^2$, les racines sont complexes conjuguées et ont une partie réelle positive.

Ainsi, indépendamment du rapport entre b^2 et ω^2 l'état d'équilibre déterminé par le point m est instable. Examinons maintenant la suite des changements d'états au cours des oscillations à relaxation.

Supposons qu'on ferme la clé K, contrôlant le circuit de la fig. 392, *b* lorsque les conditions initiales sont nulles. Le condensateur C commence à se charger et

la tension à ses bornes croît (fig. 392, *a*). Le condensateur et la lampe au néon LN étant branchés en parallèle, la tension à leurs bornes est la même, quel que soit le régime de fonctionnement.

Dès que la tension aux bornes du condensateur aura atteint une valeur égale à la tension d'amorçage u_{am} de la lampe à néon, cette dernière s'allume et le courant qui y circule augmente par saut de zéro à la valeur i_4 (fig. 393, *b*).

Le condensateur se décharge rapidement à travers la LN, dont la résistance interne est petite par rapport à celle de la résistance R. De ce fait le point figuratif se déplace sur la caractéristique courant-tension de la LN du point *4* au point *1*. Au point *1* la tension aux bornes de la LN est égale à la tension d'extinction u_{ex} de cette lampe et, par conséquent, cette dernière s'éteint et le courant qui la parcourt s'annule (point *2*). Ensuite le condensateur se charge à nouveau jusqu'à la tension u_{am}, la lampe à néon s'allume à nouveau et le phénomène se répète entièrement.

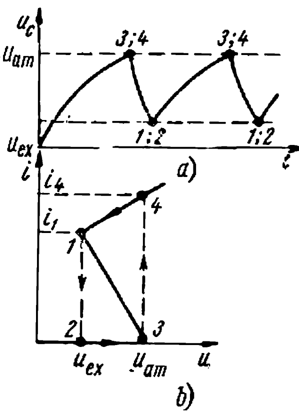


Fig. 393

La trajectoire du mouvement du point figuratif sur la fig 393, *b* est le circuit fermé *1234*.

Il y a lieu de souligner que si les conditions d'excitation des oscillations dans ce schéma sont satisfaites, l'amplitude des oscillations de la tension aux bornes de la capacité ne dépend pas de la valeur de la charge R, ni de la valeur de la F.E.M. E; elle dépend uniquement des tensions d'amorçage u_{am} et d'extinction u_{ex} de la LN. La période des oscillations est égale à la somme du temps de charge du condensateur et du temps de sa décharge. Elle dépend de la valeur de la F.E.M. E, de celle de la capacité C, de la résistance R et de la résistance interne de LN. La réaction existant dans ce circuit se manifeste par le contrôle exercé par le condensateur sur le régime de fonctionnement de la lampe à néon.

§ 374. Etude de la stabilité des oscillations sinusoïdales dans un générateur à lampes. Examinons maintenant le problème de la stabilité des oscillations sinusoïdales dans un générateur à lampes (fig. 270), à titre de deuxième exemple d'application de la théorie générale exposée au § 372. A cette fin utilisons les expressions (C.29) et (C.24).

Conformément à (D.16), la dérivée de l'amplitude des oscillations:

$$A(a)=\frac{da}{dt}=0,5\,ak_1(1-0,25\,a^2).$$

Désignons par a_0 l'amplitude des oscillations en régime permanent. Pour calculer a_0, écrivons que $\frac{da}{dt}$ est nulle et résolvons l'équation $1-0,25\,a_0^2=0$. On trouve $a_0=2$.

Conformément au § 372 il suffit, pour étudier la stabilité d'un mouvement périodique $a\sin\omega t$ dans un système auto-oscillant, non soumis à une force périodique extérieure de fréquence ω, de trouver le signe de la dérivée $\frac{dA(a)}{da}$, pour $a=a_0$. Si dans ces conditions $\frac{dA(a)}{da}$ est négative, le phénomène considéré est stable. Dans notre cas

$$\frac{dA(a)}{da}_{a=a_0=2}=0,5\,k_1(1-0,75\,a_0^2)=-k_1.$$

Nous avons déjà indiqué [voir (C.32)] que $a'M>RC$, et que $k_1>0$, car ce n'est qu'à cette condition que l'amplitude des oscillations est une grandeur réelle.

Par conséquent, $\frac{dA(a)}{da}_{a=a_0}<0$. Le phénomène est stable.

PLAN DE PHASE

§ 375. Définition du plan de phase et caractéristique sommaire des domaines de son application dans l'étude des phénomènes se déroulant dans les circuits non linéaires. L'étude qualitative de divers phénomènes se déroulant dans les circuits électriques, décrits par des équations différentielles de premier, et surtout de deuxième ordre, est réalisée dans un certain nombre de cas à l'aide du plan de phase.

On appelle plan de phase, un plan le long de l'axe des abscisses duquel on porte la valeur étudiée (appelons-la x) et le long de l'axe des ordonnées duquel la dérivée $\frac{dx}{dt}$ de la valeur étudiée (on désigne habituellement cette dernière par y).

Pour chaque problème concret on peut entendre par x le courant, la tension, la charge, ou l'induction. Un point parfaitement déterminé du plan de phase correspond à chaque combinaison quelconque des valeurs x et y du circuit étudié.

Pour étudier qualitativement les phénomènes se déroulant dans le circuit électrique décrit par des équations du troisième ordre, on utilise un espace de phase tridimentionnel. On porte sur l'un des axes du système des coordonnées cartésiennes de cet espace la valeur de la fonction x, sur l'autre $\frac{dx}{dt}$, et sur le troisième $\frac{d^2x}{dt^2}$.

L'étude qualitative consiste dans la recherche des propriétés générales du circuit étudié, sans intégration de l'équation différentielle non linéaire. On entend habituellement par propriétés générales d'un circuit la dépendance du caractère du phénomène transitoire des conditions initiales, la possibilité d'amorçage dans le circuit des auto-oscillations, des phénomènes de résonance et de l'automodulation, ainsi que la stabilité des régimes énumérés ci-dessus, de même que des régimes d'équilibre.

Dans un grand nombre de cas tous ces problèmes peuvent être résolus par d'autres méthodes, sans faire appel au plan de phase. L'utilisation de ce dernier rend l'étude plus concrète; elle est justifiée chaque fois lorsque cette méthode nécessite un travail commensurable ou inférieur au travail nécessaire pour résoudre les mêmes problèmes par d'autres moyens.

Habituellement le plan de phase est utilisé pour étudier les phénomènes se déroulant dans les circuits électriques comprenant des sources de F.E.M. continues, mais où il n'existe pas de sources des F.E.M. périodiques.

Cependant le plan de phase peut être utilisé également pour l'étude des phénomènes se déroulant dans les circuits comprenant des sources de F.E.M. sinusoïdale (et continue), si on passe préalablement des équations écrites pour les valeurs instantanées aux équations pour les composantes variant lentement.

§ 376. Courbes intégrales, trajectoire de phase et cycle limite. La fonction $y = f(x)$, obtenue à partir de la solution d'une équation différentielle du système, décrit une famille de courbes dans le plan de phase, les courbes de cette famille correspondent aux diverses valeurs des constantes d'intégration. Les courbes $y = f(x)$, correspondantes à diverses conditions initiales, sont appelées *courbes intégrales.*

La position initiale du point figuratif sur le plan de phase est déterminée par les valeurs de x et $\frac{dx}{dt} = y$ pour $t = 0$.

La courbe intégrale, passant par un point du plan de phase à conditions initiales imposées, est appelée *trajectoire de phase.*

L'allure de la trajectoire de phase dépend de la configuration du schéma, du caractère de la non-linéarité et du rapport entre les paramètres.

Si le phénomène se déroulant dans le circuit est périodique, les valeurs de x et de $\frac{dx}{dt} = y$, correspondant l'une à l'autre, se répètent à des intervalles de temps égaux à la période du phénomène, et la trajectoire de phase est alors une courbe fermée.

Une trajectoire de phase fermée est appelée *cycle limite*. Si le phénomène n'est pas périodique, la trajectoire de phase n'est pas une courbe fermée.

On peut observer la trajectoire de phase sur l'écran d'un oscillographe cathodique. A cette fin on délivre à l'une des paires des plaques déflectrices la valeur étudiée x et on applique à l'autre paire la dérivée de x.

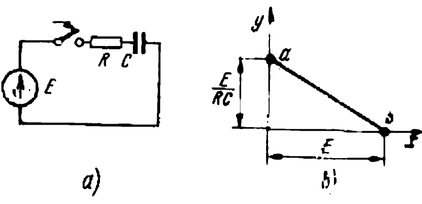


Fig. 394

§ 377. Représentation des phénomènes les plus simples dans le plan de phase. Examinons plusieurs exemples simples de description des phénomènes se déroulant dans les circuits linéaires (nous examinerons les circuits non linéaires plus loin).

On demande de représenter sur le plan de phase un phénomène transitoire, se déroulant dans le circuit de la fig. 394, *a*; ce phénomène étant provoqué par la fermeture de l'interrupteur, à conditions initiales nulles. Désignons par i le courant dans ce circuit; u_C — la tension aux bornes du condensateur.

Substituons dans l'équation du circuit

$$Ri + u_C = E$$

$C\frac{du_C}{dt}$ à i. Nous obtenons :

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Désignons

$$u_C = x; \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{dx}{dt} = y.$$

Nous aurons alors

$$y = \frac{E - x}{RC}.$$

Cette dernière équation décrit la droite *ab* de la fig. 394, *b*. Cette droite est la trajectoire de phase du phénomène examiné. Le point *b* est un point d'équilibre.

Examinons à titre de deuxième exemple la représentation d'une oscillation sinusoïdale $i = I_m \sin \omega t$ (fig. 395, *a*).

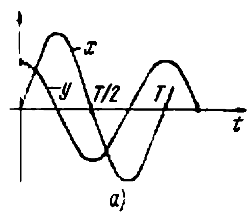
Désignons $i = x$; on a alors

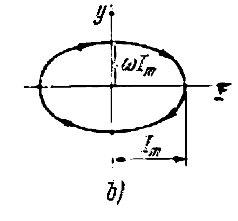
$$y = \frac{dx}{dt} = \omega I_m \cos \omega t,$$

c'est-à-dire

$$x = I_m \sin \omega t;$$

$$y = \omega I_m \cos \omega t.$$





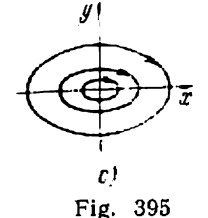


Fig. 395

Divisons la première équation par I_m, la deuxième par ωI_m et ensuite élevons au carré les équations ainsi obtenues et additionnons-les. Nous aurons ainsi l'équation d'une ellipse:

$$\left(\frac{x}{I_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{\omega I_m}\right)^2 = 1.$$

Par conséquent, l'image d'un phénomène sinusoïdal (la trajectoire de phase) dans le plan de phase est une ellipse (fig. 395, *b*).

Plusieurs ellipses, dont chacune correspond à des oscillations sinusoïdales à conditions initiales différentes, sont représentées sur la fig. 395, *c*.

Le sens du déplacement du point figuratif est indiqué par une flèche. Dans le demi-plan supérieur $y = \frac{dx}{dt} < 0$; par conséquent, dans le demi-plan supérieur le point figuratif se déplace dans le sens de l'accroissement de la coordonnée x. Dans le demi-plan inférieur $y = \frac{dx}{dt} < 0$; et, par conséquent, dans ce demi-plan le point figuratif se déplace dans le sens des coordonnées x décroissantes. On peut dire d'autre part que le déplacement du point figuratif dans le plan de phase se fait toujours dans le sens des aiguilles d'une montre.

Il y a lieu de souligner ici que bien que x et y soient des fonctions de temps, le temps ne figure pas explicitement dans le plan de phase.

La représentation d'un phénomène sinusoïdal amorti est une spirale convergente.

La représentation d'une oscillation sinusoïdale croissante est une spirale divergente.

IIIe PARTIE

INTRODUCTION

La troisième partie du « Cours d'électrotechnique théorique » est consacrée au champ électromagnétique.

La théorie du champ électromagnétique traite des phénomènes électriques et magnétiques, des lois qui régissent ces phénomènes et des méthodes de calcul qui en découlent.

L'exposé des propriétés fondamentales et des méthodes de calcul des champs est fait ici en allant des types des champs les plus simples aux types les plus compliqués. Conformément à ce principe, nous commencerons par examiner les champs ne variant pas en fonction du temps, à savoir le champ électrostatique, le champ électrique du courant continu dans un milieu conducteur, le champ magnétique du courant continu et ce n'est qu'ensuite que nous aborderons l'étude du champ électromagnétique variable. L'étude de tous ces champs permettra d'étendre la notion physique du champ, donnée dans le cours de physique, contribue à une compréhension plus approfondie des phénomènes se déroulant dans les installations électrotechniques; elle est en outre très importante pour la pratique, puisqu'elle permet de résoudre un grand nombre de problèmes ayant un caractère essentiel pour la théorie des circuits électriques, comme de ceux indépendants de cette théorie, comme par exemple des problèmes traitant du rayonnement et de la canalisation de l'énergie à haute fréquence.

Les notions exposées dans la section « Champ électrostatique » permettront de comprendre, par exemple, les conditions dans lesquelles travaille l'isolement électrique d'une installation électrique quelconque, l'influence exercée sur la rigidité diélectrique de telle ou autre propriété du diélectrique considéré, la variation de ses propriétés d'un point à l'autre, l'influence des impuretés, etc. L'étude de la section « Champ électrostatique » permet de calculer les valeurs intégrales telles que les capacités propres et partielles, notions largement utilisées dans la théorie des circuits électriques.

L'étude de la section « Champ électrique du courant continu dans un milieu conducteur » permet de résoudre par exemple les problèmes pra-

tiques suivants : déterminer la répartition des potentiels et des densités des courants dans les installations de mise à la terre, les courants de fuite dans les installations à isolement défectueux, la répartition du courant dans l'eau de mer dans les installations de dragage, calculer les valeurs intégrales telles que la conductance et la résistance entre les électrodes de configuration compliquée, etc.

Les données contenues dans la section « Champ magnétique du courant continu » facilitent également la solution de nombreux problèmes ayant une grande importance pratique.

A titre d'exemples de ce problème, nous pouvons citer le calcul des blindages magnétiques, celui des dispositifs pour enregistrement magnétique du son, le calcul des installations de défectoscopie magnétique, la détermination des forces d'interaction prenant naissance dans les appareils électriques du fait des courants de court-circuit, la recherche des inductances et des reluctances, etc.

La section la plus importante de la troisième partie du cours d'électrotechnique théorique est la section « Champ électromagnétique variable ». Nous examinons dans cette section les problèmes du rayonnement de l'énergie électromagnétique, la propagation des ondes électromagnétiques dans un diélectrique parfait, comme dans des milieux conducteur et semi-conducteur.

L'étude de l'ensemble de ces questions facilite également la solution d'un grand nombre de problèmes pratiques, comme, par exemple, ceux liés au chauffage et à la trempe par haute fréquence, à la canalisation de l'énergie à haute fréquence, aux problèmes de calcul des résistances actives et des réactances des conducteurs en courant alternatif, etc.

CHAPITRE XIII

CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

§ 378. **Définition du champ électrostatique.** Le champ électrostatique est une forme particulière de la matière, porteuse d'énergie, et possédant des propriétés électriques et magnétiques caractéristiques.

Le champ électrostatique est un cas particulier du champ électromagnétique. Il est créé par un ensemble de charges électriques immobiles dans l'espace, par rapport à l'observateur, et invariables dans le temps *.

Par la suite, nous aurons affaire en général à un champ créé dans un milieu homogène et isotrope, c'est-à-dire un milieu, dont les propriétés électriques sont les mêmes en tous les points du champ et ne dépendent pas de la direction. Dans le cas contraire, nous ferons les réserves nécessaires.

Le champ électrostatique possède la propriété d'agir sur une charge électrique, placée dans ce champ, avec une force mécanique, directement proportionnelle à la valeur de cette charge.

§ 379. **Loi de Coulomb.** Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 se trouvant dans le vide agissent l'une sur l'autre avec une force $\vec{F}$, directement proportionnelle au produit des charges q_1 et q_2 et inversement proportionnelle au carré de la distance R entre ces charges. Cette force est dirigée suivant la ligne réunissant les charges ponctuelles. Si les charges ont le même signe, elles tendent à s'éloigner l'une de l'autre ; les charges de signes contraires tendent à se rapprocher :

$$\vec{F}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R^2}\vec{R}_0, \qquad (13.1)$$

où $\vec{R}_0$ — vecteur unitaire dirigé suivant la droite réunissant les charges (voir fig. 396) **.

---

* Il a été indiqué au cours de physique qu'une substance quelconque est constituée par des particules élémentaires chargées entourées d'un champ électromagnétique. Ainsi, il existe toujours dans une substance quelconque une hétérogénéité microscopique dans l'espace.

En outre, les particules élémentaires chargées, faisant partie des atomes et des molécules, sont toujours en mouvement chaotique perpétuel. Par conséquent, en plus de l'hétérogénéité microscopique dans l'espace, nous avons toujours affaire à une disposition différente des charges microscopiques aux instants successifs.

Dans la théorie du champ on prend la moyenne des hétérogénéités microscopiques de la substance dans l'espace et dans le temps, autrement dit, on examine les phénomènes dans leur sens macroscopique.

Les charges élémentaires se déplacent chaotiquement dans un corps chargé (lorsque sa charge totale est invariable dans le temps). Par conséquent, même au voisinage immédiat de la surface de ce corps, le champ créé par les charges élémentaires est pratiquement absent.

Ceci permet de n'examiner dans le champ électrostatique que l'un des « aspects » du champ électromagnétique, à savoir son aspect électrique.

** Rappelons que la flèche, placée au-dessus d'une lettre, indique qu'il s'agit d'un vecteur dans l'espace.

Si on se sert du système MKSA et des sous-multiples des unités de ce système, la distance R est habituellement mesurée en mètres (m), les charges en Coulomb (C), $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ F/m, et la force est obtenue en Newton (N). Dans l'expression de la loi de Coulomb nous avons parlé des charges « ponctuelles », mais il n'en découle nullement que les charges agissant les unes sur les autres sont disposées sur des corps de dimensions infinitésimales. Lorsqu'on parle des charges ponctuelles, on veut dire seulement que les dimensions linéaires des corps, portant les charges en question, sont nettement plus petites que la distance entre ces corps.

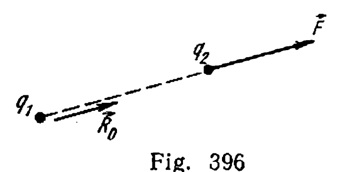


Fig. 396

§ 380. Grandeurs essentielles caractérisant un champ électrostatique : potentiel et intensité. Chaque champ est caractérisé par certaines grandeurs essentielles. Pour un champ électrostatique, les grandeurs essentielles caractérisant son champ électrique sont l'intensité $\vec{E}$ et le potentiel φ.

L'intensité du champ électrique est une grandeur vectorielle, déterminée en chaque point en valeur et en direction, tandis que le potentiel est une grandeur scalaire. La valeur du potentiel est déterminée en chaque point du champ par un certain nombre.

Le champ électrostatique est déterminé lorsqu'on connaît la loi de variation de $\vec{E}$ ou de φ en tous les points de ce champ.

Si on place dans un champ électrostatique une charge positive fixe, suffisamment petite pour qu'elle n'entraîne pas par sa présence de modification tant soit peu sensible des charges, portées par les corps ayant créé ce champ, le rapport entre la force agissant sur cette charge et la valeur q de cette charge, détermine l'intensité du champ au point considéré

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

L'intensité du champ est numériquement égale à la force agissant sur une charge unitaire.

Lorsque le champ est créé par plusieurs charges (q_1, q_2, q_3...), l'intensité du champ est égale à la somme géométrique des intensités dues à chaque charge séparément:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots .$$

En d'autres termes le principe de la superposition peut être utilisé pour le calcul d'un champ électrique.

Examinons maintenant le travail accompli par les forces du champ au cours d'un déplacement de la charge et les notions du potentiel et de la différence de potentiel liées à ce travail.

Plaçons une certaine charge q dans un champ électrostatique. La force $q\vec{E}$ agira sur cette charge. Supposons que la charge q se déplace du point *1* au point *2* suivant le parcours *132* (fig. 397). Du fait que la

direction de la force $q\vec{E}$ agissant sur la charge en chaque point du parcours peut ne pas coïncider avec l'élément du parcours $\vec{dl}$, le travail accompli pour déplacer la charge le long du parcours $\vec{dl}$ est déterminé par le produit scalaire de la force par l'élément du parcours $q\,\vec{E}\vec{dl}$. Le travail dépensé pour transporter la charge q du point *1* au point *2* suivant le parcours *132* est calculé comme la somme des travaux élémentaires $q\vec{E}\vec{dl}$. Cette somme peut être écrite sous forme d'une intégrale de ligne

$$q\int_1^2 \vec{E}\vec{dl}.$$

La charge q peut être quelconque. Supposons qu'elle soit égale à l'unité (charge unitaire). On appelle différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$ le travail dépensé par les forces du champ pour le transport de la charge unitaire du point initial *1* au point final *2*:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\vec{dl}. \qquad (13.2)$$

Fig. 397

L'expression (13.2) permet déterminer la différence de potentiel des points *1* et *2* comme intégrale de ligne de l'intensité du champ.

Si le potentiel du point final du parcours (du point *2*) était nul, le potentiel du point *1* serait calculé comme suit (pour $\varphi_2 = 0$):

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E}\vec{dl},$$

c'est-à-dire le potentiel du point arbitraire 1 du champ peut être calculé comme travail accompli par les forces du champ pour transporter une charge unitaire positive du point considéré du champ en un point du champ dont le potentiel est nul.

On peut prendre comme point de potentiel nul un point quelconque du champ. Lorsque ce point est choisi, les potentiels de tous les autres points du champ sont déterminés d'une manière parfaitement univoque.

On admet souvent que le point à potentiel nul se trouve à l'infini. Par conséquent, et dans les cours de physique surtout, on définit souvent le potentiel comme travail accompli par les forces du champ pour transporter une charge unitaire du point considéré du champ à l'infini

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E}\vec{dl}.$$

On estime souvent que le point à potentiel nul se trouve sur la surface de la terre (la terre au point de vue électrostatique est un corps conducteur et, par conséquent, il est parfaitement indifférent que le point

considéré se trouve exactement sur la surface de la terre ou dans sa profondeur.

§ 381. Le potentiel est déterminé à une constante près. Il découle de ce qui précède que le potentiel d'un point quelconque du champ dépend du choix du point du champ, auquel on a attribué un potentiel nul. En d'autres termes, le potentiel peut être déterminé à une constante près. Cependant ce fait n'a pas d'importance réelle. En effet, ce n'est pas le potentiel d'un point quelconque du champ qui a une importance pratique, mais la différence de potentiel et la dérivée du potentiel par rapport aux coordonnées.

Lorsqu'on calcule la différence de potentiel, la constante arbitraire qu'on a utilisé pour calculer le potentiel, est soustraite et ne figure pas dans la différence de potentiel. Cette constante n'influence pas non plus sur la valeur de la dérivée du potentiel par rapport aux coordonnées, puisque la dérivée d'une constante est nulle.

§ 382. Le champ électrostatique dérive d'un potentiel. Ecrivons l'expression pour la différence de potentiel pour le champ d'une charge ponctuelle. Supposons à cette fin qu'au point m de la fig. 397 se trouve une charge ponctuelle positive q, créant un champ, et qu'une charge positive unitaire $q = 1$ se déplace du point *1* au point *2* en passant par le point intermédiaire *3*.

Désignons par R_1 la distance du point m au point initial *1*, par R_2 la distance du point m au point final *2*, par R la distance du point m au point arbitraire *3* situé sur le parcours *132*. La direction de l'intensité du champ $\vec{E}$ et la direction de l'élément du parcours $\vec{dl}$ au point intermédiaire *3* sont indiquées sur la fig. 397. Le produit scalaire $\vec{E}\,\vec{dl} = E\,dR$, où dR est la projection de l'élément du parcours $\vec{dl}$ sur la direction du rayon raccordant le point m au point *3*.

Conformément à la définition, l'intensité du champ $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$.

Suivant la loi de Coulomb

$$\vec{F} = \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{R}_0.$$

Puisque $|\vec{R}_0| = 1$ et $q = 1$, le module de l'intensité du champ dans le champ de la charge ponctuelle q_1 est

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Substituons dans l'expression (13.2) la valeur $\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,dR$ à $\vec{E}\vec{dl}$. Nous obtenons

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\,\vec{dl} = \int_1^2 E\,dR = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{dR}{R^2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \quad (13.2')$$

Ainsi, *la différence de potentiel entre les points initial et final du parcours (les points 1 et 2) dépend seulement de la position de ces points et ne dépend pas du parcours, le long duquel s'est effectué le déplacement du point*

initial au point final. En d'autres termes, si le déplacement du point *1* au point *2* s'effectuait suivant un autre parcours quelconque, par exemple, suivant le parcours *142*, la différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$, ainsi obtenue, serait exactement égale à la différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$, obtenue lors du déplacement du point *1* au point *2* suivant le parcours *132*.

Si le champ est créé par un ensemble de charges ponctuelles, le raisonnement précédent est vrai également pour le champ créé par chacune des charges ponctuelles séparément. Et comme pour un champ électrique dans un diélectrique homogène et isotrope le principe de superposition est satisfait, la constatation de l'indépendance de la valeur des différences de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$ du parcours le long duquel le déplacement du point *1* au point *2* s'est effectué, est vraie également pour le champ électrique créé par un ensemble des charges ponctuelles.

Si on suit un parcours fermé *13241* (fig. 397) le point initial *1* du parcours et le point final *1* de ce parcours coïncident, et alors le premier et le second membre de l'expression (13.2) sont nuls:

$$\varphi_1 - \varphi_1 = 0 = \oint \vec{E}\,d\vec{l}. \qquad (13.3)$$

Le cercle figurant sur le signe de l'intégrale indique que l'intégrale est prise suivant un circuit fermé.

La relation (13.3) signifie que ***dans un champ électrostatique l'intégrale de ligne du champ électrique le long d'un parcours fermé quelconque est nulle.***

Au point de vue physique, ceci s'explique par le fait que le travail effectué par les forces du champ pendant le déplacement le long d'un parcours fermé est égal au travail accompli par les forces extérieures opposées aux forces du champ.

Si on considère que le travail accompli par les forces du champ est positif et que le travail accompli contre les forces du champ est négatif, la somme des travaux « positifs » et « négatifs » est nulle.

L'expression (13.3) peut être expliquée d'une manière différente encore: la circulation du vecteur $\vec{E}$ le long d'un circuit fermé quelconque est nulle. Cette relation exprime la propriété principale du champ électrostatique. On appelle potentiels les champs pour lesquels les relations de cette nature sont justifiées. Non seulement les champs électrostatiques, mais également tous les champs de gravitation (les champs de la force d'attraction entre les corps matériels), ainsi que les champs de température en régime permanent sont des champs potentiels.

§ 383. Lignes de force et lignes équipotentielles. Un champ électrostatique peut être caractérisé nettement par l'ensemble de ses lignes de force et de ces lignes équipotentielles. Une ligne de force est une ligne imaginaire du champ, partant d'un corps à charge positive et allant à un corps à charge négative. Elle est tracée de manière, que sa tangente en un point quelconque donne la direction de l'intensité du champ $\vec{E}$ en ce point. Une charge positive très petite, si elle pouvait

se déplacer librement dans le champ et si elle était dépourvue d'inertie, se déplacerait le long de la ligne de force.

Ainsi, les lignes de force ont un « commencement » (sur le corps à charge positive) et une « fin » (sur le corps à charge négative). Du fait que les charges positive et négative, créant le champ, ne peuvent pas se trouver au même point, les lignes de force d'un champ électrostatique ne peuvent pas être des lignes fermées sur elles-mêmes.

On peut former des surfaces équipotentielles dans un champ électrostatique. On appelle surface équipotentielle l'ensemble des points d'un

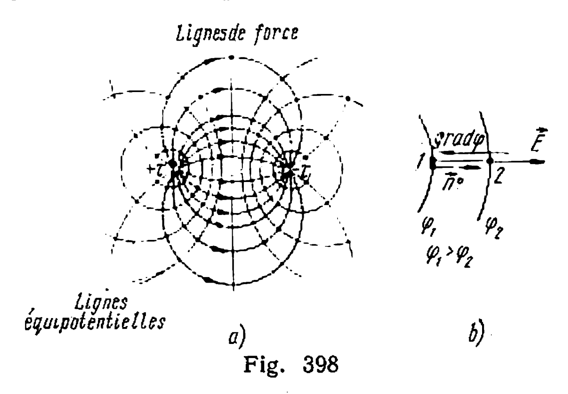


Fig. 398

champ, ayant tous le même potentiel. Si on coupe mentalement un champ électrostatique par un plan quelconque, on verra dans la section ainsi obtenue les traces d'intersection du plan avec les surfaces équipotentielles. On appelle ces traces lignes équipotentielles. Il découle de la définition même d'une surface équipotentielle qu'un déplacement quelconque sur cette surface n'entraîne pas de variation du potentiel. De même, un déplacement le long d'une ligne équipotentielle n'est pas liée à une variation du potentiel.

Les lignes de force et les lignes équipotentielles se coupent sous un angle droit en un point quelconque du champ. Nous avons tracé à titre d'exemple sur la fig. 398, *a* l'image de deux corps chargés, ainsi que plusieurs lignes de force et équipotentielles.

Contrairement aux lignes de force, les lignes équipotentielles d'un champ électrostatique sont des lignes fermées sur elles-mêmes. Comme nous l'avons déjà indiqué, le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel φ sont liés l'un à l'autre par une relation du type intégral (13.2). En outre, il existe entre $\vec{E}$ et φ une relation du type différentiel. Elle sera examinée au paragraphe suivant.

§ 384. Expression de l'intensité du champ sous forme de gradient de potentiel. Comme nous l'avons déjà indiqué, un champ électrostatique est un champ potentiel. Il existe en général entre deux points situés à proximité l'un de l'autre une certaine différence de potentiel.

Si on divise cette différence par la distance la plus courte entre les points considérés, la grandeur ainsi obtenue caractérise la vitesse de

variation du potentiel suivant la distance la plus courte entre ces points. Cette vitesse dépend de la direction le long de laquelle les points ont été choisis. En mathématique on utilise la notion du *gradient d'une fonction scalaire*. On appelle gradient d'une fonction scalaire la vitesse de variation de cette fonction, prise dans la direction de son accroissement maximal. Deux considérations sont essentielles dans cette définition du gradient. La première d'entre elles indique que la direction, suivant laquelle on prend les deux points voisins, doit être telle que la vitesse de variation du potentiel soit maximale. Il résulte de la deuxième considération que cette direction doit être telle que la fonction scalaire croît (et non décroît) dans cette direction. Deux tronçons de deux lignes équipotentielles, placées très près l'une de l'autre, sont représentés sur la fig. 398, *b*. L'une d'elles a le potentiel φ_1, et l'autre le potentiel φ_2. Soit $\varphi_1 > \varphi_2$. Alors, conformément à la définition du gradient de potentiel, donnée ci-dessus, le gradient sera représenté sur la fig. 398, *b* par un vecteur perpendiculaire aux lignes équipotentielles et dirigé de φ_2 à φ_1 (dans le sens des potentiels croissants).

L'intensité du champ électrique est dirigée, du potentiel plus élevé (φ_1) vers le potentiel moins élevé (φ_2). Si on désigne par dn la distance entre des surfaces équipotentielles le long de la perpendiculaire (de la normale) et si on désigne par $\overrightarrow{dn}$ le vecteur, ayant la direction de $\vec{E}$, on peut écrire:

$$\overrightarrow{dn} = \vec{n}^0 \, dn$$

(ici $\vec{n}^0$ — vecteur unitaire dans la direction $\overrightarrow{dn}$); on peut alors conformément à la relation (13.2) écrire:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\,\vec{dl} \approx \vec{E}\,\overrightarrow{dn} = -d\varphi,$$

où on désigne par $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ l'accroissement du potentiel entre le point *1* et le point *2*.

Du fait que les vecteurs $\vec{E}$ et dn ont la même direction, le produit scalaire $\vec{E}\,\overrightarrow{dn}$ est égal au produit du module de $\vec{E}$ par le module de $\overrightarrow{dn}$ ($\vec{E}\,\overrightarrow{dn} = Edn$).

Ainsi $E\,dn = -d\varphi$. Il en découle que le module de l'intensité du champ $E = -\frac{d\varphi}{dn}$. Vecteur de l'intensité du champ $\vec{E} = E\vec{n}^0$. Par conséquent,

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn}\vec{n}^0. \tag{13.4}$$

Par ailleurs, il découle de la définition du gradient que

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{dn}(-\vec{n}^0) = \frac{-d\varphi}{dn}(-\vec{n}^0). \tag{13.5}$$

En comparant (13.4) et (13.5) nous constatons que

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{13.6}$$

La relation (13.6) peut être expliquée de la manière suivante : l'intensité en un point quelconque du champ est égale à la vitesse de variation du potentiel en ce point du champ, prise avec le signe contraire. Le signe — a un sens parfaitement déterminé : la direction $\vec{E}$ et celle du grad φ sont opposées (fig. 398, *b*).

La normale $\vec{dn}$ est en général disposée de manière à ne pas coïncider avec un axe de coordonnées quelconque. Par conséquent, le gradient de potentiel dans le cas général peut être représenté sous la forme d'une somme de trois projections sur les axes des coordonnées. Ainsi, par exemple, dans un système de coordonnées cartésien

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad (13.7)$$

où $\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ — vitesse de variation de φ dans la direction de l'axe des x, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ — valeur numérique (module) de la vitesse (la vitesse est une grandeur vectorielle), $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires, respectivement suivant les axes x, y, z du système cartésien.

A son tour, le vecteur d'intensité $E = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z$.

Ainsi

$$\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z = -\left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Deux vecteurs ne sont égaux l'un à l'autre que si leurs projections respectives sont égales.

Par conséquent,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (13.8)$$

Les relations (13.8) doivent être interprétées comme suit : la projection de l'intensité du champ sur l'axe des x est égale à la projection de la vitesse de variation du potentiel suivant l'axe des x prise avec un signe contraire, etc.

Pour simplifier l'écriture de diverses opérations sur les valeurs scalaires et vectorielles on utilise l'opérateur différentiel hamiltonien (l'opérateur nabla).

§ 385. Opérateur différentiel hamiltonien (opérateur nabla). On appelle opérateur nabla la somme des dérivées partielles par rapport aux trois axes des coordonnées, multipliées par les vecteurs unitaires correspondants (les axes). En coordonnées cartésiennes, cet opérateur s'écrit somme suit :

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Au point de vue formel, il peut être considéré comme un vecteur. L'opérateur nabla peut être appliqué à des fonctions scalaires ou vectorielles. La fonction sur laquelle on veut effectuer une opération (une différentiation par rapport aux coordonnées ou, en d'autres termes, une

différentiation « spatiale ») est écrite à droite de l'opérateur nabla. L'opérateur nabla n'est jamais utilisé sans qu'une fonction soit écrite à sa droite.

Appliquons l'opérateur ∇ au potentiel φ. A cette fin écrivons :

$$\nabla\varphi=\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi=\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Si on compare cette dernière expression avec (13.7) on constate que leurs seconds membres sont égaux. Par conséquent, les premiers membres le sont également. On a ainsi :

$$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi.$$

En d'autres termes, l'écriture $\nabla\varphi$ est équivalente à l'écriture grad φ et le placement de l'opérateur ∇ à gauche d'une fonction scalaire quelconque (de φ dans le cas considéré) indique qu'on prend le gradient de cette fonction scalaire.

§ 386. Expression du gradient de potentiel en coordonnées cylindriques et sphériques. On a dans le système cylindrique (voir les désignations sur la fig. 399, *a*) :

$$\operatorname{grad}\varphi=\vec{r}^{\,0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\vec{\alpha}^{\,0}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\vec{z}^{\,0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (13.9)$$

Dans le système sphérique (voir les désignations sur la fig. 399, *b*) :

$$\operatorname{grad}\varphi=\vec{R}^{0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial R}+\vec{\theta}^{0}\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\vec{\alpha}^{0}\,\frac{1}{R\sin\theta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}. \qquad (13.10)$$

§ 387. Flux d'un vecteur à travers un élément de surface et flux d'un vecteur à travers une surface. Soit dans un champ vectoriel (par exemple, dans le champ du vecteur de l'intensité du champ électrique $\vec{E}$) un certain élément de surface, dont l'aire d'une face est numériquement égale à ds. Choisissons le sens positif pour la normale (le perpendiculaire) à l'élément de surface. Le vecteur $\vec{ds}$ est égal à une certaine échelle sur la fig. 400 à l'aire de l'élément de surface, et sa direction coïncide avec le sens positif de la normale. Supposons que l'aire de cet élément soit suffisamment petite pour qu'à l'intérieur de cet élément, le vecteur $\vec{E}$ puisse être considéré comme le même en tous les points.

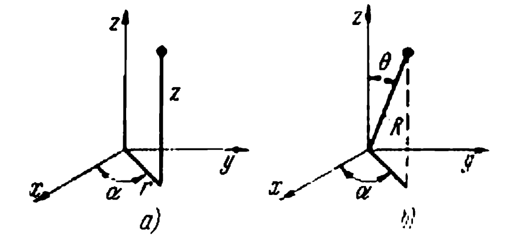
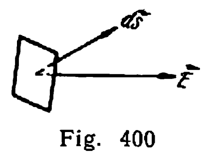


Fig. 399

Lorsque $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{ds}$, le vecteur $\vec{E}$ ne transperce pas l'élément de surface ; lorsque $\vec{E}$ est orienté suivant $\vec{ds}$, le flux du vecteur $\vec{E}$ est maximal à travers l'élément de surface considéré. Dans le cas

le plus général, le flux du vecteur $\vec{E}$ à travers l'élément de surface $\vec{ds}$ est déterminé par le produit scalaire $\vec{E}\,\vec{ds}$.

Le produit $\vec{E}\,\vec{ds}$ est une grandeur scalaire. Par conséquent, le flux d'un vecteur à travers un élément de surface est une grandeur scalaire. Le flux du vecteur peut être positif ou négatif. Si le produit scalaire $\vec{E}\,\vec{ds}$ est positif, le flux du vecteur est dirigé dans le sens $\vec{ds}$. Lorsque le flux du vecteur a une valeur négative, il est dirigé en sens contraire.


Fig. 400

Lorsque la surface, à travers laquelle on calcule le flux du vecteur, est grande, on ne peut plus estimer que $\vec{E}$ est le même en tous les points de cette surface. On divise alors cette surface en petits éléments et le flux total du vecteur à travers cette surface est égal à la somme algébrique des flux à travers tous les éléments de la surface. La somme des flux peut être écrite sous forme de l'intégrale

$$\int_s \vec{E}\,\vec{ds}.$$

Le signe s figurant sous le signe de l'intégrale indique que la sommation est faite suivant les éléments de la surface.

Lorsque la surface, à travers laquelle on calcule le flux du vecteur, est une surface fermée, ceci est indiqué en traçant un petit cercle sur le signe de l'intégrale:

$$\oint_s \vec{E}\,\vec{ds}.$$

§ 388. Charges libres et liées. Polarisation de la substance. On appelle *charges libres* les charges qui peuvent, sous l'effet des forces du champ, se déplacer librement dans la substance, leur déplacement n'étant pas limité par des forces intramoléculaires.

On appelle *charges liées* les charges électriques entrant dans la composition de la substance et maintenues en positions déterminées par les forces intramoléculaires. De telles charges sont liées à la substance considérée et ne peuvent en être séparées. La somme des charges positives liées est égale à la somme des charges négatives liées.

Si on place un corps diélectrique quelconque dans un champ électrique, ce corps se polarise.

On appelle *polarisation* une variation ordonnée de la disposition des charges liées dans un corps, due au champ électrique. Cette modification de la disposition se manifeste par le déplacement des charges liées négatives dans le corps dans le sens du potentiel plus élevé et dans le déplacement des charges liées positives dans le sens du potentiel plus bas. Les charges vont se déplacer tant que les forces exercées par le champ électrique sur les charges liées ne sont pas équilibrées par les forces intramoléculaires. A la suite de la polarisation, des charges liées sont pour ainsi dire mises à nu sur la surface de la substance.

§ 389. **Vecteur polarisation.** On appelle moment électrique de deux charges de grandeur égale et de signes contraires, se trouvant à une distance l l'une de l'autre le produit $q\vec{l}$. C'est une grandeur vectorielle dirigée de la charge $-q$ vers la charge $+q$ (fig. 401, *a*).

Dans une substance polarisée on peut considérer au point de vue électrique les molécules comme des doublets. Sous l'effet d'un champ électrique externe, ces doublets tendent à s'orienter dans l'espace de manière que leur moment électrique soit dirigé parallèlement au vecteur

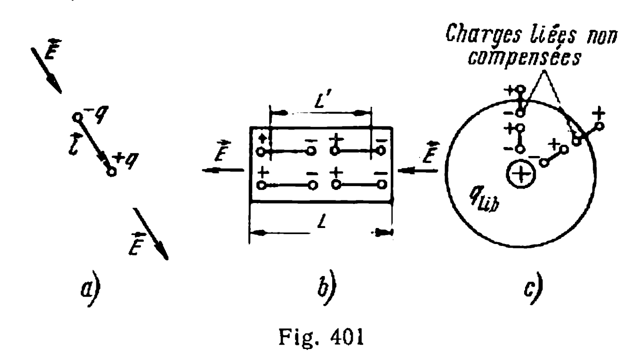


Fig. 401

de l'intensité de ce champ électrique. Au point de vue pratique ce n'est pas le moment électrique d'une seule molécule, ni celui de deux charges, mais la somme des doublets, se trouvant dans l'unité de volume de la substance, qui mérite un intérêt. Le moment électrique de la somme des doublets se trouvant dans l'unité de volume de la substance est appelé vecteur polarisation et est désigné par la lettre $\vec{P}$.

$$\vec{P}=\frac{\Sigma q\vec{l}}{V}. \qquad (13.11)$$

Pour la plupart des diélectriques $\vec{P}$ est proportionnel à l'intensité du champ électrique $\vec{E}$. Le coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs est désigné par k et est appelé susceptibilité diélectrique

$$\vec{P}=k\vec{E} \qquad (13.12)$$

Au point de vue des phénomènes qui se déroulent dans les diélectriques lors de leur polarisation, tous les diélectriques peuvent être répartis en deux groupes.

Le premier groupe comprend les diélectriques dont les molécules en l'absence d'un champ électrique extérieur sont électriquement neutres, autrement dit les centres d'action des charges positives et négatives coïncident dans ces diélectriques. Au nombre de ces diélectriques on peut citer l'hydrogène, l'azote, la paraffine, le mica, etc.

La polarisation dans les diélectriques de ce premier groupe se manifeste par le déplacement du centre d'action des charges positives des

molécules dans le sens du champ extérieur sous l'effet de ce champ, tandis que le centre d'action des charges négatives se déplace dans le sens contraire de ce champ. Il s'ensuit que la molécule devient un doublet.

Ce déplacement des charges de la molécule est proportionnel à l'intensité du champ extérieur. Les forces intramoléculaires s'opposent à ce déplacement.

Le deuxième groupe est constitué par des diélectriques dont les molécules sont des doublets en l'absence d'un champ électrique extérieur.

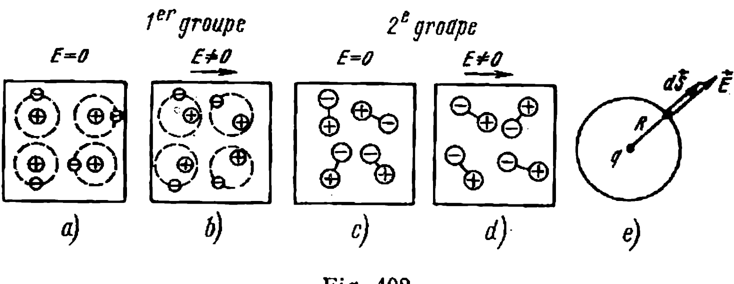


Fig. 402

En d'autres termes, les centres d'action des charges positives et négatives dans ces molécules ne coïncident pas en l'absence d'un champ électrique extérieur (molécules polaires).

A titre d'exemple d'un diélectrique à molécules polaires nous pouvons citer le chlorure d'hydrogène.

Grâce à l'agitation thermique, les doublets sont orientés chaotiquement et de ce fait, en l'absence d'un champ électrique extérieur, les champs électriques de ses doublets se neutralisent mutuellement.

La polarisation dans les diélectriques du deuxième groupe se manifeste par la tendance des molécules polaires de s'orienter de manière que leur moment électrique soit dirigé dans le sens du champ électrique extérieur.

La polarisation des diélectriques du premier groupe est illustrée par les fig. 402, *a* et *b* et la polarisation des diélectriques du deuxième groupe est montrée sur les fig. 402, *c* et *d*. Les fig. 402, *a* et *c* correspondent à l'absence du champ extérieur. Les fig. 402, *b* et *d* sont tracées établies en présence d'un champ extérieur.

§ 390. Vecteur induction électrique $\vec{D}$. En plus des deux grandeurs vectorielles $\vec{E}$ et $\vec{P}$, dont le sens physique a été exposé ci-dessus, on utilise dans les calculs électrotechniques également le vecteur $\vec{D}$.

Le vecteur $\vec{D}$ est appelé vecteur induction électrique ou vecteur polarisation électrique. Il peut être exprimé de la manière suivante en fonction des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{P}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Du fait que

$$\vec{P} = k\vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}\,\frac{k}{\varepsilon_0}, \qquad (13.13)$$

on a

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\left(1 + \frac{k}{\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}, \qquad (13.14)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r; \quad \varepsilon_r = 1 + \frac{k}{\varepsilon_0}$$

Le coefficient ε_r est appelé permittivité électrique *. Il montre de combien de fois la permittivité d'une substance (ε) est plus grande que la constante diélectrique (ε_0), caractérisant les propriétés électriques du vide; ε_r est une grandeur sans dimensions.

Dans le système MKSA, $[D] = [P] = C/m^2$. Un des théorèmes les plus importants d'électrostatique est le théorème de Gauss.

§ 391. Théorème de Gauss sous forme intégrale. Le flux du vecteur de polarisation électrique à travers une surface fermée quelconque, entourant un certain volume, est égal à la somme algébrique des charges libres se trouvant à l'intérieur de cette surface:

$$\oint_s \vec{D}\,\vec{ds} = \sum q_{lib}. \qquad (13.16)$$

Du fait que $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$, le théorème de Gauss peut être écrit pour un milieu homogène et isotrope sous la forme suivante:

$$\oint \vec{E}\,\vec{ds} = \frac{\sum q_{lib}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \qquad (13.17)$$

Autrement dit, le flux du vecteur d'intensité du champ électrique à travers une surface quelconque fermée est égal à la somme des charges libres, se trouvant à l'intérieur de cette surface, divisée par le produit $\varepsilon_0 \varepsilon_r$.

Les deux formes d'écriture sont également utilisées. Il est important de souligner que le flux du vecteur dépend uniquement de la somme des charges et ne dépend pas de la disposition de ces charges à l'intérieur d'une surface fermée **.

Il existe encore une autre forme d'écriture du théorème de Gauss, différente de (13.17).

En effet, le flux du vecteur $\vec{E}$ à travers une surface fermée quelconque est créé non seulement par la somme des charges libres ($\sum q_{lib}$) mais éga-

---

* ε_r est appelé également permittivité diélectrique ou permittivité tout court.

** Nous pouvons dire ici à l'avance que le théorème de Gauss (formule 13.16 ou 13.17) est applicable non seulement à un champ électrostatique, mais, également, dans certaines conditions déterminées, à un champ électromagnétique variable.

Il est applicable à un champ électromagnétique variable à condition que la distance entre la charge créant ce champ et le point où on veut déterminer l'intensité soit nettement inférieure à la longueur de l'onde électromagnétique (voir en détail § 381).

lement par la somme des charges liées ($\sum q_{liées}$), se trouvant à l'intérieur de cette surface.

On sait que le flux du vecteur polarisation à travers une surface fermée quelconque est égal à la somme algébrique, prise avec le signe contraire, des charges liées se trouvant à l'intérieur de cette surface

$$\sum q_{liées} = -\oint \vec{P}\, \vec{ds}. \qquad (a)$$

Rappelons l'établissement de l'expression (a). A cette fin, montrons d'abord que la densité des charges superficielles liées, se trouvant à la surface de séparation d'un diélectrique polarisé et du vide, est égale au module du vecteur polarisation.

La fig. 401, *b* montre la disposition des doublets dans un diélectrique polarisé de longueur Z et de section s. Des charges liées se trouvent aux deux extrémités du diélectrique. Désignons par σ leur densité superficielle. Sur la longueur L les charges positives et négatives se compensent mutuellement. Par conséquent, le diélectrique polarisé de la fig. 401, *b* peut être considéré comme un doublet de longueur L à charges σs concentrées à ses extrémités.

Le moment électrique global du diélectrique de longueur L est égal à σsL. Le moment électrique de l'unité du volume du diélectrique est

$$P = \frac{\sigma sL}{V} = \frac{\sigma sL}{sL} = \sigma.$$

Ainsi, la densité des charges liées se trouvant sur les faces en bout d'un diélectrique polarisé est égale au module du vecteur polarisation P (le vecteur $\vec{P}$ est perpendiculaire aux extrémités du diélectrique). Examinons la fig. 401, *b*. Elle représente la charge positive libre, ayant provoqué la polarisation du diélectrique qui l'entoure.

Enfermons cette charge dans une sphère et calculons les charges liées non compensées, se trouvant à l'intérieur de cette sphère. Ce sont les charges des doublets couplés par la surface s.

Leur densité superficielle étant égale à σ, on a

$$\sum q_{liées} = -\oint \sigma\, ds = -\oint \vec{P} \vec{ds}.$$

Le signe — est figuré ici du fait que le signe des charges liées non compensées est contraire à celui de la charge libre (voir fig. 401, *c*).

Par conséquent, l'expression (13.16) peut être récrite de la manière suivante:

$$\oint \vec{D}\, \vec{ds} = \oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\, \vec{ds} = \varepsilon_0 \oint \vec{E}\, \vec{ds} + \oint \vec{P}\, \vec{ds} = \sum q_{lib}.$$

On a donc

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\, \vec{ds} = \sum q_{lib} - \oint \vec{P}\, \vec{ds} = \sum q_{lib} + \sum q_{liées}$$

ou

$$\oint \vec{E}\, \vec{ds} = \frac{\sum q_{lib} + \sum q_{liées}}{\varepsilon_0}. \qquad (13.17)$$

Les expressions (13.17) et (13.17′) diffèrent par leur second membre.

Le théorème de Gauss sous sa forme intégrale peut être utilisé avec une efficacité et une simplicité maximales pour trouver l'intensité ou le déplacement électrique en un point quelconque du champ, lorsqu'on peut tracer par ce point une surface fermée de manière que tous les points

de cette surface se trouvent dans des conditions égales (symétriques) par rapport à la charge située à l'intérieur de la surface fermée.

Une telle surface est constituée habituellement par une sphère (si la charge est ponctuelle) ou par la surface latérale d'un cylindre (si la charge est linéaire). Dans ces conditions et du fait de la disposition symétrique de tous les points de la surface par rapport à la charge, la valeur numérique du champ est la même aux différents points de cette surface.

§ 392. Application du théorème de Gauss au calcul de l'intensité et du potentiel dans le champ d'une charge ponctuelle. A titre d'exemple d'utilisation de théorème de Gauss, calculons l'intensité d'un champ créé par une charge ponctuelle en un point se trouvant à une distance R du centre de la charge. Pour cela traçons par le point considéré une surface sphérique de rayon R en supposant que la charge se trouve au centre de cette sphère et appliquons à cette dernière le théorème de Gauss (fig. 402, *e*).

Un élément $\vec{ds}$ de la surface de la sphère est perpendiculaire à la surface de la sphère * et est dirigé dans le sens de la normale extérieure (par rapport au volume intérieur de la surface).

Dans le cas considéré $\vec{E}$ et $\vec{ds}$ ont la même direction en chaque point de la sphère. L'angle qu'ils forment est nul. Etant donné que la valeur numérique de $\vec{E}$ est la même en tous les points de la sphère, E peut être sorti du signe de l'intégrale:

$$\oint \vec{E}\vec{ds} = \oint E\,ds = E \oint ds = E\cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}.$$

Par conséquent, l'intensité créée par une charge ponctuelle q à une distance R de cette charge est donnée par l'expression suivante:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}. \tag{13.18}$$

Du fait de la symétrie sphérique l'intensité du champ n'a qu'une seule composante, radiale, dans un système de coordonnées sphérique. Par conséquent,

$$E = E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -\frac{d\varphi}{dR}.$$

D'où

$$\varphi = -\int E\,dR = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R} + C. \tag{13.19}$$

Ainsi, le potentiel dans le champ d'une charge ponctuelle est inversement proportionnel à la première puissance de la distance R entre la charge ponctuelle et le point pour lequel on calcule le potentiel; C est la constante d'intégration, à laquelle près on calcule le potentiel. Rappelons que des expressions analogues pour E et φ on été obtenues au § 382 en utilisant la loi de Coulomb.

---

* Nous avons en vue ici le vecteur représentant cet élément de surface de la sphère.

§ 393. Théorème de Gauss sous forme différentielle. Le théorème de Gauss a été donné jusqu'ici sous forme intégrale. Cette forme intégrale exprimait la relation entre le flux du vecteur $\vec{E}$ à travers la surface s limitant un certain volume et la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur de ce volume. La forme intégrale ne permet pas de connaître la manière dont le flux des lignes de $\vec{D}$ au point considéré du champ est lié à la densité des charges libres au même point. Cette relation est donnée par la forme différentielle du théorème de Gauss. Pour obtenir cette forme, divisons les deux membres de l'équation (13.16) par la même grandeur scalaire, à savoir le volume V, limité par la surface fermée s:

$$\frac{\oint \vec{D}\,\vec{ds}}{V} = \frac{\sum q_{lib}}{V}.$$

Cette dernière expression est applicable à un volume V de grandeur quelconque. Ecrivons que ce volume tend vers zéro:

$$\lim_{V\to 0} \frac{\oint \vec{D}\,\vec{ds}}{V} = \lim_{V\to 0} \frac{\sum q_{lib}}{V}.$$

Lorsque le volume tend vers zéro, $\oint \vec{D}\,\vec{ds}$ tend également vers zéro, mais le rapport entre deux grandeurs infiniment petites $\oint \vec{D}\,\vec{ds}$ et V est une grandeur finie *. La limite du rapport du flux de la grandeur vectorielle $\vec{D}$ à travers une surface fermée limitant un certain volume V à ce volume est appelée divergence du vecteur $\vec{D}$ ($\operatorname{div} \vec{D}$).

Dans le premier membre de cette dernière expression figure la densité volumique de la charge libre que nous désignerons par ρ_{lib}.

Ainsi, le théorème de Gauss dans sa forme différentielle est écrit comme suit:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{lib}, \qquad (13.20)$$

autrement dit, la divergence des lignes $\vec{D}$ au point considéré du champ est déterminée par la valeur de la densité des charges libres en ce point. Si la densité volumique des charges en ce point est positive ($\rho_{lib} > 0$), les lignes du vecteur $\vec{D}$ partent du volume infiniment petit, entourant le point considéré du champ divergent (la divergence étant positive, fig. 403, *a*). Si au point considéré du champ $\rho_{lib} < 0$, les lignes du vecteur $\vec{D}$ convergent dans le volume infiniment petit, à l'intérieur duquel

---

* Dans la troisième partie de ce cours on fait souvent appel aux grandeurs, déterminées lorsque le volume ou l'aire considérés tendent vers zéro.

Il y a lieu de remarquer ici qu'il ne faut pas comprendre à la lettre l'expression « tendent vers zéro »: il ne s'agit que d'une diminution des cotes linéaires du volume ou de l'aire telle que le caractère discret de la matière ne se manifeste pas encore.

se trouve le point considéré. Et, enfin, si en un point quelconque du champ $\rho_{lib} = 0$, il n'existe pas en ce point du champ ni divergence ni convergence des lignes $\vec{D}$, autrement dit, au point considéré les lignes du vecteur $\vec{D}$ ne commencent et ne finissent pas.

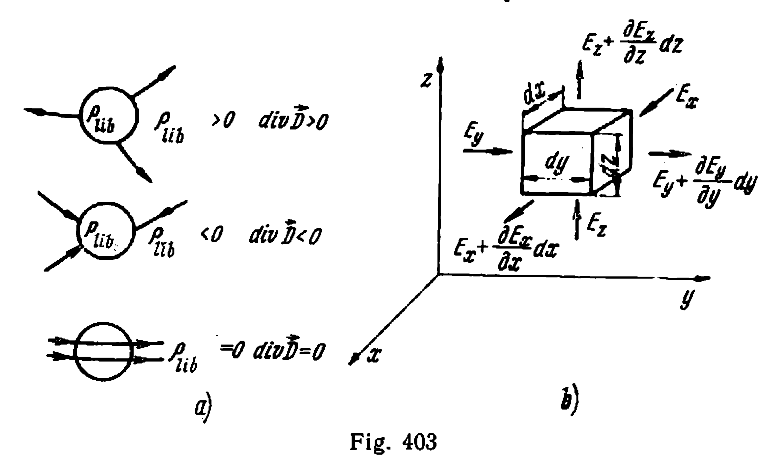


Fig. 403

Si le milieu est homogène et isotrope, sa ε = const, et, par conséquent, on peut remplacer (13.20) par l'expression suivante:

$$\text{div}\,\varepsilon\vec{E} = \rho_{lib}.$$

Plaçons ε devant le signe de divergence

$$\varepsilon\,\text{div}\,\vec{E} = \rho_{lib}$$

par conséquent,

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}. \tag{13.21}$$

L'expression (13.21) est la deuxième forme d'écriture du théorème de Gauss sous son aspect différentiel. Elle n'est satisfaite que pour un milieu homogène et isotrope. Pour un milieu non homogène ε est une fonction des coordonnées et, par conséquent, ne peut être placée devant le signe de divergence.

L'expression (13.17') est écrite sous sa forme différentielle comme suit:

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{liées}}{\varepsilon_0}. \tag{13.21'}$$

Par conséquent, la divergence du vecteur $\vec{E}$, contrairement à la divergence du vecteur $\vec{D}$, est constituée non pas seulement par les charges libres, mais également par les charges liées.

L'exposition analytique de div $\vec{E}$ est différente suivant le système de coordonnées.

§ 394. Expression de div $\vec{E}$ en coordonnées cartésiennes. En isolant dans l'espace un très petit parallélépipède à arêtes dx, dy, dz, plaçons les arêtes de ce parallélépipède parallèlement aux axes du système de coordonnées cartésien (fig. 403, *b*). Pour trouver la divergence du vecteur $\vec{E}$ dans le volume considéré, écrivons la différence des flux sortant de ce volume et entrant dans ce dernier et divisons la différence ainsi trouvée par la valeur du volume du parallélépipède, égal à $dx\,dy\,dz$.

La face gauche dont l'aire est $dx\,dy$ n'est transpercée que par une seule composante du vecteur $\vec{E}$, à savoir la composante $\vec{j}\,E_y$, tandis que les autres composantes ($\vec{i}\,E_x$ et $k\,E_z$) glissent sur cette face. Le flux du vecteur $\vec{E}$ pénétrant dans cette face est égal à $E_y\,dx\,dy$.

Puisque $\vec{E}$ est fonction des coordonnées, ses composantes sont également des fonctions des coordonnées. La face droite à aire $dx\,dz$ se trouve à la distance dy de la face gauche. La projection du vecteur $\vec{E}$ sur l'axe des y pour cette face est égale à $E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}dy$.

Ici $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ est la vitesse de variation de E_y dans le sens de l'axe y ; $\frac{\partial E_y}{\partial y}dy$ est l'accroissement de la composante en y de l'intensité de champ sur le parcours dy.

Le flux sortant de la face droite à aire $dx\,dz$ est

$$\left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}dy\right)dx\,dz.$$

Le flux sortant par la face à aire $dx\,dz$ est égal à $\frac{\partial E_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$.

De la même manière on obtient les différences des flux à travers les faces $dy\,dz$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}dx\,dy\,dz.$$

La différence des flux à travers les faces $dx\,dy$ (les parois supérieure et inférieure du volume) est $\frac{\partial E_z}{\partial z}dx\,dy\,dz$.

Pour trouver div $\vec{E}$, additionnons les différences des flux à travers toutes les faces et divisons la somme trouvée par le volume du parallélépipède $dx\,dy\,dz$; nous obtenons ainsi

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,. \qquad (13.22)$$

§ 395. Utilisation de l'opérateur nabla pour écrire la divergence. Nous avons démontré précédemment que la multiplication de l'opérateur ∇ par une fonction scalaire revient à prendre le gradient de cette fonction scalaire. Démontrons que la multiplication scalaire de l'opérateur ∇ par une fonction vectorielle quelconque, par exemple par la fonction $\vec{E}$, revient à prendre la divergence de cette fonction vectorielle.

Le produit $\nabla\vec{E}$ peut être écrit ainsi :

$$\nabla\vec{E}=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{i}E_x+\vec{j}E_y+\vec{k}E_z)=$$

$$=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (13.23)$$

Les seconds membres de (13.22) et (13.23) sont égaux l'un à l'autre et, par conséquent, les premiers membres doivent l'être également. Par conséquent,

$$\nabla\vec{E}=\operatorname{div}\vec{E}.$$

§ 396. Expression de div $\vec{E}$ en coordonnées cylindriques et sphériques. Donnons sans l'établir l'expression de div $\vec{E}$ en un système de coordonnées cylindrique:

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (13.24)$$

et dans un système de coordonnées sphérique :

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2E_R)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}. \qquad (13.25)$$

§ 397. Equation de Poisson et équation de Laplace. Les équations de Poisson et de Laplace sont les équations essentielles d'électrostatique. Elles découlent du théorème de Gauss dans sa forme différentielle. En effet, on sait que $\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi$. Et en même temps, conformément au théorème de Gauss,

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}. \qquad (13.21)$$

Substituons dans (13.21) $\vec{E}$ tiré de (13.6). Nous obtenons:

$$\operatorname{div}\vec{E}=\operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi)=\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}.$$

Plaçons le signe — devant celui de divergence

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=-\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}.$$

En outre, au lieu de grad φ, écrivons son équivalent $\nabla\varphi$. Ecrivons également ∇ au lieu de div. On a alors

$$\nabla(\nabla\varphi)=-\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} \qquad (13.26')$$

ou

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}. \qquad (13.26)$$

L'équation (13.26) est appelée équation de Poisson. Le cas particulier de l'équation de Poisson, lorsque $\rho_{lib}=0$, est appelé équation de Laplace. Elle s'écrit comme suit:

$$\nabla^2\varphi=0. \qquad (13.27)$$

L'opérateur ∇^2 = div grad est appelé l'opérateur de Laplace ou le laplacien, et est parfois désigné par le symbole Δ. Par conséquent, on peut trouver quelquefois la forme suivante d'écriture de l'équation de Poisson:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}.$$

Exprimons $\nabla^2\varphi$ dans un système de coordonnées cartésien. A cette fin, écrivons sous une forme développée le produit des deux facteurs ∇ et $\nabla\varphi$:

$$\nabla(\nabla\varphi) = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Multiplions terme à terme cette expression; nous obtenons

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Ainsi, l'équation de Poisson peut être écrite comme suit dans un système de coordonnées cartésien:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}. \qquad (13.28)$$

Equation de Laplace en coordonnées cartésiennes:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (13.29)$$

Donnons sans l'établir l'expression de $\nabla^2\varphi$ dans un système de coordonnées cylindrique

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \qquad (13.30)$$

et dans un système de coordonnées sphérique

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\,\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}. \qquad (13.31)$$

* * *

L'équation de Poisson donne la relation entre les dérivées partielles de deuxième ordre de φ en un point quelconque du champ et la densité volumique des charges libres au même point. En outre, le potentiel φ en un point quelconque du champ dépend évidemment de toutes les charges créant ce champ et non seulement de la valeur de la charge libre située au point considéré.

Examinons la manière d'écrire sous sa forme générale la solution de l'équation de Poisson.

Supposons qu'il existe dans le volume V des charges volumiques (ρ), superficielles (σ) et linéaires (τ). Représentons ces charges sous forme d'un ensemble des charges ponctuelles $\rho\,dV$, σds, τdl; dV — élément de volume; ds — élément d'une surface chargée et dl — élément de longueur d'un axe chargé. La composante du potentiel $d\varphi$ en un certain point de

l'espace se trouvant à une distance R de ρdV est conformément à l'expression (13.19)

$$\frac{\rho\, dV}{4\pi\varepsilon R}.$$

Les composantes du potentiel dues aux charges superficielle et linéaire et considérées comme ponctuelle peuvent être déterminées d'une manière analogue :

$$\frac{\sigma\, ds}{4\pi\varepsilon R} \quad \text{et} \quad \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon R}.$$

La valeur totale de φ peut être déterminée comme la somme (l'intégrale) des potentiels dus à toutes les charges de ce champ :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dV}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s \frac{\sigma\, ds}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau\, dl}{R}. \qquad (13.31')$$

Dans l'expression (13.31') ρ, σ et τ sont des fonctions du rayon R. Dans la pratique on utilise rarement l'expression (13.31') puisque la distribution de σ suivant la surface, de τ suivant la longueur et de ρ suivant le volume dépend d'une manière compliquée de configuration des électrodes et n'est pas connue en général avant le calcul ; en d'autres termes, il est difficile de procéder à l'intégration puisqu'on ne connaît pas habituellement la manière dont ρ, σ et τ dépendent du rayon R.

§ 398. **Conditions aux limites.** On appelle conditions aux limites les conditions qui régissent le champ aux limites de séparation des milieux, ayant des propriétés électriques différentes.

Dans la section « Phénomènes transitoires » une très grande importance a été jouée par les conditions initiales et les lois de commutation. Les conditions initiales et les lois de commutation ont permis de déterminer les constantes d'intégration lors de la résolution des problèmes par la méthode classique. Dans cette méthode elles ont été utilisées sous forme explicite et dans la méthode opérationnelle — sous forme implicite. Sans les utiliser on ne peut résoudre aucun problème concernant les phénomènes transitoires.

On peut établir un parallèle entre le rôle joué par les conditions aux limites dans l'étude d'un champ électrique (ou un autre champ quelconque) et le rôle des conditions initiales et des lois de commutation pour le calcul des phénomènes transitoires.

En intégrant les équations de Laplace (ou de Poisson) on a affaire à des constantes d'intégration. C'est ces constantes qui sont déterminées à partir des conditions aux limites. Avant de passer à l'examen détaillé des conditions aux limites, examinons le problème d'un champ à l'intérieur d'un corps conducteur en électrostatique.

§ 399. **Champ à l'intérieur d'un corps conducteur en électrostatique.** Considérons un corps conducteur quelconque se trouvant dans un champ électrostatique. Ce corps peut être chargé, si on lui a communiqué de l'extérieur une certaine charge, comme il peut ne pas être chargé. Examinons ces deux cas séparément.

Si le corps n'est pas chargé, sa charge globale est naturellement nulle. Du fait que le corps est placé dans un champ électrostatique, il s'y produit une séparation des charges, due à l'induction électrostatique. Il résultera de cette séparation que des charges négatives s'accumulent sur la surface du corps se trouvant du côté du potentiel plus élevé (voir fig. 404), et que des charges positives se concentrent sur le côté opposé. Quoique la somme des charges du corps reste nulle, les charges accumulées sur la surface du corps exercent une influence notable sur le champ à l'extérieur du corps conducteur, ainsi que sur le champ à l'intérieur de ce corps. Dans la région extérieure au corps et surtout à proximité immédiate de ce dernier, le champ peut être fortement perturbé par rapport à celui qui aurait existé si ce corps conducteur n'était pas présent dans le champ.

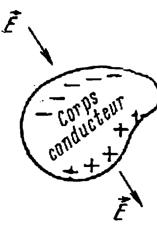


Fig. 404

En électrostatique tous les points d'un corps conducteur ont le même potentiel. On peut s'en assurer en supposant le contraire. Si on admet qu'en électrostatique il puisse exister une différence de potentiel entre deux points d'un corps conducteur, les électrons de ce corps commencent à se déplacer sous l'effet de cette différence de potentiel. Un mouvement ordonné des charges dans le corps est contraire à la définition même du champ électrostatique, comme d'un champ créé par des charges fixes (dans le sens macroscopique).

Tous les points d'un corps conducteur ayant le même potentiel, on peut en déduire que l'accroissement du potentiel, entre deux points quelconques infiniment voisins l'un de l'autre, est nul ; par conséquent, $\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}\vec{n}^0$ est également nul. Au point de vue physique l'intensité du champ à l'intérieur d'un corps conducteur est nulle (dans le sens macroscopique), puisque l'intensité due au champ extérieur est compensée par l'intensité, de grandeur égale et de signe contraire, due aux charges situées sur la surface du corps.

Si le corps est chargé, toutes les charges apportées de l'extérieur sur ce corps, ainsi que les charges qui se sont séparées dans le corps lui-même par suite du phénomène d'induction électrostatique, se placent également sur la surface du corps de manière que le potentiel de tous ces points soit le même et que l'intensité du champ à l'intérieur du corps soit nulle.

§ 400. Conditions existant à la surface de séparation d'un corps conducteur et d'un diélectrique. Deux conditions sont toujours satisfaites à la surface de séparation entre un corps conducteur et un diélectrique: 1) absence de la composante tangentielle (à la surface) du champ:

$$E_t = 0 \tag{13.32}$$

et 2) égalité numérique du vecteur de polarisation électrique $\vec{D}$ en un point quelconque du diélectrique, immédiatement voisin de la surface du corps conducteur et de la densité de la charge σ sur la

surface du corps conducteur au point considéré, c'est-à-dire

$$D = \sigma. \tag{13.33}$$

Examinons la première condition. Tous les points de la surface d'un corps conducteur ont le même potentiel. Par conséquent, l'accroissement du potentiel entre deux points quelconques de la surface du corps, suffisamment voisins l'un de l'autre, est $d\varphi = 0$; mais $d\varphi = E_t dl$ et, par conséquent, $E_t dl = 0$.

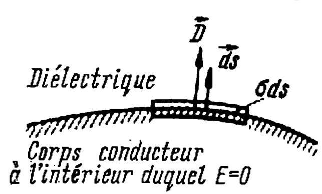


Fig. 405

Puisque l'élément de parcours dl entre deux points de la surface n'est pas nul, c'est que $E_t = 0$.

Pour démontrer la deuxième condition, isolons mentalement un parallélépipède infiniment petit (fig. 405). Sa face supérieure est parallèle à la surface du corps conducteur et est située dans le diélectrique. Sa face inférieure se trouve dans le corps conducteur. Supposons la hauteur du parallélépipède très petite (c'est un parallélépipède aplati). Appliquons à ce parallélépipède le théorème de Gauss. Du fait que ces dimensions linéaires sont très petites, on peut admettre que la densité de la charge σ sur la surface ds du corps conducteur, se trouvant à l'intérieur du parallélépipède, est la même partout. La charge globale à l'intérieur du volume examiné est égale à $\sigma\, ds$.

Le flux du vecteur $\vec{D}$ à travers la face supérieure du volume est égal $D\vec{ds} = D\, ds$.

Le flux du vecteur $\vec{D}$ à travers les faces latérales du volume est nul du fait que ce volume est très petit et que le vecteur $\vec{D}$ glisse le long de ces faces. Il n'existe pas de flux non plus à travers le « fond » du volume, car à l'intérieur d'un corps conducteur $E = 0$ et $D = 0$ (ε d'un corps conducteur est une grandeur finie). Ainsi le flux du vecteur $\vec{D}$, sortant du volume est égal à $D\, ds = \sigma\, ds$, autrement dit $D = \sigma$.

§ 401. Conditions à la surface de séparation de deux diélectriques à permittivités différentes. Les conditions suivantes sont satisfaites à la surface de séparation de deux diélectriques:

1. Les composantes tangentielles de l'intensité du champ sont égales

$$E_{1t} = E_{2t}. \tag{13.34}$$

2. Les composantes normales de l'induction électrique sont de même égales

$$D_{1n} = D_{2n}. \tag{13.35}$$

L'indice 1 se rapporte au premier diélectrique et l'indice 2 au deuxième.

La première condition découle du fait que dans un champ dérivant d'un potentiel $\oint \vec{E}\, \vec{dl} = 0$, quel que soit le circuit formé. La deuxième condition est la conséquence directe du théorème de Gauss. Démontrons

d'abord la première condition. A cette fin, prenons un contour plan fermé *mnpqm* (fig. 406) et écrivons la circulation du vecteur d'intensité du champ électrique le long de ce contour. La partie supérieure du contour est placée dans le diélectrique à permittivité ε_2 et la partie inférieure se trouve dans le diélectrique à permittivité ε_1. Désignons par dl la longueur du côté mn, égale à la longueur du côté pq. Choisissons ce circuit de manière que les dimensions de np et qm soient infiniment

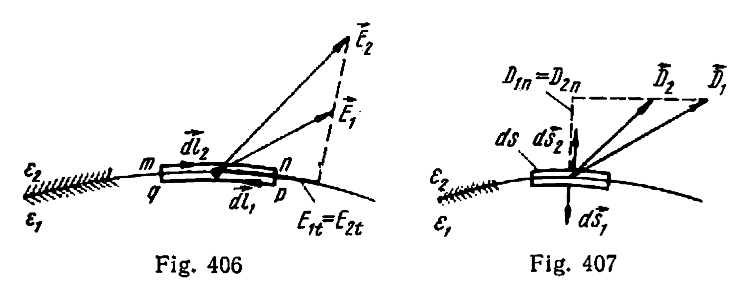


Fig. 406 Fig. 407

petites par rapport à dl. Par conséquent, nous pouvons négliger les composantes de l'intégrale $\oint \vec{E}\,\vec{dl}$ le long des côtés verticaux, comme étant très petites.

La composante $\oint \vec{E}\,\vec{dl}$ sur le parcours mn est égale à $\vec{E}_2\,\vec{dl}_2 = E_{2t}\,dl$, et sur le parcours pq $\vec{E}_1\,\vec{dl}_1 = -E_{1t}dl$.

Le signe — est dû au fait que l'élément de longueur sur le parcours pq et la composante tangentielle du vecteur $\vec{E}_1$ sont dirigés dans des sens opposés ($\cos 180° = -1$).

Ainsi $\oint \vec{E}\,\vec{dl} = E_{2t}dl - E_{1t}\,dl = 0$ ou $E_{1t} = E_{2t}$.

Assurons-nous maintenant que la deuxième condition est satisfaite.

A cette fin isolons un parallélépipède de très petites dimensions à la surface de séparation de deux milieux (fig. 407). A l'intérieur du volume ainsi isolé, il existe des charges liées, mais il n'y a pas de charges libres (nous examinerons à part le cas de présence de charges libres sur la surface de séparation) ; par conséquent,

$$\oint \vec{D}\,\vec{ds} = 0.$$

Le flux du vecteur $\vec{D}$ à travers la face supérieure, à aire ds, est égal à $\vec{D}_2\,\vec{ds}_2 = D_{2n}\,ds$. Le flux à travers la face inférieure $\vec{D}_1\,\vec{ds}_1 = D_{1n}\,ds_1$ $\cos 180° = -D_{1n}\,ds$;

$$|\vec{ds}_1| = |\vec{ds}_2| = ds.$$

Par conséquent,

$$\oint \vec{D}\,\vec{ds} = -D_{1n}\,ds + D_{2n}\,ds = 0$$

ou

$$D_{1n}=D_{2n}.$$

Lorsqu'il existe des charges libres de densité σ sur la surface de séparation de deux milieux (ce qui est très rare)

$$\oint \vec{D}\,\vec{ds}=D_{2n}\,ds-D_{1n}\,ds=\sigma\,ds,$$

autrement dit, on a alors

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma. \tag{13.36}$$

En d'autres termes, lorsqu'il existe des charges libres sur la surface de séparation de deux milieux, la composante normale du vecteur D varie par saut; la valeur de la variation est égale à la densité des charges libres sur la surface de séparation.

Le potentiel étant un travail (voir § 380), il ne subit pas de changements brusques à la surface de séparation de deux milieux.

§ 402. Théorème d'unicité de la solution. Un champ électrostatique est décrit par l'équation de Laplace (ou de Poisson). Cette dernière est une équation aux dérivées partielles. Une équation aux dérivées partielles, contrairement aux équations différentielles ordinaires, admet en général une multiplicité de solutions linéairement indépendantes. Mais naturellement, pour chaque problème concret le champ ne peut avoir qu'un aspect unique, autrement dit, il ne peut exister qu'une solution unique. Le choix d'une solution unique, correspondante au problème concret considéré, parmi la multiplicité des solutions linéairement indépendantes, pouvant satisfaire à l'équation de Laplace — Poisson, se fait justement à l'aide des conditions aux limites *.

S'il existe une certaine fonction, qui satisfait à l'équation de Laplace — Poisson et aux conditions aux limites dans le champ considéré, c'est cette fonction qui est la solution unique que l'on cherche. C'est en ceci que consiste le sens de la notion très importante, appelée habituellement théorème d'unicité de la solution.

§ 403. Généralités sur les problèmes d'électrostatique et les méthodes de leur solution. Les problèmes d'électrostatique peuvent être répartis en trois types, suivant les valeurs données et ce sont les valeurs qu'il faut chercher.

Problème de premier type: connaissant la répartition du potentiel dans l'espace φ (x, y, z), trouver la distribution des charges libres ayant donné naissance au champ considéré. Les problèmes de cette nature peuvent être résolus à l'aide de l'équation de Poisson. C'est le type de problèmes le plus simple — $\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}$ au point considéré du champ, conformément à l'équation de Poisson, est égal à la somme des dérivées partielles secondes de φ, lorsqu'on a substitué dans cette somme les coordonnées du point considéré du champ.

---

* La manière dont on retient, à l'aide des conditions aux limites, les solutions nécessaires et dont on rejette les solutions superflues de l'équation de Laplace est décrite aux §§ 417 et 418.

L'un des problèmes du premier type est examiné dans l'exemple 189 *.

Problème du deuxième type: on connaît la loi de distribution des charges libres dans l'espace, en fonction des coordonnées $\rho_{lib}(x, y, z)$, et on demande de trouver la loi de variation du potentiel dans l'espace $\varphi_{lib}(x, y, z)$. Ce problème, inverse au précédent, est nettement plus compliqué que celui-ci. En principe, le problème consiste à résoudre l'équation de Poisson par rapport à φ, autrement dit une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Plusieurs problèmes de ce type sont examinés dans les exemples de 184 à 187.

Les problèmes du premier et du deuxième types se rencontrent rarement dans la pratique. Dans la très grande majorité des cas on a affaire aux problèmes du troisième type.

Problème du troisième type : on connaît les potentiels (ou les charges totales) et la géométrie des corps ayant créé le champ. On demande de trouver la loi de variations de E ou de φ en tous les points de ce champ.

Plusieurs problèmes du troisième type sont examinés aux §§ de 416 à 419 et dans les exemples 177, 182 et 183.

Si le milieu, dans lequel le champ a été créé, n'est pas homogène, on doit le diviser en plusieurs domaines homogènes et résoudre les équations de Laplace séparément pour chacun de ces domaines. Ce problème comporte la difficulté principale suivante: tout en connaissant les charges globales des corps, on ignore la densité avec laquelle ces charges sont réparties sur les diverses régions du corps chargé. Les solutions de l'équation de Laplace pour les diverses régions doivent être raccordées l'une à l'autre, et pour cela les conditions aux limites doivent être satisfaites à la surface de séparation de deux milieux à ε différents. Sur la surface de séparation d'un corps conducteur et d'un diélectrique, les conditions aux limites appropriées doivent être également satisfaites.

Les problèmes se rapportant au troisième groupe peuvent être résolus soit par la méthode analytique ou graphique, soit par la méthode de simulation électrique.

Nous donnerons dans le présent paragraphe seulement la caractéristique sommaire de ces méthodes (des voies de solution), afin que le lecteur puisse se faire une certaine idée préalable des méthodes auxquelles il aura affaire. Un exposé plus détaillé de ces méthodes sera fait par la suite à l'aide d'exemples concrets.

Dans les cas les plus simples, les problèmes de calcul analytique des champs sont résolus en utilisant le théorème de Gauss dans sa forme

---

* Le problème dans lequel on connaît l'expression du potentiel φ, en fonction des coordonnées et on demande de trouver la distribution des charges superficielles ou linéaires, ayant créé ce champ, lorsqu'il n'y existe pas de charges volumiques, est proche des problèmes du premier type. Si les charges sont situées sur les surfaces des corps conducteurs, la densité de la charge, conformément à l'expression (13.33), $\sigma = \varepsilon E_n$, où $E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. L'indice n désigne le sens, normal à la surface du corps.

intégrale (§ 391). Dans des cas plus compliqués, la solution analytique des problèmes du troisième groupe est obtenue en résolvant l'équation de Laplace.

Les méthodes analytiques de solution des problèmes du troisième groupe peuvent être subdivisées en deux sous-groupes. Pour le premier d'entre eux on procède à l'intégration de l'équation de Laplace, sans faire appel aux méthodes auxiliaires (artificielles). Pour le deuxième de ces groupes, le problème est résolu en faisant appel à une méthode artificielle, celle des images symétriques. Dans la méthode des images symétriques la solution est obtenue en introduisant une charge ou des charges auxiliaires, qui remplacent pour les besoins de calcul les charges liées, apparaissant aux limites des corps et des milieux du fait de leur polarisation ou du fait de l'induction électrostatique (§§ de 409 à 412).

Lorsque le potentiel φ est fonction d'une seule coordonnée du système des coordonnées choisies, l'équation de Laplace n'est plus une équation aux dérivées partielles, mais devient une équation différentielle du second ordre, qui peut être intégrée sans difficultés (exemples de 182 à 184).

Si, par contre, le potentiel φ est fonction de deux ou trois coordonnées, il faut, pour intégrer l'équation de Laplace, faire appel à la méthode de Fourier — Bernoulli en passant de l'équation aux dérivées partielles à un ensemble équivalent de deux ou, respectivement, trois équations différentielles ordinaires (§ 416).

La méthode graphique d'analyse et de calcul des problèmes du troisième groupe est une méthode dans laquelle on construit, suivant des règles déterminées, une famille de lignes de force et de lignes équipotentielles, en utilisant certaines propriétés préalablement connues du champ examiné. Ces règles sont pratiquement les mêmes pour tous les champs invariables dans le temps, c'est-à-dire pour le champ électrostatique, le champ électrique de courant continu dans un milieu conducteur (chap. XIV) et pour un champ magnétique de courant continu (chap. XV). La méthode graphique étant le plus souvent utilisée pour l'analyse des champs magnétiques, nous examinerons cette méthode non pas au chapitre présent, mais au chapitre consacré au champ magnétique de courant continu (§ 456).

L'analyse et le calcul des champs électrostatiques par la méthode de simulation reposent sur l'utilisation de l'analogie entre un champ électrostatique et un champ électrique de courant continu dans un milieu conducteur.

Dans la méthode de simulation on substitue à chaque problème électrostatique un problème similaire concernant un champ électrique de courant continu dans un milieu conducteur, l'ensemble des lignes de force et des lignes équipotentielles de ce dernier étant pratiquement le même que dans le problème électrostatique.

Cette similitude permet d'appliquer les résultats d'une étude expérimentale du champ dans un milieu conducteur à un problème électrostatique analogue. Nous allons examiner cette méthode en détail au chapitre XIV (§§ 429 à 431). Il y a lieu de remarquer également qu'on utilise largement la méthode de superposition dans les calculs des champs.

Passons maintenant à l'examen de certains problèmes électrostatiques les plus simples.

§ 404. Champ d'un axe chargé. On entend ici par axe chargé un conducteur métallique d'une longueur théoriquement infinie (un fil très fin). On désigne habituellement par τ sa charge linéique. La permittivité du milieu environnant l'axe est égale à ε. Pour trouver l'intensité du champ en un certain point éloigné de l'axe de la distance r (fig. 408), faisons passer par ce point une surface cylindrique de manière que l'axe de cette surface coïncide avec l'axe chargé.

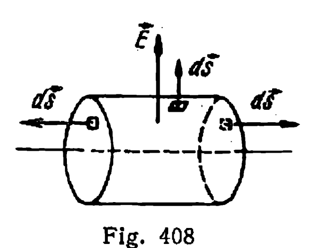


Fig. 408

Appliquons le théorème de Gauss. Ce théorème est valable pour une surface fermée. Dans notre cas, cette dernière est constituée par la surface latérale du cylindre et par ses deux fonds. Le flux du vecteur $\vec{E}$ ne traverse que la surface latérale du cylindre. Il n'y a pas de flux du vecteur $\vec{E}$ à travers les fonds, car l'élément de surface $\vec{ds}$ de chaque fond est perpendiculaire à $\vec{E}$.

Les éléments $\vec{ds}$ de la surface latérale et le champ électrique $\vec{E}$ en un point quelconque de la surface cylindrique ont la même direction et, par conséquent,

$$E\cdot 2\pi r\cdot 1=\frac{\tau}{\varepsilon} \text{ ou } E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}. \qquad (13.37)$$

L'intensité du champ d'un axe chargé varie en raison inverse de la distance r entre ce point et l'axe.

Potentiel du champ :

$$\varphi=-\int E\,dr=-\int\frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}dr=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r+C=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r}+C. \qquad (13.38)$$

Le potentiel varie suivant une loi logarithmique.

§ 405. Champ de deux axes parallèles chargés. Soit $+\tau$ la charge par unité de longueur de l'un des axes et $-\tau$ la charge linéique de l'autre axe. Prenons dans ce champ un certain point arbitraire M (fig. 409). La résultante de l'intensité du champ $\vec{E}_m$ en ce point est égale à la somme géométrique des intensités dues aux deux charges. Désignons par a la distance entre le point M et l'axe à charge positive et par b sa distance jusqu'à l'axe à charge négative. Le potentiel est une fonction scalaire. Celui du point M

$$\varphi_M=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{a}+\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{b}+C=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}+C. \qquad (13.39)$$

L'équation d'une ligne équipotentielle dans le champ de deux axes chargés est $\frac{b}{a}=\text{const}$.

Donc la ligne équipotentielle est un ensemble des points, dont le rapport de la distance jusqu'aux deux points donnés est constant.

On connaît en géométrie le théorème d'Apollonios. Conformément à ce théorème, le lieu géométrique des points, dont le rapport des distances à deux points donnés est constant, est une circonférence. Par conséquent, une ligne équipotentielle dans le champ de deux axes chargés est également une circonférence. Examinons la manière de la construire. Réunissons le point M aux deux axes. Traçons les bissectrices des angles interne (aMb) et externe (pMa). Les points *1* et *2* de l'intersection de ces bissectrices avec la ligne passant par les axes chargés, ainsi que le point M, seront trois points de la circonférence cherchée.

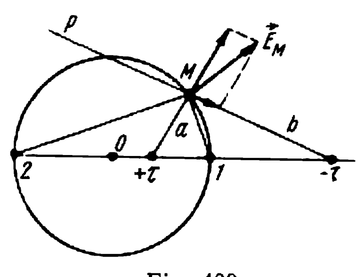


Fig. 409

Pour déterminer le centre de cette circonférence (du point O) divisons par deux la distance entre les points *1* et *2*.

§ 406. Champ d'une ligne à deux conducteurs. Désignons par d l'entraxe des deux conducteurs de la ligne (fig. 410) et par r le rayon de chacun d'eux. Si on communique par exemple au conducteur gauche la charge linéique τ et si on confère la charge $-\tau$ au conducteur droit, un champ électrique apparaît dans l'espace entre les deux conducteurs. Les charges des conducteurs sont distribuées sur leurs surfaces avec une densité inégale.

La surface de chaque conducteur, prise séparément, est équipotentielle. A l'intérieur des conducteurs $E = 0$. Le problème d'un champ d'une ligne à deux conducteurs se ramène au problème du champ de deux axes chargés, qu'on vient d'examiner. Plaçons deux axes chargés de manière que les surfaces des conducteurs soient équipotentielles.

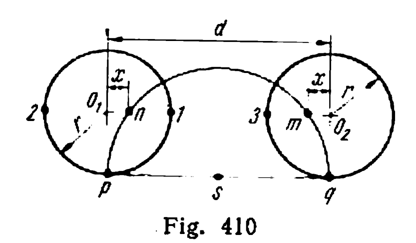


Fig. 410

Les points O_1 et O_2 sont les axes géométriques des conducteurs. Admettons que les axes chargés soient disposés aux points m et n. Du fait de la symétrie ces points sont situés à la même distance x des axes géométriques.

Ecrivons la condition d'égalité des potentiels des points *1* et *2* du conducteur gauche. Le rapport $\frac{b}{a}$ pour le point *1* n'est autre chose que $\frac{d-r-x}{r-x}$. Le rapport $\frac{b}{a}$ pour le point *2* est égal à $\frac{d+r-x}{r+x}$.

En partant de l'égalité

$$\frac{d-r-x}{r-x} = \frac{d+r-x}{r+x}$$

nous avons

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2}. \tag{13.40}$$

Dans cette dernière expression le signe —, figurant devant le radical, correspond à la position du point n et le signe + à la position du point m.

Au lieu d'être calculer à partir de l'expression (13.40), la position des axes chargés (qu'on appelle souvent *axes électriques* des conducteurs) est trouvée à l'aide des constructions graphiques suivantes.

Traçons une tangente commune aux conducteurs (droite pq), divisons par deux la distance entre les points de tangence (point s) et traçons à partir de ce point une circonférence de rayon ps. Les points d'intersection (m et n) de cette circonférence avec la ligne O_1O_2 donnent les positions des axes électriques, c.-à-d. des axes sur lesquels on peut concentrer mentalement les charges des conducteurs, afin que les surfaces de ces conducteurs soient équipotentielles. Le champ dû aux deux axes chargés, satisfaisant à l'extérieur des conducteurs à l'équation de Laplace, et les conditions aux limites étant satisfaites (la surface de chaque conducteur est équipotentielle et pour elle $E_t = 0$), la solution ainsi trouvée est vraie en vertu du théorème d'unicité.

Il est facile de constater que si $d \gg r$, x devient nettement inférieur à r. Dans ce cas les axes électriques et géométriques coïncident pratiquement.

§ 407. Capacité. Si deux conducteurs quelconques sont séparés par un diélectrique et portent des charges Q de valeur égale et de signes contraires, un champ électrique est créé dans l'espace entre ces conducteurs. Soit U la différence de potentiel entre ces corps.

On appelle *capacité C entre deux corps*, portant des charges égales et ayant des signes contraires, la valeur absolue du rapport de la charge sur l'un de ces corps à la tension U entre eux. Elle s'écrit comme suit :

$$C = \frac{Q}{U}. \tag{13.41}$$

L'unité de mesure de la capacité : $1C/V = 1F$, découle de la définition de cette dernière. C'est une unité très grande et, par conséquent, dans la pratique on emploie habituellement des unités plus petites, sous-multiples de cette dernière : le microfarad (μF) et picofarad (pF) :

$$1\mu F = 10^{-6} F,$$
$$1pF = 10^{-12} F.$$

Les dispositifs, destinés à obtenir une capacité d'une valeur *déterminée* sont appelés *condensateurs*. Mais il ne faut pas en déduire que la capacité est une propriété uniquement des dispositifs créés spécialement pour l'obtenir. Deux corps conducteurs quelconques séparés par un diélectrique possèdent une capacité *.

Du fait que la tension entre deux corps dans un champ électrostatique peut être exprimée linéairement en fonction de la charge Q (à

* On rencontre quelquefois dans les publications spécialisées l'expression *capacité d'un corps isolé*. Cette capacité correspond au rapport de la charge de ce corps à son potentiel, en supposant que le deuxième corps soit éloigné à l'infini et que son potentiel soit nul.

l'exception des dispostifs dans lesquels on utilise les seignetodiélectriques, substances pour lesquelles ε est une fonction de E), le rapport $\frac{Q}{U}$ s'avère indépendant de la valeur Q comme de la valeur U.

La capacité dépend seulement de la configuration des corps, de leurs dimensions, de la distance entre ces corps, et des propriétés électriques du diélectrique (de la valeur de ε). Examinons à titre d'exemple le calcul de la capacité d'une ligne à deux conducteurs.

§ 408. Capacité d'une ligne à deux conducteurs. Exprimons la tension entre deux conducteurs en fonction de la charge linéique τ. Le point 1 (fig. 410) appartient à la surface du conducteur gauche et le point 3 à celle du conducteur droit. La différence de potentiel entre eux

$$U_{13}=\varphi_1-\varphi_3=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d-r-x}{r-x}-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r-x}{d-r-x}.$$

Pour $d \gg r,\ x \ll r$

$$U_{13}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\cdot 2\cdot\ln\frac{d}{r}=\frac{\tau}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r}. \qquad (13.42)$$

Par conséquent, la capacité d'une unité de longueur de la ligne, à condition que $d \gg r$, est déterminée de la manière suivante :

$$C=\frac{\tau}{U_{13}}=\frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{d}{r}}. \qquad (13.43)$$

On voit en effet, qu'elle dépend seulement des dimensions géométriques et des propriétés du milieu et ne dépend pas de la valeur de la charge τ et de celle de la tension U_{13}. Lorsque la distance entre les deux conducteurs augmente, la capacité diminue.

§ 409. Méthode des images symétriques. On utilise largement pour le calcul des champs électrostatiques et, en particulier, des champs limités par une surface conductrice quelconque, de forme régulière, ou des champs dans lesquels il existe entre les deux diélectriques, une surface de séparation de forme géométrique régulière, une méthode de calcul qu'on appelle méthode des images symétriques.

C'est une méthode de calcul artificielle. Dans cette méthode on utilise en plus des charges données également des charges auxiliaires, dont les valeurs et l'emplacement sont choisis de manière à satisfaire aux conditions aux limites du champ considéré. Si la frontière entre les deux milieux est plane, les charges auxiliaires (« fictives ») sont placées là où se trouvent les symétriques (dans le sens géométrique) des charges données. La méthode des images symétriques est largement utilisée non seulement pour le calcul des champs électrostatiques. Elle est également employée pour le calcul des champs électriques dans un milieu conducteur, ainsi que des champs magnétiques. L'emploi de cette méthode, ainsi que la solution obtenue à l'aide de cette dernière reposent sur le théorème d'unicité.

Examinons deux exemples d'utilisation de la méthode des images symétriques.

§ 410. Champ d'un axe chargé, disposé auprès d'un plan conducteur. Un axe chargé (dont τ est la charge linéique) est placé parallèlement à la surface d'un milieu conducteur (fig. 411, *a*). Ce milieu conducteur peut être constitué par une paroi métallique quelconque ou par la terre, par exemple. On demande de déterminer le caractère du champ dans le demi-plan supérieur (dans le diélectrique).

Des charges apparaissent sur la surface du corps conducteur en vertu du phénomène d'induction électrostatique. Leur densité varie en fonction de la coordonnée x. Le champ dans le diélectrique est créé non seulement par l'axe chargé, mais également par les charges apparues sur la surface du corps conducteur par suite du phénomène d'induction

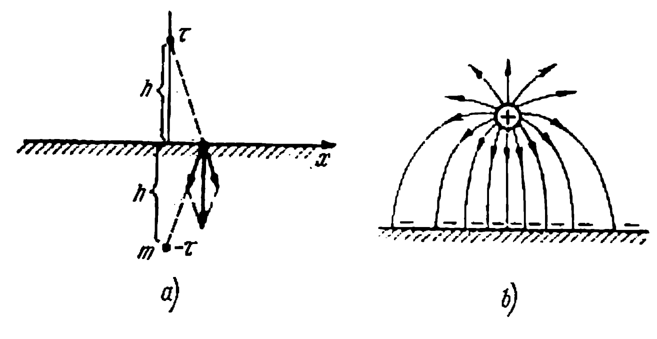


Fig. 411

électrostatique. Quoique la répartition de la densité superficielle de charges soit inconnue, ce problème peut être résolu assez facilement à l'aide de la méthode des images reflétées.

Plaçons au point m une charge fictive de signe contraire ($-\tau$) par rapport à la charge donnée τ. La distance h entre le point m et la surface de séparation des milieux est la même que la distance entre la charge réelle et cette surface. L'image est réalisée justement pour satisfaire à cette condition. Dans le problème considéré la charge fictive est numériquement égale à la charge donnée, mais a un signe contraire. Ceci n'est pas toujours vrai, autrement dit ce n'est pas dans tous les problèmes que la charge introduite artificiellement est numériquement égale à la charge donnée et a un signe contraire.

Assurons-nous que l'intensité du champ, due aux deux charges (τ) et ($-\tau$), en un point quelconque de la surface de séparation a seulement une composante normale à cette surface et n'a pas de composante tangentielle. En effet, les composantes tangentielles des deux charges ont des directions opposées et leur somme est nulle en un point quelconque de la surface.

On peut se rendre compte facilement, que le potentiel dû à chacun des axes, et déterminé par l'expression (13.38), satisfait à l'équation de Laplace (13.30). Pour le vérifier il faut substituer le second membre

de (13.38) dans (13.30) et s'assurer que $\nabla^2\varphi$ est nul

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r}\right)\right]=0.$$

Puisque le potentiel dû à chacun des axes satisfait à l'équation de Laplace et qu'en même temps la condition aux limites est satisfaite, la solution obtenue est juste en vertu du théorème d'unicité.

L'image du champ d'un axe chargé, placé parallèlement à un plan conducteur, est représentée sur la fig. 411, *b*. Les lignes de force sont perpendiculaires à la surface du conducteur et à la surface du plan conducteur. Les signes —, figurant sur la surface du plan conducteur, désignent les charges négatives apparues sur cette surface par suite de l'induction électrostatique.

§ 411. Champ d'un axe chargé, disposé auprès d'une surface de séparation plane entre deux diélectriques à permittivités différentes. Le demi-espace supérieur est rempli de diélectrique à permittivité ε_1, et le demi-espace intérieur de diélectrique à permittivité ε_2 (fig. 412, *a*) ; *ab* est

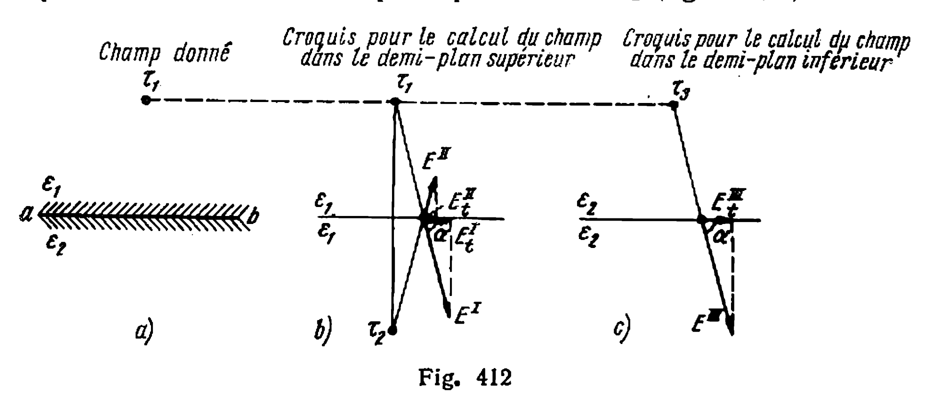


Fig. 412

la surface de séparation des deux milieux. Par suite de la polarisation des diélectriques, des charges liées apparaissent sur cette surface. Ces charges liées exercent une influence sur les champs dans les deux milieux. Pour tenir compte de l'influence des charges liées sur le champ étudié, on introduit deux charges fictives auxiliaires τ_2 et τ_3. Ce problème diffère du précédent par l'utilisation non pas d'une seule charge fictive, mais de deux. En effet dans le problème précédent il ne fallait satisfaire en fait qu'à une seule condition ($E_t = 0$) et ceci pouvait être obtenu à l'aide d'une seule charge. Par contre, dans le problème considéré il faut satisfaire non pas à une seule, mais à deux conditions aux limites. On ne peut satisfaire à deux conditions qu'à l'aide de deux inconnues.

Le champ en un point quelconque du demi-espace supérieur est calculé à partir des deux charges : la charge donnée τ_1 et la charge auxiliaire τ_2 ; le demi-espace supérieur, comme le demi-espace inférieur, sont remplis (pour les besoins du calcul) d'un diélectrique à permittivité ε_1 (fig. 412, *b*).

Le champ en un point quelconque du demi-espace inférieur est calculé comme un champ dû à une certaine charge auxiliaire τ_3, placée au point où se trouve déjà la charge τ_1. Dans ce cas, le demi-espace inférieur, comme le demi-espace supérieur, sont supposés remplis de diélectrique à permittivité ε_2 (fig. 412, *c*).

Ecrivons deux équations pour calculer les valeurs, inconnues jusqu'ici, de τ_2 et τ_3.

Il découle de la condition d'égalité des composantes tangentielles de l'intensité du champ à la limite de séparation que

$$E_t^{\mathrm{I}} + E_t^{\mathrm{II}} = E_t^{\mathrm{III}}$$

ou

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_1 r}[\tau_1 + \tau_2]\cos\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_2 r}\tau_3\cos\alpha.$$

Il s'ensuit

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau_3\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{13.44}$$

Il résulte de la condition d'égalité des composantes normales du vecteur $\vec{D}$ à la surface de séparation et en prenant comme sens positif pour cette normale le sens descendant, que

$$D_n^{\mathrm{I}} - D_n^{\mathrm{II}} = D_n^{\mathrm{III}}.$$

Ecrivons cette dernière ligne sous sa forme développée :

$$\frac{1}{2\pi r}(\tau_1 - \tau_2)\sin\alpha = \frac{1}{2\pi r}\tau_3\sin\alpha.$$

Par conséquent,

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_3. \tag{13.45}$$

La solution en commun de (13.44) et de (13.45) donne

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau_1 \tag{13.46}$$

et

$$\tau_3 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau_1. \tag{13.47}$$

Le signe de τ_2 est le même que le signe de la charge τ_1, si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Le signe de τ_3 est toujours le même que celui de τ_1.

Si le champ est créé non pas par un axe chargé, mais par une charge ponctuelle, la méthode de calcul reste tout à fait la même et les expressions (13.46) et (13.47) peuvent être utilisées pour les charges ponctuelles également. Seulement, dans ce cas on désigne par τ la valeur de la charge ponctuelle.

§ 412. Champ électrostatique d'un système de corps chargés, disposés auprès d'un plan conducteur. Prenons comme système de corps chargés une ligne à plusieurs conducteurs, constituée par n conducteurs très

longs à charge linéique τ_k (l'indice de la charge correspond au numéro du conducteur), tendus parallèlement à la surface de la terre *. La hauteur de la suspension et le rayon de chaque conducteur sont connus. On connaît également la permittivité ε du milieu environnant.

Prenons dans le diélectrique un point arbitraire quelconque M (fig. 413) et trouvons le potentiel de ce point. Le potentiel du point M est égal à la somme des potentiels créés par chaque conducteur et par son image symétrique. La composante du potentiel du point M due au conducteur *1* et à son image symétrique réfléchie s'écrit, conformément à (13.39), de la manière suivante (nous omettons la constante figurant dans l'expression du potentiel) :

$$\varphi_{M1}=\tau_1\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{1M}}{a_{1M}}.$$

Ici b_{1M} — distance entre le point M et l'image symétrique du premier conducteur, a_{1M} — distance entre le point M et le premier conducteur.

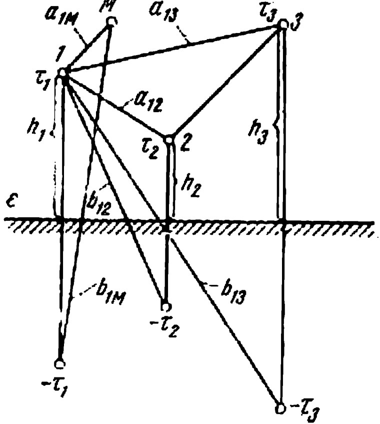


Fig. 413

Supposons que la hauteur de la suspension des conducteurs au-dessus de la terre est nettement plus grande que les rayons des conducteurs. Dans ces conditions leurs axes électriques coïncident pratiquement avec leurs axes géométriques.

Composante du potentiel du point M, due au deuxième conducteur et à son image réfléchie symétrique :

$$\varphi_{M2}=\tau_2\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{2M}}{a_{2M}}.$$

Ainsi,

$$\varphi_M=\varphi_{M1}+\varphi_{M2}+\varphi_{M3}+\ldots=\tau_1\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{1M}}{a_{1M}}+$$
$$+\tau_2\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{2M}}{a_{2M}}+\tau_3\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{3M}}{a_{3M}}+\ldots$$

§ 413. Coefficients potentiels. Premier groupe de formules de Maxwell. Le point M peut être placé sur la surface du premier conducteur. Dans ces conditions $\varphi_M=\varphi_1$; $b_{M1}=2h_1$; $a_{1M}=r_1$; $b_{M2}=b_{12}$ est la distance entre le premier conducteur et l'image symétrique du deuxième conducteur ; $a_{M2}=a_{12}$ — distance entre le premier et le second conducteurs, etc.

$$\varphi_1=\tau_1\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h_1}{r_1}+\tau_2\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{12}}{a_{12}}+\tau_3\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{13}}{a_{13}}+\ldots$$

* Ou dans le cas le plus général, parallèlement à la surface d'un milieu conducteur quelconque.

Les coefficients des charges τ_1, τ_2, etc. dépendent uniquement des dimensions géométriques des corps, de leur disposition réciproque et des propriétés du milieu. Ils ne dépendent ni de la valeur, ni du signe des charges et des potentiels.

Pour simplifier l'écriture, écrivons la dernière ligne et les autres lignes analogues de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_1\alpha_{11} + \tau_2\alpha_{12} + \tau_3\alpha_{13} + \dots \\ \varphi_2 &= \tau_1\alpha_{21} + \tau_2\alpha_{22} + \tau_3\alpha_{23} + \dots \\ \varphi_3 &= \tau_1\alpha_{31} + \tau_2\alpha_{32} + \tau_3\alpha_{33} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (13.48)$$

Ici

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{km} &= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{km}}{a_{km}}, \\ \alpha_{kk} &= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h_k}{r_k}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.48')$$

Le coefficient $\alpha_{km} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{km}}{a_{km}}$. Puisque $b_{mk} = b_{km}$ et $a_{mk} = a_{km}$ on a $\alpha_{km} = \alpha_{mk}$. Le système d'équations (13.48) est habituellement appelé premier groupe de *formules* de Maxwell (qu'il ne faut pas confondre avec la première *équation* de Maxwell ; cette dernière sera examinée au § 460).

Les coefficients α sont appelés *coefficients potentiels*. Leurs dimensions sont égales aux dimensions d'une unité de longueur, divisée par un farad.

Du fait que tous les coefficients α ont sous le logarithme une fraction dont le numérateur est toujours supérieur au dénominateur, tous les coefficients α sont positifs.

Les coefficients α peuvent être interprétés comme suit : supposons que les charges de tous les conducteurs, sauf le premier, soient nulles :

$$\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = 0 \text{ et } \tau_1 = 1.$$

Alors $\varphi_1 = \alpha_{11}$, c'est-à-dire que α_{11} est *numériquement* égal au potentiel du premier conducteur, s'il est porteur d'une charge unitaire et s'il n'y a pas de charges sur tous les autres conducteurs. De même dans les mêmes conditions α_{21} est *numériquement* égal au potentiel du deuxième conducteur. Le système (13.48) permet de calculer les potentiels des corps chargés en partant des charges totales connues de ces corps.

On peut parfois rencontrer le problème inverse : en partant des potentiels connus des corps trouver leurs charges totales.

§ 414. Coefficients capacitifs. Deuxième groupe de formules de Maxwell. Résolvons le système (13.48) par rapport aux charges, en supposant les potentiels φ et les coefficients α connus .

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \dots \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \dots \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (13.49)$$

Les coefficients $\beta_{kn} = \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}$. Ici on désigne par Δ le déterminant du système (13.48)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots \end{vmatrix}.$$

Le complément algébrique Δ_{kn} est obtenu à partir du déterminant du système Δ en biffant la ligne k et la colonne n et en multipliant le déterminant ainsi obtenu par $(-1)^{k+n}$.

Le système (13.49) est le *deuxième groupe de formules de Maxwell*. Les coefficients β sont appelés *coefficients capacitifs*. Leurs dimensions sont

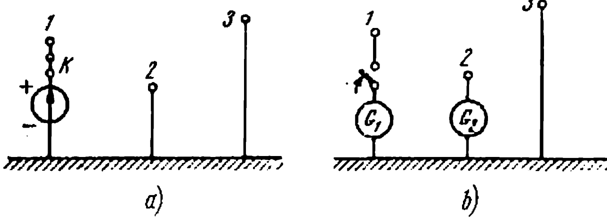


Fig. 414

inverses aux dimensions du coefficient α. Du fait que le déterminant du système Δ est symétrique par rapport à la diagonale principale, on a $\Delta_{kn} = \Delta_{nk}$ et par conséquent, $\beta_{kn} = \beta_{nk}$. Tous les β ayant deux indices identiques sont positifs et tous les β à deux indices différents sont négatifs.

Assurons-nous, par exemple, que β_{11} est positif et que β_{21}, β_{31} sont négatifs. A cette fin effectuons l'expérience suivante : mettons tous les conducteurs, sauf le premier, à la terre à l'aide de fils fins (afin de ne pas perturber le champ). Supposons que le potentiel de la terre soit nul. Il résulte alors de (13.49) que

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1, \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1, \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1. \end{aligned}\right\} \qquad (13.49')$$

Portons le premier conducteur à un potentiel positif par rapport à la terre en le raccordant à la terre par l'intermédiaire d'une pile, par exemple (fig. 414, *a*). La charge du premier conducteur est positive et le potentiel du premier conducteur est également positif ($\varphi_1 > 0$; $\tau_1 > 0$). La charge négative s'écoulera dans la terre et dans tous les corps qui lui sont raccordés électriquement. Tous les conducteurs, sauf le premier, du fait qu'ils sont raccordés électriquement à la terre, acquerront des charges négatives

$$\varphi_2 = 0 \ \tau_2 < 0,$$

$$\varphi_3 = 0 \ \tau_3 < 0.$$

Il résulte du système (13.49′) que $\beta_{11} = \frac{\tau_1}{\varphi_1} > 0$, $\beta_{21} = \frac{\tau_2}{\varphi_1} < 0$ et $\beta_{31} = \frac{\tau_3}{\varphi_1} < 0$.

Les coefficients β_{km} et β_{kk} peuvent être déterminés par voie expérimentale également. Examinons à titre d'exemple comment on peut calculer les coefficients β_{11} et β_{22}.

Après avoir porté la charge du conducteur *1* à un certain potentiel φ_1 (la clé *K* de la fig. 414, *a* étant enclenchée) ouvrir la clé *K*, enlever la pile, brancher les galvanomètres G_1 et G_2 (fig. 414, *b*) et, ensuite, fermer à nouveau la clé *K* ; le système se déchargera de ce fait ; G_1 mesure la charge τ_1 ; G_2 mesure la charge τ_2. Trouvons ensuite $\beta_{11} = \frac{\tau_1}{\varphi_1}$ et $\beta_{21} = \frac{\tau_2}{\varphi_1}$.

§ 415. Capacités partielles. Troisième groupe de formules de Maxwell. Le système (13.49) peut être écrit sous une autre forme également ; on fait figurer comme deuxième membre de chaque ligne non pas les potentiels, mais les différences de potentiel entre le corps considéré et tous les autres, y compris la terre.

Conformément à (13.49) la charge du corps *k* est

$$\tau_k = \beta_{kk}\varphi_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{m=n} \beta_{km}\varphi_m.$$

Le terme:

$$\beta_{km}\varphi_m = \beta_{km}(\varphi_m - \varphi_k + \varphi_k) = -\beta_{km}U_{km} + \beta_{km}\varphi_k.$$

Par conséquent,

$$\tau_k = \varphi_k\beta_{kk} + \varphi_k \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{m=n} \beta_{km} - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{m=n} \beta_{km}U_{km} = \varphi_k \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{km} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{m=n} (-\beta_{km})\, U_{km}.$$

Désignons par

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \ldots + \beta_{kk} + \ldots + \beta_{kn} = \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{km}, \qquad (13.50)$$

et

$$C_{km} = -\beta_{km}. \qquad (13.51)$$

On a alors

$$\tau_k = \varphi_k C_{kk} + U_{k1}C_{k1} + U_{k2}C_{k2} + \ldots = \varphi_k C_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{m=n} U_{km}C_{km}. \qquad (13.52)$$

En conférant à *k* successivement les valeurs 1, 2, 3 ... on obtient

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1 = \varphi_1 C_{11} + U_{12}C_{12} + U_{13}C_{13} + \ldots \\ \tau_2 = \varphi_2 C_{22} + U_{21}C_{21} + U_{23}C_{23} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}. \qquad (13.53)$$

Le système (13.53) est le *troisième groupe de formules de Maxwell*. Les coefficients C_{kk} sont appelés *capacités partielles propres* et les coefficients C_{km} *capacités partielles mutuelles*. On omet souvent les mots « propre » et « mutuelle ». Du fait que

$$\beta_{km} = \beta_{mk},$$

on a

$$C_{km} = C_{mk}.$$

Les dimensions des capacités partielles sont les mêmes que celles des coefficients capacitifs β. Toutes les capacités partielles sont positives. Du fait que $C_{km} = -\beta_{km}$ et que $\beta_{km} < 0$ il est évident que $C_{km} > 0$. Pour s'assurer que C_{kk} est positif effectuons l'expérience suivante : raccordons par des fils métalliques fins tous les autres conducteurs au conducteur k. Tous les $U_{km} = 0$ et il découle de (13.52) que $\tau_k = \varphi_k C_{kk}$.

Si on communique au conducteur k un potentiel positif par rapport à la terre (le potentiel de cette dernière étant considéré comme nul), en le raccordant au pôle + d'une pile, dont le pôle — est mis à la terre, τ_k et φ_k sont positifs et leur rapport est

$$C_{kk} = \frac{\tau_k}{\varphi_k} > 0.$$

C_{kk} s'avère positif bien qu'un grand nombre des coefficients négatifs β_{km} puissent entrer dans sa composition (voir 13.50) (le coefficient β_{kk} étant plus grand que $\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{m=n} \beta_{km}$). Conformément à (13.53) la charge totale du corps k est égale à la somme des charges. La charge $\varphi_k C_{kk}$ est due à la différence de potentiel entre le corps k et la terre ; $U_{km}C_{km}$ est la charge due à la différence de potentiel entre les corps k et m. Par conséquent, la capacité partielle C_{km} entre les corps k et m peut être interprétée comme suit : C_{km} est le rapport de la composante de la charge du corps k, due à la différence de potentiel U_{km} entre les corps k et m, à la valeur de cette différence de potentiel.

Pour rendre plus compréhensible le système (13.53) on peut se représenter que dans un système de trois conducteurs (fig. 415, *a*) le premier conducteur est en quelque sorte raccordé aux armatures de trois condensateurs C_{11}, C_{12} et C_{13}. Les charges aux armatures de ces condensateurs, orientées vers le conducteur *1*, sont respectivement égales à $\varphi_1 C_{11}$; $U_{12}C_{12}$; $U_{13}C_{13}$. Les charges aux autres armatures sont notées sur la fig. 415, *a*.

Les trois groupes de formules de Maxwell sont vrais pour un système de corps chargés de forme quelconque ; cependant si ces corps ont une forme arbitraire, les coefficients potentiels ne peuvent plus être calculés à l'aide des expressions (13.48') ; ces expressions sont vraies seulement pour un système de conducteurs linéaires parallèles, suffisamment longs.

Les coefficients capacitifs et les capacités partielles doivent être déterminés dans ce dernier cas par voie expérimentale.

Les capacités partielles sont utilisées non seulement dans les calculs des champs électrostatiques, mais sont également employées dans les calculs des phénomènes se déroulant très rapidement dans les circuits électriques, ainsi que dans les calculs de certains processus dans les circuits électriques, mettant en jeu des capacités partielles ; on peut citer comme exemple, la prise capacitive de puissance à partir d'une ligne de transport à haute tension. On doit en outre tenir compte des

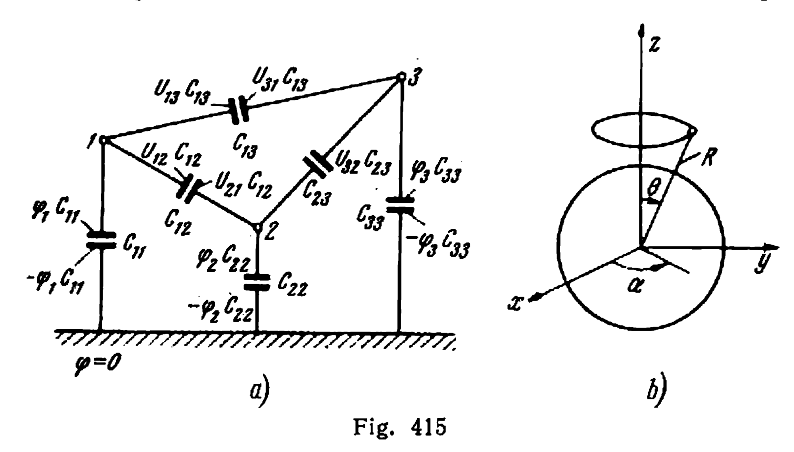


Fig. 415

capacités partielles entre les électrodes des tubes électroniques, ainsi qu'entre les électrodes des transistors lorsqu'on calcule des phénomènes très rapides.

§ 416. Sphère dans un champ uniforme. Si dans un champ uniforme * E_0 (voir fig. 415, *b*) on introduit une sphère métallique ou diélectrique (ε de la sphère étant différente de ε du milieu ambiant) le champ électrique, au voisinage immédiat de la sphère surtout, perturbe et cesse d'être uniforme. Le caractère de la perturbation du champ dépend des dimensions de la sphère, de son ε et de la charge de la sphère.

Si la sphère est métallique les lignes de force doivent s'approcher de sa surface sous un angle droit. Si la sphère métallique n'est pas chargée, il s'y produit une séparation des charges due au phénomène d'induction électrostatique. Les lignes des forces partent de ces charges ou aboutissent à elles.

Une sphère métallique peut aussi être chargée, c'est-à-dire porter une charge excédentaire répartie sur sa surface.

Si la sphère est en diélectrique, elle se polarise sous l'effet du champ extérieur. Les charges apparaissant sur la sphère par suite de sa polarisation perturbent le champ uniforme précédemment (avant l'introduction de la sphère). Les lignes de force s'approchent de la surface de la sphère de manière que les deux conditions aux limites (mentionnées au § 401) soient satisfaites.

---

* Dirigé de haut en bas (le long de l'axe des — z).

Ce problème est l'un des problèmes « classiques » les plus typiques. Si la sphère est métallique, $E = 0$ et $\varphi =$ const à l'intérieur de la sphère. Que la sphère soit métallique ou diélectrique, il n'existe pas de charges libres dans la région extérieure par rapport à la sphère et, par conséquent, le champ dans cette région est décrit par l'équation de Laplace.

Si la sphère est en diélectrique et si sa charge libre est nulle, le champ à l'intérieur de la sphère est également décrit par l'équation de Laplace. Ainsi, pour résoudre l'un ou l'autre de ces deux problèmes, il faut intégrer l'équation de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$. N'importe quel problème concret concernant l'intégration de l'équation de Laplace comprend comme première étape un choix judicieux du système de coordonnées. Le système de coordonnées doit être choisi de manière que les surfaces de séparation, existant dans le champ, puissent être décrites d'une manière commode. Dans notre problème la surface de séparation est une sphère. La sphère est décrite de la manière la plus commode dans un système de coordonnées sphériques. Par conséquent, nous utiliserons un système de coordonnées sphériques.

La deuxième étape de la solution consiste à rechercher si le champ étudié comporte une symétrie quelconque. L'existence de symétrie dans un champ facilite nettement la solution du problème. Dans le problème examiné le champ ne dépend pas de la coordonnée α. Procédons comme suit pour s'en assurer. Coupons mentalement le champ par un plan perpendiculaire à l'axe des Z du système cartésien et traçons dans ce plan une circonférence, de manière que son centre soit situé sur l'axe des Z. Pour tous les points de circonférence le rayon R, réunissant le point considéré à l'origine des coordonnées, a la même valeur ; en outre, l'angle θ situé dans le plan méridien entre le rayon R et l'axe Z est le même.

Tous les points de la circonférence se trouvent dans le champ dans des conditions identiques. Par conséquent, leur potentiel est le même. Mais la valeur de l'angle α caractérisant la position des points de cette circonférence diffère. Si, pour l'ensemble des points dont $R =$ const et $\theta =$ const et pour des valeurs différentes de l'angle α, φ est le même, cela veut dire que dans le champ considéré φ ne dépend pas de l'angle α. Par conséquent, ce champ est décrit par l'équation suivante (voir équation 13.31) :

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (13.54)$$

(la composante $\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}$ a été éliminée, puisque φ est indépendant de α). L'équation (13.54) est une équation aux dérivées partielles. Utilisons la méthode de Fourier — Bernoulli pour intégrer les équations aux dérivées partielles. Conformément à la méthode de Fourier — Bernoulli la solution pour la fonction cherchée (φ dans notre cas) est supposé être le produit de deux fonctions M et N inconnues dont l'une M dépend de R seulement et l'autre N de θ seulement :

$$\varphi = M(R)\,N(\theta) = MN. \qquad (13.55)$$

La forme des fonctions M et N doit être trouvée. L'adaptation d'une solution sous forme de produit de deux fonctions (13.55) permet de décomposer l'équation aux dérivées partielles (13.54) en deux équations différentielles ordinaires dont l'une est établie par rapport à M et l'autre par rapport à N.

Substituons (13.55) dans (13.54)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R}=N\frac{\partial M}{\partial R}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}=M\frac{\partial N}{\partial \theta}.$$

Par conséquent,

$$\frac{N}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)+\frac{M}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)=0. \qquad (13.56)$$

Multiplions (13.56) par $\frac{R^2}{MN}$

$$\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)+\frac{1}{N\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)=0. \qquad (13.57)$$

L'équation (13.57) a ceci de particulier que son premier terme n'est fonction que de R et que son second terme n'est fonction que de θ. La somme des deux fonctions, dont l'une dépend de R seulement, et l'autre de θ seulement, est nulle pour un nombre infini de couples de valeurs de R et de θ [l'équation (13.57) est valable pour tous les points du champ]. Ceci ne peut être vrai que si chacune de ces fonctions est nulle

$$\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)=0 \text{ et } \frac{1}{N\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial N}{\alpha\theta}\right)=0, \qquad (13.57')$$

ou si

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)&=p\\ \frac{1}{N\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)&=-p\end{aligned}\right\}. \qquad (13.57'')$$

Ici p — certain nombre inconnu pour l'instant.

Ainsi le problème a été réduit à l'intégration des équations (13.57') et (13.57''). La solution générale pour φ est égale, conformément à (13.55), au produit des solutions des équations (13.57') plus le produit des solutions pour M et N obtenus à partir de l'équation (13.57''). Trouvons la solution des équations (13.57'). Du fait que dans (13.57') M dépend uniquement de R et N uniquement de θ, on peut passer des dérivées partielles aux dérivées simples :

$$\frac{1}{M}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dM}{dR}\right)=0.$$

$$\frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dN}{d\theta}\right)=0.$$

L'intégrale de la première d'entre elles

$$M=\frac{A_1}{R}+A_2. \qquad (13.58)$$

Trouvons l'intégrale de la deuxième équation

$$\sin\theta \frac{dN}{d\theta} = A_3; \quad \frac{dN}{d\theta} = \frac{A_3}{\sin\theta}$$

ou

$$N = A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + A_4. \tag{13.59}$$

Démontrons que A_3 est nécessairement nul, car ce n'est qu'à cette condition que le terme suivant ne figure pas dans la solution

$$A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Le potentiel est une fonction continue et ne peut devenir une grandeur infiniment grande sur un tronçon fini. Il est évident, que pour des raisons physiques le potentiel des points de l'axe Z au voisinage de la sphère ne peut être égal à l'infini. Or, si $A_3 \neq 0$ le terme $A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ figurerait dans l'expression du potentiel ; ce terme est égal à ∞ pour tous les points pour lesquels $\theta = 0$ ($\operatorname{tg}\theta_{\theta=0} = 0$; $\ln \operatorname{tg}\theta_{\text{pour } \theta=0} = -\infty$).

Ainsi la solution partielle pour φ, résultante de (13.57′), est

$$\varphi = \frac{C_1}{R} + C_2 \; (C_1 = A_1A_4; \; C_2 = A_2A_4). \tag{13.60}$$

Trouvons la solution des équations (13.57″)

$$\frac{1}{M}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dM}{dR}\right) = p$$

ou

$$2R\frac{dM}{dR} + R^2 \frac{d^2M}{dR^2} = pM.$$

Utilisons la substitution d'Euler : $M = CR^n$

$$\frac{dM}{dR} = nCR^{n-1}; \quad \frac{d^2M}{dR^2} = n(n-1)\,CR^{n-2}.$$

Substituons ces dérivées dans l'équation précédente

$$2RnCR^{n-1} + R^2(n-1)\,nCR^{n-2} = pCR^n$$

ou

$$n^2 + n - p = 0.$$

La solution de l'équation du deuxième degré

$$n_{1\cdot 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p}. \tag{13.61}$$

Calculons la valeur de p en intégrant la deuxième équation (13.57″)

$$\frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dN}{d\theta}\right) = -p.$$

Sa solution est donnée par l'expression $N = B \cos\theta$. Assurons-nous en effectuant une substitution et trouvons en même temps la valeur de p

$$\frac{dN}{d\theta} = -B\sin\theta\,; \quad \sin\theta\frac{dN}{d\theta} = -B\sin^2\theta\,;$$

$$\frac{1}{N\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dN}{d\theta}\right) = -\frac{2B\sin\theta\cos\theta}{B\cos\theta\sin\theta} = -2 = -p.$$

Par conséquent,

$$p = 2.$$

Après avoir trouvé le nombre p substituons-le dans (13.61) et trouvons

$$n_1 = 1 \text{ et } n_2 = -2.$$

Ainsi, la solution en commun des équations (13.57″) donne l'expression suivante pour φ :

$$\varphi = \left(C_3R + \frac{C_4}{R^2}\right)\cos\theta.$$

La solution complète

$$\varphi = \frac{C_1}{R} + C_2 + \left(C_3R + \frac{C_4}{R^2}\right)\cos\theta \tag{13.62}$$

Quatre constantes inconnues C_1, C_2, C_3, C_4 figurent dans (13.62). La valeur de ces constantes dépend de la nature de la sphère (conductrice ou diélectrique) introduite dans le champ.

§ 417. Sphère conductrice dans un champ uniforme. Pour déterminer les quatre constantes en question il faudra avoir recours non seulement à la condition à satisfaire à la surface de la sphère, mais également aux conditions à réaliser à une très grande distance de cette sphère, théoriquement à une distance infinie ou, comme on l'appelle habituellement, « conditions à l'infini ».

L'ensemble de tous les points très éloignés de la sphère est considéré par convention comme « l'infini ». Si la sphère n'est pas chargée, tous les points du plan XOY passant par le centre de la sphère ont le même potentiel. Désignons-le par φ_0.

Lorsqu'on s'éloigne de la sphère à une très grande distance $Z = R \cos\theta$, par rapport à laquelle le rayon a de la sphère est très petit, l'effet perturbateur, exercé par la sphère sur le champ, ne se manifeste pas du tout (si la charge globale de la sphère est nulle) ou se manifeste comme une perturbation due à une charge ponctuelle (si la sphère porte une charge globale libre Q). Et le potentiel φ « à l'infini » s'exprime comme suit :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \varphi_0 + E_0R\cos\theta. \tag{13.63}$$

Le premier terme du second membre donne la composante du potentiel, due à la charge de la sphère Q, tandis que le terme $E_0R \cos\theta$ tient compte de l'accroissement du potentiel dû à l'intensité du champ uniforme E_0 sur le long du parcours $Z = R \cos\theta$. Du fait que la solution (13.62) est

valable même pour les points du champ très éloignés de la sphère (« infiniment » éloignés), on peut comparer les expressions (13.62) et (13.63). Elles doivent donner le même résultat. Ceci n'est vrai que lorsque les termes respectifs des deux équations sont égaux l'un à l'autre. Il résulte de la comparaison que

$$C_2 = \varphi_0\,; \quad C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\,; \quad C_3 = E_0.$$

La comparaison « à l'infini » ne permet pas de trouver la valeur de C_4, car il n'existe pas dans (13.63) de terme variant en raison inverse du carré de R. Pour trouver C_4 utilisons le fait qu'en électrostatique tous les points de la surface de la sphère ont le même potentiel, autrement dit que la composante tangentielle de l'intensité du champ sur la surface de la sphère est nulle. Pour $R = a$

$$\varphi = \text{const} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a} + \left(E_0 a + \frac{C_4}{a^2}\right)\cos\theta + \varphi_0.$$

Il est évident que le second membre peut rester constant lorsque θ varie seulement, lorsque $\left(E_0 a + \frac{C_4}{a^2}\right) = 0$. Il en découle que

$$C_4 = -E_0 a^3.$$

Ainsi pour tous les points du diélectrique

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \varphi_0 + E_0\left(R - \frac{a^3}{R^2}\right)\cos\theta. \tag{13.64}$$

Puisque le potentiel dépend seulement de R et θ, l'intensité du champ électrique n'a que deux composantes :

$$\left.\begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} - E_0\left(1 + \frac{2a^3}{R^3}\right)\cos\theta, \\ E_\theta &= -\frac{\partial\varphi}{R\,\partial\theta} = E_0\left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{13.64'}$$

Si $Q = 0$, on a sur la surface de la sphère (pour $R = a$)

$$E_R = -3E_0\cos\theta.$$

Pour $\theta = 0$ $E_R = -3E_0$; pour $\theta = 180°$ $E_R = 3E_0$, c'est-à-dire qu'en tous ces points l'intensité du champ est devenue trois fois plus grande que l'intensité du champ uniforme E_0, dans lequel cette sphère a été introduite. Par contre, à l'« équateur » pour $\theta = 90°$ l'intensité est devenue nulle.

Ainsi, une goutte d'eau ayant pénétré dans la cuve d'un transformateur remplie d'huile provoque un accroissement local notable de l'intensité du champ.

§ 418. Sphère diélectrique dans un champ uniforme. Si une sphère diélectrique non chargée est placée dans un champ uniforme, puisqu'il n'y a pas de charges libres à l'intérieur de cette sphère ni à l'extérieur de cette dernière, le champ peut être décrit par l'équation de Laplace.

Alors la solution générale (13.62) est valable pour résoudre ce problème également. Attribuons l'indice i aux grandeurs utilisées pour décrire le champ à l'intérieur de la sphère et utilisons l'indice e pour les grandeurs à l'aide desquelles on décrit le potentiel dans la région extérieure à la sphère. Ainsi nous aurons pour la région « intérieure »

$$\varphi_i = \frac{C_{1i}}{R} + C_{2i} + \left(C_{3i}R + \frac{C_{4i}}{R^2}\right)\cos\theta \tag{13.65}$$

et pour la région « extérieure »

$$\varphi_e = \frac{C_{1e}}{R} + C_{2e} + \left(C_{3e}R + \frac{C_{4e}}{R^2}\right)\cos\theta. \tag{13.66}$$

Il faut trouver 8 constantes d'intégration.

Le potentiel « à l'infini » est dans ce cas

$$\varphi = \varphi_0 + E_0 R\cos\theta.$$

Comparons cette dernière expression à (13.66) :

$$C_{2e} = \varphi_0 \text{ et } C_{3e} = E_0.$$

Nous avons examiné au § 392 le champ d'une charge ponctuelle. Nous y avons montré que le potentiel dans le champ d'une charge ponctuelle varie en raison inverse de R. Par conséquent, la composante $\frac{C_{1e}}{R}$ n'est autre chose que la composante du potentiel, due à la charge globale de la sphère considérée comme une charge ponctuelle. Du fait que la charge globale de la sphère est nulle, cette composante ne doit pas figurer dans l'expression de φ_e. En d'autres termes

$$C_{1e} = 0.$$

Par conséquent,

$$\varphi_e = \varphi_0 + \left(E_0 R + \frac{C_{4e}}{R^2}\right)\cos\theta. \tag{13.66'}$$

Dans cette dernière expression seule la constante C_{4e} est restée inconnue. Examinons l'expression du potentiel φ_1 pour la région intérieure. Elle doit donner une valeur finie pour tous les points à l'intérieur de la sphère. Ceci ne peut être vrai que lorsque $C_{1i} = 0$ et $C_{4i} = 0$ (si $C_{1i} \neq 0$, le terme $\frac{C_{1i}}{R}$ au centre de la sphère pour $R = 0$ serait infiniment grand). La constante C_{2i}, figurant dans le calcul du potentiel dans le champ considéré, est égale à la constante analogue $C_{2e} = \varphi_0$ pour la région extérieure.

Ainsi pour la région intérieure

$$\varphi_i = \varphi_0 + C_{3i}R\cos\theta. \tag{13.65'}$$

Les deux constantes C_{4e} et C_{3e}, demeurées inconnues, sont trouvées à partir des conditions aux limites.

Il résulte de l'égalité des potentiels φ_i et φ_e pour $R = a$ (cette condition, comme il est facile de le constater, est équivalente à la condition $E_{1t} = E_{2t}$), que

$$C_{3i}a = E_0 a + \frac{C_{4e}}{a^2}.$$

Il résulte de l'égalité des composantes normales du vecteur $\vec{D}$ à la limite des deux régimes, que

$$-\varepsilon_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial R}\right)_{R=a} = -\varepsilon_e \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial R}\right)_{R=a},$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_i C_{3i} = \varepsilon_e \left(E_0 - \frac{2C_{4e}}{a^3}\right).$$

La solution en commun de ces deux dernières équations donne

$$C_{3i} = E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}\ ;\ C_{4e} = a^3 E_0 \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}.$$

Potentiel de la région intérieure

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 R \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} \cos\theta = \varphi_0 + E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} z, \qquad (13.67)$$

$$z = R\cos\theta.$$

Potentiel de la région extérieur

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(R + \frac{a^3}{R^2} \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}\right) \cos\theta. \qquad (13.68)$$

L'intensité du champ à l'intérieur de la sphère

$$E_z = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = -E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}\ ; \qquad (13.69)$$

E est dirigé le long de l'axe des z et ne dépend pas des coordonnées du point. Ceci indique que le champ à l'intérieur de la sphère est uniforme.

Les lignes du vecteur $\vec{D}$ et les lignes équipotentielles (« l'image du champ ») sont représentées sur la fig. 416 pour les trois cas suivants :

a) lorsqu'on introduit dans un champ uniforme (avant l'introduction de la sphère) une sphère conductrice non chargée ;

b) lorsqu'une sphère diélectrique, dont ε_i est plus grand que ε_e du milieu ambiant, est introduite dans un champ uniforme (avant l'introduction de la sphère) ;

c) lorsque ε_i de la sphère diélectrique est inférieure à ε_e du milieu ambiant.

Nous avons déjà indiqué précédemment (voir § 393) que les lignes du vecteur $\vec{D}$ partent des charges libres. Ces lignes s'arrêtent à la surface d'une sphère métallique (fig. 416, a) et passent sans solution de continuité à travers une sphère diélectrique (fig. 416, b et c).

Si on traçait sur la fig. 416, *b* et *c* les lignes du vecteur de l'intensité du champ $\vec{E}$, à la place des lignes du vecteur $\vec{D}$, les lignes $\vec{E}$ subiraient une rupture à la surface des sphères.

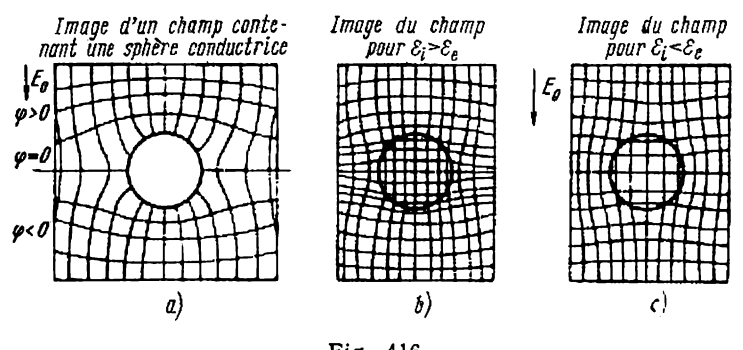


Fig. 416

§ 419. Cylindre diélectrique dans un champ uniforme. Les expressions permettant de déterminer le potentiel et l'intensité d'un champ uniforme perturbé par l'introduction d'un cylindre diélectrique (dont l'axe est perpendiculaire à $\vec{E}_0$) sont établies d'une manière analogue.

Supposons que l'intensité $\vec{E}_0$ d'un champ uniforme (avant l'introduction du cylindre) soit dirigée parallèlement à l'axe des x d'un système cartésien (fig. 417, *c*). Plaçons dans ce champ un cylindre diélectrique, de manière que l'axe du cylindre coïncide avec l'axe z.

En résolvant les équations de Laplace dans un système de coordonnées cylindriques, nous obtenons les expressions suivantes pour déterminer le potentiel (φ_i) à l'intérieur du cylindre et (φ_e) à l'extérieur de ce dernier :

$$\varphi_i = -\frac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_i+\varepsilon_e} E_0 r \cos\alpha = -\frac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_i+\varepsilon_e} E_0 x, \qquad (13.70)$$

$$\varphi_e = E_0\left(\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_e}{\varepsilon_i+\varepsilon_e}\frac{a^2}{r} - r\right)\cos\alpha. \qquad (13.71)$$

Le champ uniforme à l'intérieur du cylindre est dirigé suivant l'axe des x et est égale à

$$E_i = -\frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_i+\varepsilon_e} E_0. \qquad (13.72)$$

En terminant ce paragraphe signalons, que si on introduit un cylindre conducteur dans un champ uniforme E_0, en le plaçant de manière que son axe longitudinal soit perpendiculaire à E_0, le potentiel dans la région extérieure au cylindre

$$\varphi_e = E_0\left(\frac{a^2}{r} - r\right)\cos\alpha.$$

§ 420. **Notion sur les champs plan-parallèle, plan-méridien et uniforme.** On utilise parfois dans les ouvrages spécialisés les termes de champ plan-parallèle, champ plan-méridien et champ uniforme *.

On appelle *champ plan-parallèle* un champ dont l'image (c'est-à-dire l'ensemble des lignes de forces et des lignes équipotentielles) se répète dans tous les plans perpendiculaires à un axe quelconque d'un système de coordonnées cartésien.

En d'autres termes, dans un champ plan-parallèle l'image du champ ne dépend pas d'une quelconque des coordonnées du système cartésien.

A titre d'exemple d'un champ plan-parallèle, on peut citer le champ d'une ligne à deux conducteurs (de deux conducteurs chargés). Si on oriente l'axe z du système cartésien le long de l'axe de l'un des conducteurs, le potentiel φ sera indépendant de la coordonnée z.

On appelle *champ plan-méridien* un champ dont l'image se répète dans les plans méridiens; autrement dit dans un champ plan-méridien, l'image du champ ne dépend pas de la coordonnée α du système cylindrique ou sphérique de coordonnées. On rencontre dans les ouvrages spécialisés une autre définition encore du champ plan-méridien, qu'on décrit comme un champ créé par des corps de révolution, à axe commun.

On peut citer comme exemple de champ plan-méridien le champ résultant de l'introduction d'une sphère métallique dans un champ uniforme (avant l'introduction de cette sphère) (§ 417) ou le champ d'un doublet, dont il était question dans l'exemple 192. Dans les deux cas le potentiel dépend seulement du rayon R et de l'angle θ du système sphérique de coordonnées, mais ne dépend pas de l'angle α.

Un cas particulier de champ plan-méridien est un champ dans lequel le potentiel dépend seulement d'une seule coordonnée quelconque d'un système sphérique ou cylindrique de coordonnées.

Dans *un champ uniforme* l'intensité est la même en tous les points du champ, autrement dit sa valeur ne dépend pas des coordonnées du point.

Un champ uniforme existe, par exemple, entre les armatures d'un condensateur plan, lorsqu'il n'y a pas de charges libres dans l'espace entre ces armatures, à condition qu'on néglige l'effet perturbateur des bords du condensateur.

Il y a lieu de rappeler qu'un très grand nombre de champs, qu'on rencontre dans la pratique, est dépourvu de symétrie de toutes les catégories énumérées ci-dessus et, par conséquent, ne peut être classé comme champ plan-parallèle, plan-méridien, ni comme champ uniforme.

§ 421. Densité volumique de l'énergie d'un champ électrique et expression de la force mécanique sous forme de dérivée de l'énergie de ce champ par rapport à une

* Il y a lieu de signaler qu'en physique et dans les mathématiques le terme champ est souvent interprété dans un sens propre à ces disciplines (« professionnel »). Lorsqu'on parle du champ dans le sens physique (électromagnétique, de gravitation, thermique, champ de forces nucléaires) on entend sous ce terme une forme de la matière. Lorsqu'on parle du champ dans le sens mathématique, on a en vue le champ de la grandeur qui le décrit. Au point de vue purement mathématique, les champs peuvent être vectoriels et scalaires, rotationnels et irrotationnels, plan-parallèles, plan-méridiens, etc.

coordonnée variable. Supposons qu'à un certain instant la tension aux armatures d'un condensateur soit égale à u. Lorsque cette tension augmente de la valeur du, la charge à l'une des armatures du condensateur augmente de la valeur dQ et à l'autre de la valeur $-dQ$:

$$dQ = C\,du.$$

Ici C — capacité du condensateur.

Pour transporter la charge dQ, la source d'énergie doit dépenser un travail égal à $udQ = Cudu$. Ce travail est dépensé pour créer un champ électrique dans le condensateur.

L'énergie fournie par la source pour charger un condensateur de la tension $u = 0$ jusqu'à la tension $u = U$, et convertie en énergie du champ électrique du condensateur, est

$$W_{el} = C\int_0^U u\,du = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Examinons la notion de la densité volumique d'énergie d'un champ électrique. A cette fin prenons un condensateur plan et supposons que la distance entre ses armatures soit égale à x, tandis que la surface d'un seul côté de chaque armature soit égale à S. La permittivité du milieu entre les armatures est égale à ε. La tension entre les armatures est égale à U. Négligeons l'effet perturbateur, exercé par les bords du condensateur sur le champ entre les armatures. Le champ peut être considéré comme uniforme sous cette réserve. Le module de l'intensité du champ électrique E est

$$E = \frac{U}{x}.$$

Le module du vecteur de l'induction électrique est $D = \varepsilon E = \frac{Q}{S}$. La capacité d'un condensateur plan est $C = \frac{\varepsilon S}{x}$. Pour trouver la densité volumique d'énergie du champ électrique, divisons l'énergie $W_{el} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon S U^2}{2x}$ par le volume $V = Sx$, occupé par ce champ. Nous obtenons

$$\frac{W_{el}}{V} = \frac{\varepsilon S U^2}{2Sx^2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Ainsi, la densité volumique de l'énergie d'un champ électrique est $\frac{\varepsilon E^2}{2}$. Si le champ n'est pas uniforme, son intensité varie lorsqu'on passe d'un point du champ au point voisin, mais la densité volumique de l'énergie du champ est toujours égale à $\frac{\varepsilon E^2}{2}$, puisqu'on peut considérer que le champ est uniforme à l'intérieur d'un volume infiniment petit.

Isolons dans le champ le volume élémentaire dV. L'énergie du volume dV est

$$\frac{\varepsilon E^2}{2}\,dV.$$

L'énergie, contenu dans un volume V de dimensions quelconques, est

$$\int_V \frac{\varepsilon E^2}{2}\,dV.$$

Au § 77 de la première partie de ce cours nous avons examiné l'expressson d'une force mécanique agissant sur un circuit parcouru par un courant et placé

dans un champ magnétique, sous forme de la dérivée de l'énergie du champ magnétique par rapport à la coordonnée variable.

Dans un champ électrique des forces mécaniques agissent également sur les corps chargés et on peut les exprimer sous forme de la dérivée de l'énergie du champ par rapport à la coordonnée variable. Pour étudier cette question, rapportons-nous à la fig. 417, *a*. On y voit un condensateur plan, branché à la source de tension U. Appelons, comme nous l'avons fait plus haut, x la distance entre les armatures et S leur surface. Une force F agit sur chacune des armatures du condensateur. Sous

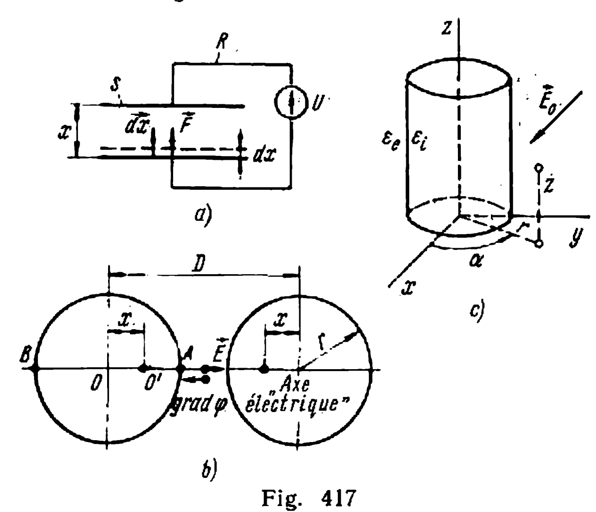


Fig. 417

l'effet de cette force, les armatures du condensateur tendent à se rapprocher. La force agissant sur l'armature inférieure est dirigée vers le haut et celle, appliquée à l'armature supérieure est dirigé vers le bas.

Supposons que, sous l'effet de la force F, l'armature inférieure se déplace très lentement, infiniment lentement au point de vue théorique, vers le haut de la distance dx et prend la position indiquée en pointillé sur la fig. 417, *a*.

Ecrivons l'équation du bilan d'énergie pour ce déplacement de l'armature. En vertu de la loi de conservation d'énergie, l'énergie dW_u fournie par la source d'alimentation doit être égale à la somme de trois termes:

1) travail de la force F sur le parcours dx: $\vec{F}\,\vec{dx} = F\,dx$,

2) variation de l'énergie du champ électrique du condensateur : dW_{el},

3) pertes thermiques dues au courant i, circulant dans les conducteurs à résistance R pendant le temps compris entre 0 et ∞ :

$$dW_u = F\,dx + dW_{el} + \int_0^\infty Ri^2\,dt.$$

Puisque, conformément aux conditions de l'exécution de l'essai, l'armature du condensateur se déplace vers le haut avec une vitesse théoriquement infinitésimale. la variation des charges aux armatures se fait également très lentement et, par con séquent, le courant de déplacement circulant dans le condensateur est infiniment petit. En d'autres termes, les pertes thermiques $\int_0^\infty Ri^2\,dt$ peuvent être négligées dans l'équation du bilan énergétique comme étant très petites; on a alors

$$dW_u = F\,dx + dW_{el}.$$

D'où on déduit que la force est

$$F=\frac{d\,(W_u-W_{el})}{dx}.$$

Ainsi la force F peut être exprimée sous forme de la dérivée de la différence d'énergie W_u — W_d par rapport à la coordonnée variable x.

Dans le cas général la tension entre les armatures U, ainsi que la charge Q peuvent varier lorsque les armatures se déplacent.

Examinons maintenant deux cas particuliers typiques de déplacement des armatures d'un condensateur.

Dans le premier d'entre eux le condensateur est coupé de la source de tension et le déplacement de l'armature a lieu à charges invariables à ses armatures.

Dans le deuxième cas, le déplacement de l'armature a lieu à tension invariable entre les armatures (le condensateur reste branché à une source de tension invariable U).

P r e m i e r c a s. Du fait que le condensateur est coupé de la source d'énergie, cette dernière ne fournit pas d'énergie et, par conséquent, $dW_u = 0$. On a alors

$$F=-\frac{dW_{el}}{dx}.$$

Ainsi, dans ce cas la force, agissant sur l'armature, est égale à la dérivée de l'énergie du champ électrique du condensateur par rapport à la coordonnée variable, prise avec un signe contraire. Le signe — indique que, dans le cas considéré, le travail de la force a été accompli aux dépens de la diminution d'énergie dans le champ électrique du condensateur.

Etant donné que l'énergie du champ électrique du condensateur est

$$W_{el}=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2x}{2\varepsilon S},$$

la force F en module est

$$|F|=\frac{dW_{el}}{dx}=\frac{Q^2}{2\varepsilon S}=-\frac{\varepsilon E^2S}{2}.$$

D e u x i è m e c a s. L'énergie fournie par la source d'alimentation à U = const est

$$dW_u=U\,dQ=U^2\,dC.$$

Ici dC — accroissement de la capacité due à la diminution égale à dx, de la distance entre les armatures.

Variation de l'énergie du champ électrique du condensateur

$$dW_{el}=d\left(\frac{CU^2}{2}\right)=\frac{U^2}{2}\,dC.$$

La différence entre ces dernières équations :

$$dW_u-dW_{el}=U^2\,dC-\frac{U^2}{2}\,dC=\frac{U^2\,dC}{2}=dW_{el}.$$

Par conséquent, dans le deuxième cas

$$F=\frac{dW_{el}}{dx}=\frac{1}{2}\,U^2\,\frac{dC}{dx}.$$

Ainsi, dans le deuxième cas également la force est égale à la dérivée de l'énergie du champ électrique suivant la coordonnée variable.

La capacité d'un condensateur :

$$C=\frac{\varepsilon S}{x}.$$

par conséquent,

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{\varepsilon S}{x^2},$$

$$F| = \frac{1}{2}\varepsilon S\left(\frac{U}{x}\right)^2 = \frac{\varepsilon E^2 S}{2}.$$

La force agissant sur l'armature du condensateur dans le deuxième cas est exactement égale à la force agissant sur son armature dans le premier cas.

La force agissant sur l'unité de surface du condensateur est $\frac{F}{S}$. Cette force est égale à $\frac{\varepsilon E^2}{2}$.

Remarquons que la grandeur $\frac{\varepsilon E^2}{2}$ exprime non seulement la densité d'énergie du champ électrique, mais est encore numériquement égale à la force agissant sur l'unité de surface de l'armature d'un condensateur.

Les forces agissant sur les armatures d'un condensateur peuvent être considérées comme le résultat de la manifestation des forces de compression longitudinale (le long des tubes de force) et des forces d'expansion latérale (en travers des tubes de force). Les forces de compression longitudinale tendent à raccourcir le tube de force, tandis que les forces d'expansion latérale tendent à l'élargir. Une force numériquement égale à $\frac{\varepsilon E^2}{2}$ agit sur l'unité de surface latérale du tube de force. Toutes ces forces se manifestent non seulement sous forme de forces agissant sur l'armature du condensateur. Elles agissent également à la surface de séparation des deux diélectriques. La force qui agit à surface de séparation de deux diélectriques est dirigée dans le sens du diélectrique à permittivité moindre.

Exemples

Exemple 177. Soit deux conducteurs de *10 mm* de diamètre, disposés parallèlement (fig. 417, *b*). L'entraxe des conducteurs est de 20 *mm*. La charge linéique d'un conducteur par mètre courant est de 10^{-8} *C*. Le conducteur gauche porte une charge positive et le conducteur droit, une charge négative. Trouver les densités maximale et minimale de la charge sur la surface du conducteur.

Solution. Trouvons la position des axes électriques: $x = 1{,}35$ *mm*. La densité de la charge sur la surface du métal $\sigma = D = \varepsilon E$. Par conséquent σ sera plus grand là où E est maximal.

Le champ créé par la charge positive est dirigée en dehors de cette charge, tandis que le champ créé par une charge négative est dirigée vers cette charge; par conséquent, le champ est maximal au point *A* et minimal au point *B*. On a pour le champ au point *A*

$$E_A = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l(r-x)} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon l(D-r-x)},$$

et au point *B*

$$E_B = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\left(\frac{1}{r+x} - \frac{1}{D+r-x}\right).$$

Le champ au point *A* est égale à la somme des champs dus aux deux charges et au point *B* il est égal à la différence de ces champs.

Par conséquent,

$$D_A=\sigma_A=\varepsilon E_A=\frac{10^{-8}}{2\pi\cdot 1}\left(\frac{1}{0{,}005-0{,}00135}+\frac{1}{0{,}02-0{,}005-0{,}00135}\right)=0{,}544\,\mu C/m^2;$$

$$D_B=\sigma_B=\varepsilon E_B=$$

$$=\frac{10^{-8}}{2\pi\cdot 1}\left(\frac{1}{0{,}005+0{,}00135}-\frac{1}{0{,}02+0{,}005-0{,}00135}\right)=0{,}186\,\mu C/m^2.$$

Ainsi la densité de la charge au point A est de 2,92 fois plus grande, que la densité de la charge au point B.

* * *

En partant des données du problème précédent, trouver le gradient du potentiel au point M (placé au milieu entre les conducteurs sur une ligne raccordant les centres de ces derniers).

Puisque $\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi$, le module du grad φ est égal au module $\vec{E}$ et la direction de grad φ est contraire à la direction de $\vec{E}$. Au point M

$$E_M=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\left(\frac{1}{\frac{D}{2}-x}+\frac{1}{\frac{D}{2}-x}\right)=\frac{10^{-8}\cdot 2}{2\pi\cdot 8{,}86\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot 0{,}00865}=41600\,V/m.$$

La direction de $\vec{E}$ et de grad φ est donnée sur la fig. 417, *b*.

Exemple 178. Calculer les capacités partielles par mètre de longueur d'une ligne à deux conducteurs. Les dimensions géométriques

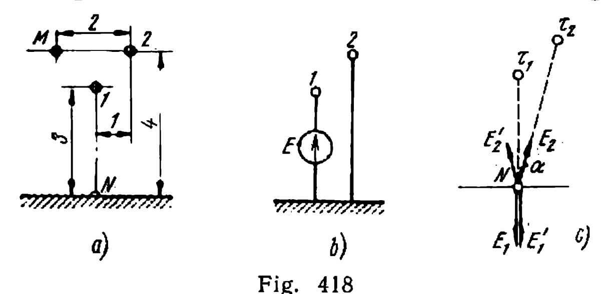


Fig. 418

sont indiquées en mètres sur la fig. 418, *a*. Les rayons de conducteur sont de 6 *mm*.

Solution. Conformément à (13.48)

$$\varphi_1=\alpha_{11}\tau_1+\alpha_{12}\tau_2,\quad \varphi_2=\alpha_{21}\tau_1+\alpha_{22}\tau_2.$$

D'où

$$\tau_1=\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1\alpha_{12}\\ \varphi_2\alpha_{22}\end{vmatrix}}{\Delta}=\varphi_1\frac{\alpha_{22}}{\Delta}+\varphi_2\left(-\frac{\alpha_{12}}{\Delta}\right)$$

ou

$$\tau_1=\varphi_1\beta_{11}+\varphi_2\beta_{12}.$$

Ici

$$\beta_{11}=\frac{\alpha_{22}}{\Delta};\ \beta_{12}=-\frac{\alpha_{12}}{\Delta};\ \Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\\ \alpha_{21}\alpha_{22}\end{vmatrix}.$$

Ainsi

$$\tau_1=\beta_{11}\varphi_1+\beta_{12}(\varphi_2-\varphi_1+\varphi_1)=U_1(\beta_{11}+\beta_{12})-\beta_{12}U_{12}=$$
$$=U_1C_{11}+U_{12}C_{12}\ (\varphi_1=U_1).$$

Par conséquent, pour une ligne à deux conducteurs

$$C_{11}=\beta_{11}+\beta_{12}=\frac{\alpha_{22}-\alpha_{12}}{\Delta};$$

$$C_{12}=-\beta_{12}=\frac{\alpha_{12}}{\Delta}.$$

De même nous avons $C_{22}=\beta_{22}+\beta_{12}=\frac{\alpha_{11}-\alpha_{12}}{\Delta}$.

Conformément à (13.48′) trouvons

$$\alpha_{11}=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h_1}{r}=\frac{1}{2\pi\cdot 8,86\cdot 10^{-12}}\ln\frac{6000}{6}=12,4\cdot 10^{10}\ m/F.$$

$$\alpha_{22}=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h_2}{r}=12,9\cdot 10^{10}\ m/F;$$

$$\alpha_{12}=\alpha_{21}=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{12}}{a_{12}}=\frac{1}{2\pi\cdot 8,86\cdot 10^{-12}}\ln\frac{7090}{1410}=2,9\cdot 10^{10}\ m/F;$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\\ \alpha_{12}\alpha_{22}\end{vmatrix}=10^{20}(12,4\cdot 12,9-2,9^2)=151,6\cdot 10^{20}\ m^2/F^2,$$

$$C_{11}=\frac{\alpha_{22}-\alpha_{12}}{\Delta}=0,659\cdot 10^{-11}\ F/m;$$

$$C_{22}=\frac{\alpha_{11}-\alpha_{12}}{\Delta}=0,626\cdot 10^{-11}\ F/m;$$

$$C_{12}=\frac{\alpha_{12}}{\Delta}=0,191\cdot 10^{-11}\ F/m.$$

E x e m p l e 179. Le conducteur *1* de l'exemple 178 est raccordé à la terre par l'intermédiaire d'une source de F.E.M. $E = 127\ V$. Le conducteur *2* est raccordé à la terre par un fil métallique, de manière que son potentiel soit nul (fig. 418, *b*). Calculer les charges par mètre courant, sur les conducteurs *1* et *2*.

S o l u t i o n. Il découle de (13.49) que pour $\varphi_2 = 0$ on a

$$\tau_1=\varphi_1\beta_{11}\ \text{et}\ \tau_2=\varphi_1\beta_{12};$$

$$\beta_{11}=\frac{\alpha_{22}}{\Delta}=\frac{12,9\cdot 10^{10}}{151,6\cdot 10^{20}}=0,852\cdot 10^{-11}\ F/m;$$

$$\beta_{12}=-C_{12}=-0,191\cdot 10^{-11}\ F/m.$$

Charge du premier conducteur

$$\tau_1=127\cdot 0,852\cdot 10^{-11}=1,08\cdot 10^{-9}\ C/m.$$

Charge du deuxième conducteur

$$\tau_2=-0,191\cdot 10^{-11}\cdot 127=-0,242\cdot 10^{-9}\ C/m.$$

Exemple 180. La charge linéique τ_1 du conducteur *1* de la fig. 418, *a* est égale à $2\cdot10^{-9}$ *C/m*. La charge linéique τ_2 du conducteur *2* est égale à -10^{-9} *C/m*.

Calculer le potentiel du point *M*, en supposant que le potentiel de la terre soit nul.

Solution.

$$\varphi_M=\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{1M}}{a_{1M}}+\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{2M}}{a_{2M}}=$$

$$=\frac{2\cdot10^{-9}}{2\pi\cdot8,86\cdot10^{-12}}\ln\frac{\sqrt{7^2+1^2}}{\sqrt{2}}-\frac{10^{-9}}{2\pi\cdot8,86\cdot10^{-12}}\ln\frac{\sqrt{8^2+2^2}}{2}=30,6\,V.$$

Exemple 181. Calculer la densité de la charge induite sur la surface de la terre au point *N* (fig. 418, *a*), en supposant que les charges sur les conducteurs soient les mêmes que dans l'exemple 180.

Solution. Conformément à l'expression (13.33) la densité de la charge sur la surface d'un conducteur est égale à la valeur du champ en ce point, multipliée par ε.

Le champ au point *N* (fig. 418, *c*) est égal à la somme géométrique des champs dus à quatre charges: à la charge τ_1 (désignons-le par E_1), à la charge τ_2 (E_2) et aux images symétriques de ces charges (E_1' et E_2')

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_1'+\vec{E}_2'.$$

Les champ $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_1'$ sont dirigés suivant la même droite (suivant la verticale) et s'ajoutent. Pour trouver les projections $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_2'$ sur la verticale, multiplions $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_2'$ par $\cos\alpha$

$$\sigma=2\cdot\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon h_1}\varepsilon-2\,\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon\sqrt{h_2^2+a^2}}\cdot\varepsilon\,\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2+a^2}}=0,1375\cdot10^{-9}\cdot C/m^2.$$

$$a=1\,;\; h_2=4.$$

Exemple 182. Deux plaques métalliques (théoriquement de longueur infinie) placées dans l'air (fig. 419) en forment sans se toucher l'angle dièdre α_2. Le potentiel de la première plaque est φ_1 et celui de la deuxième est φ_2. Etablir l'expression pour calculer φ et *E* en un point quelconque du champ à l'intérieur de l'angle dièdre, ainsi que l'expression pour calculer la densité de la charge sur les plaques. Trouver le résultat numérique pour $\varphi_1=0$, $\varphi_2=100$ *V*, $\alpha_2=30°$.

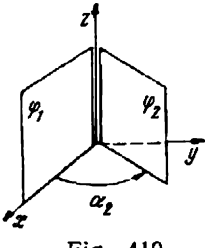


Fig. 419

Solution. Du fait que les surfaces aux limites peuvent être décrites le plus simplement dans un système de coordonnées cylindriques, la solution sera cherchée dans ce système. Les charges libres n'existent pas dans l'espace entre les deux plaques et, par conséquent, ce champ obéit à l'équation de Laplace (13.30).

Le potentiel φ dépend seulement de l'angle α et des conditions de symétrie et ne dépend pas de la coordonnée z et du rayon r du système des coordonnées cylindrique. Par conséquent,

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}=0.$$

La solution de cette dernière équation donne

$$\varphi=C_1\alpha+C_2.$$

D'après les conditions imposées, pour $\alpha = 0$ $\varphi = \varphi_1$, et pour $\alpha = \alpha_2$, $\varphi = \varphi_2 = 100\ V$.
Par conséquent,

$$C_2=0\,;\ C_1=\frac{100}{\pi/6}=\frac{600}{\pi}\ \text{et}\ \varphi=\frac{600}{\pi}\,\alpha.$$

L'intensité du champ n'a qu'une seule composante, en:

$$E_\alpha=-\frac{d\varphi}{r d\alpha}=-\frac{C_1}{r}=-\frac{600}{\pi r}\ V/m.$$

La densité de la charge

$$\sigma=D=\varepsilon_0 E=\varepsilon_0 E_\alpha=-\frac{600\varepsilon_0}{\pi r}\,.$$

Par exemple pour

$$r=2\ cm\quad \sigma=D=-8{,}48\cdot 10^{-8}\ C/m^2.$$

Exemple 183. Deux entonnoirs coniques métalliques, se trouvant dans l'air, sont dirigés par leurs sommets l'un vers l'autre, mais ne se touchent pas (fig. 420). L'angle $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 135°$, le potentiel du premier entonnoir $\varphi_1 = 0$, le potentiel du deuxième $\varphi_2 = 1000\ V$.

Etablir l'expression pour calculer φ et E dans l'espace entre les entonnoirs, et à l'aide de cette expression trouver E et φ au point M de coordonnées $R = 2\ cm$ et $\theta = 120°$.

Fig. 420

Solution. Utilisons le système sphérique de coordonnées, puisque la surface des entonnoirs peut être décrite le plus simplement justement dans ce système de coordonnées. Il n'existe pas de charge volumique dans l'espace entre les entonnoirs et, par conséquent, le champ peut être décrit par l'équation de Laplace (13.31).

Par raison de symétrie, φ dépend seulement de l'angle θ et ne dépend pas du rayon R et de l'angle α, autrement dit, des deux autres coordonnées du système sphérique. Ainsi

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\varphi}{d\theta}\right)=0,\ \text{d'où}\ \sin\theta\,\frac{d\varphi}{d\theta}=C_1,$$

$$\varphi=C_1\ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+C_2.$$

Trouvons les constantes d'intégration C_1 et C_2 pour $\theta = 30°$ $\varphi = 0$ et pour $\theta = 135°$ $\varphi = 1000$ V. Par conséquent,

$$0 = C_1 \ln \operatorname{tg} 15° + C_2,$$

$$1000 = C_1 \ln \operatorname{tg} 67°\,30' + C_2,$$

d'où

$$C_1 = 461\ V,\quad C_2 = 608\ V.$$

Potentiel au point M

$$\varphi_M = 461 \ln \operatorname{tg} 60° + 608 = 856{,}5\ V.$$

Le champ n'a qu'une seule composante, celle suivant θ

$$E_\theta = -\frac{d\varphi}{R\,d\theta} = -\frac{C_1}{R \sin\theta}.$$

L'intensité au point M

$$E_{\theta M} = -\frac{461}{0{,}02 \sin 120°} = -26{,}6\ kV/m.$$

Exemple 184. Deux électrodes plates sont disposées dans le vide à une distance de 2 cm l'une de l'autre (fig. 421). L'électrode de droite est mise à la terre et l'électrode gauche est raccordée au pôle + d'une batterie dont la F.E.M. est égale à 200 V. La borne négative de la batterie est mise à la terre.

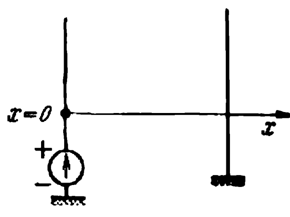


Fig. 421

Une charge volumique est répartie dans l'espace entre les électrodes; sa densité est

$$\rho = -a\varepsilon_0 x,$$

où $a = 30$ kV/cm^3.

On demande de trouver la loi de variation du potentiel dans l'espace entre les électrodes.

Solution. Supposons que les dimensions des électrodes sont nettement plus grandes que la distance entre ces dernières. Orientons l'axe des x comme ceci est représenté sur la fig. 421.

Le potentiel ne dépend que de x; dans le problème considéré il est indépendant de y et de z. Par conséquent,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = ax.$$

Procédons à une double intégration suivant x:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{ax^2}{2} + C_1$$

et

$$\varphi = \frac{ax^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Calculons les constantes d'intégration en partant des conditions aux limites:

pour $x = 0$ $\varphi = 200 = C_2$,

pour $x = 2$ $\varphi = 0 = 200 + 2C_1 + \frac{30 \cdot 8 \cdot 10^3}{6}$; $C_1 = -20100$ V/cm.
Par conséquent,

$$\varphi = \frac{30 \cdot 10^3 x^3}{6} - 20\,100x + 200 = 5000x^3 - 20\,100x + 200\ V.$$

Exemple 185. Dans un condensateur cylindrique isolé à l'air, il existe autour de l'électrode intérieure de rayon r_0 une charge, sous forme de couronne, à densité volumique ρ C/cm^3. Le rayon extérieur de la couronne est r_1 (fig. 422). Le rayon de l'électrode extérieure r_2. Le potentiel de l'électrode intérieure est φ_0, et le potentiel de l'électrode extérieure est nul.

Fig. 422

Etablir l'expression pour calculer φ dans l'espace occupé par des charges volumiques (appelons-le région I) et dans l'espace non occupé par des charges libres (région II).

Solution. Dans la première région

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_I}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Une double intégration par rapport à r donne

$$\varphi_I = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln r + C_2.$$

Dans la deuxième région

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_{II}}{dr}\right) = 0,$$

d'où

$$\varphi_{II} = C_3 \ln r + C_4.$$

Ecrivons quatre équations pour déterminer les quatre constantes d'intégration (C_1, C_2, C_3, C_4).

Pour $r = r_0$ $\varphi_1 = \varphi_0$. Donc,

$$\varphi_0 = -\frac{\rho r_0^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln r_0 + C_2. \quad \text{(a)}$$

Pour $r = r_1$ $\varphi_I = \varphi_{II}$, par conséquent,

$$-\frac{\rho r_1^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln r_1 + C_2 = C_3 \ln r_1 + C_4. \quad \text{(b)}$$

Pour $r = r_2$ $\varphi_{II} = 0$. Donc

$$0 = C_3 \ln r_2 + C_4. \quad \text{(c)}$$

Pour $r = r_1$ les composantes normales du vecteur déplacement électrique D sont égales :

$$\varepsilon_0 \left|\frac{d\varphi_I}{dr}\right|_{r=r_1} = \varepsilon_0 \left|\frac{d\varphi_{II}}{dr}\right|_{r=r_1}$$

ou

$$C_3 = C_1 - \frac{\rho r_1^2}{2\varepsilon_0}. \quad \text{(d)}$$

La résolution en commun des équations (a), (b), (c) et (d) (omise) donne

$$C_1 = \frac{\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(r_1^2 - r_0^2) + \frac{\rho r_1^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} - \varphi_0}{\ln\frac{r_2}{r_0}}.$$

On détermine ensuite C_3 en partant de l'équation (d), C_4 en partant de l'équation (c) et C_2 en partant de l'équation (a).

Exemple 186. Un nuage d'orage, chargé en électricité positive se trouve au-dessus de la surface de la terre. L'espace entre ce nuage et

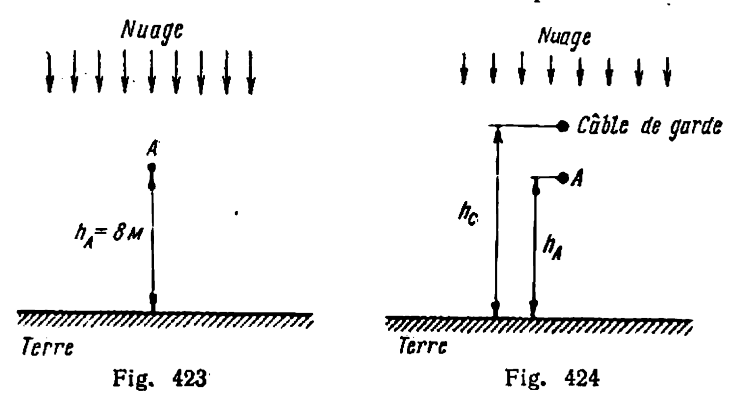


Fig. 423 Fig. 424

la terre peut être considéré comme un condensateur plan de très grandes dimensions. Le champ E dans ce condensateur est dirigé du nuage vers la terre.

Trouver le potentiel du point A situé à une distance de 8 m de la surface de la terre pour les deux cas suivants: 1) lorsqu'il n'existe pas de câble de garde au-dessus de la surface de la terre (fig. 423) et 2) lorsqu'un câble de garde en acier de 10 mm de diamètre, mis à la terre, est tendu à une hauteur de 10 m au-dessus de la terre (fig. 424).

Solution. En cas d'absence du câble

$$\varphi_A^{\mathrm{I}} = Eh_A, \quad \text{où} \quad h_A = 8\, m.$$

En présence du câble le potentiel au point A est créé non seulement par le champ uniforme « du condensateur plan », mais également par la charge du câble $q_{câb}$:

$$\varphi_A^{\mathrm{II}} = Eh_A + q_{câb}\alpha_{12}.$$

Désignons ici par α_{12} le coefficient potentiel

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{10+8}{2}.$$

Ecrivons l'équation pour calculer la charge du câble:

$$\varphi_{câb} = Eh_{câb} + q_{câb}\alpha_{11} = 0.$$

Par conséquent,

$$q_{c\hat{a}b} = -\frac{Eh_{c\hat{a}b}}{\alpha_{11}}$$

et

$$\varphi_A^{II} = E\left(h_A - h_{c\hat{a}b}\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right).$$

La variation du potentiel au point A, rapportée à la valeur de ce potentiel avant le placement du câble:

$$\frac{\Delta\varphi_A}{\varphi_A^I} = \frac{\varphi_A^I - \varphi_A^{II}}{\varphi_A^I} = \frac{E\left\{h_A - \left(h_A - h_{c\hat{a}b}\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right)\right\}}{Eh_A} = \frac{10\cdot 0{,}251}{8} = 0{,}313,$$

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} = \frac{\ln\frac{18}{2}}{\ln 4000} = \frac{2{,}08}{8{,}3} = 0{,}251.$$

Exemple 187. Une sphère métallique non chargée, de rayon $a = 1$ *cm* est introduite dans un champ uniforme d'intensité $E_0 = 10^3$ *kV/m*.

Trouver E_R et E_θ au point A. Coordonnées du point A : $R = 2$ *cm* et $\theta = 30°$.

Solution. Conformément aux expressions du § 417 nous avons:

$$E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -E_0\cos\theta\left(1 + \frac{2a^3}{R^3}\right) =$$

$$-10^6\cdot 0{,}866\left(1 + \frac{2}{8}\right) = -1{,}082\cdot 10^6 \ V/m;$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{R\,\partial\theta} = E_0\sin\theta\left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right) = 10^6\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = 0{,}4375\cdot 10^6 \ V/m.$$

L'intensité résultante du champ en module est:

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = 1{,}168\cdot 10^6 \ V/m.$$

Exemple 188. Un champ électrique uniforme d'intensité $E_0 = 10^3$ *kV/m* a été créé dans l'air. Un cylindre diélectrique ($\varepsilon_i = 4$) a été placé dans ce champ de manière que l'axe du cylindre soit perpendiculaire au champ. L'intensité du champ à l'intérieur du cylindre est E_i.

Solution. Utilisons l'expression (13.72)

$$E_i = E_0\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_i + \varepsilon_0} = 10^3\,\frac{2\cdot 1}{4+1} = 4\cdot 10^2 \ kV/m.$$

Exemple 189. Un champ, dont le potentiel dépend uniquement de la coordonnée x d'un système cartésien, existe dans une certaine région de l'espace

$$\varphi = 5x^3 - 60x^2.$$

Trouver la loi de variation de la densité des charges libres dans ce champ.

S o l u t i o n. Ecrivons ainsi l'équation de Poisson, décrivant ce champ :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}.$$

Dérivons-la deux fois par rapport à φ et x

$$\frac{d\varphi}{dx} = 15x^2 - 120x; \ \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 30x - 120.$$

Par conséquent, $\rho_{lib} = (-30x + 120)\,\varepsilon$.

E x e m p l e 190. Etablir l'expression pour déterminer l'intensité et le potentiel du champ, créé par un axe chargé de longueur l (fig. 425). La charge linéique de l'axe est égale à τ.

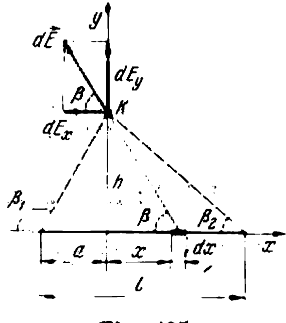


Fig. 425

S o l u t i o n. Calculons E et φ en un point arbitraire K. Disposons les axes du système de coordonnées cartésien conformément à la fig. 425. Isolons un tronçon de l'axe de longueur dx et portant la charge $\tau\,dx$. Du fait que dx est très petit, on peut considérer cette charge comme ponctuelle ; à l'aide du théorème de Gauss nous pouvons trouver l'intensité du champ créée par cette charge au point K :

$$dE = \frac{\tau\,dx}{4\pi\varepsilon R^2}.$$

La projection de $\vec{dE}$ sur l'axe des x est :

$$-dE_x = dE\cos\beta = \frac{\tau\cos\beta\,dx}{4\pi\varepsilon R^2}.$$

Projection de $\vec{dE}$ sur l'axe de y

$$dE_y = dE\sin\beta = \frac{\tau\sin\beta\,dx}{4\pi\varepsilon R^2}.$$

Substituons

$$R = \frac{h}{\sin\beta}; \ x = h\operatorname{ctg}\beta; \ dx = -\frac{h\,d\beta}{\sin^2\beta};$$

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon h}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta\,d\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon h}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1);$$

$$E_y = \frac{-\tau}{4\pi\varepsilon h}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\,d\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon h}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1);$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

La composante du potentiel K, dû à la charge ponctuelle $\tau\,dx$, est

$$d\varphi = \frac{\tau\,dx}{4\pi\varepsilon R} = \frac{-\tau\,d\beta}{4\pi\varepsilon\sin\beta}; \quad -\int_{\beta_1}^{\beta_0}\frac{d\beta}{\sin\beta} = \operatorname{Ar\,sh}(\operatorname{ctg}\beta)\Big|_{\beta_1}^{\beta_2};$$

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\left(\operatorname{Ar\,sh}\frac{l-a}{h} + \operatorname{Ar\,sh}\frac{a}{h}\right).$$

E x e m p l e 191. Par suite d'un échauffement inégal la permittivité de l'isolement d'un câble coaxial (fig. 426) varie en fonction du rayon r de la manière suivante: $\varepsilon = \frac{m}{r}$. Etablir les expressions pour calculer l'intensité du champ E et de déplacement D. Le rayon d'un conducteur du câble est r_1, le rayon intérieur de la gaine r_2. U est la tension entre le conducteur et la gaine. Il n'y a pas de charge volumique.

S o l u t i o n. Utilisons le théorème de Gauss (13.20) dans sa forme différentielle (on ne peut pas appliquer à ce cas l'équation de Laplace, puisque celle-ci a été établie pour $\varepsilon = \text{const}$ (voir § 393). Dans l'expression (13.24) substituons $\vec{D}$ à $\vec{E}$, en tenant compte que $\vec{D}$ n'a qu'une seule composante suivant r et du fait de la symétrie ne dépend pas des coordonnées r et α. Nous avons ainsi

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD_r) = 0.$$

Il en découle que

$$rD_r = rD = C; \quad D = \frac{C}{r},$$

où C — constante d'intégration.

Ainsi D varie en raison inverse du rayon. L'intensité du champ est

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Cr}{mr} = \frac{C}{m},$$

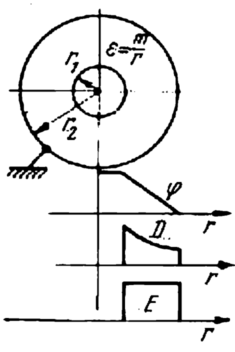


Fig. 426

autrement dit, l'intensité du champ est une grandeur constante. Calculons la constante d'intégration C. A cette fin utilisons le fait que:

$$\int_{r_1}^{r_2} E\,dr = U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C}{m}\,dr = \frac{C(r_2 - r_1)}{m},$$

$$C = \frac{mU}{r_2 - r_1}.$$

Les courbes de variation de E, D et φ sont représentées sur la fig. 426 *.

E x e m p l e 192. Etablir les équations pour le calcul du champ d'un doublet.

S o l u t i o n. Soit un doublet représenté sur la fig. 427. Désignons par l l'entraxe des charges. Utilisons pour la solution un système de coordonnées sphérique. Désignons par R_1 la distance entre le point arbitraire a et la charge $+q$, par R_2 celle jusqu'à la charge $-q$ et par R celle jusqu'au milieu du doublet. L'angle entre la verticale et le rayon R est égal à θ. Calculons le potentiel du point

* Il y a lieu de remarquer que si la permittivité ε de l'isolement du câble coaxial de l'exemple 191 était une grandeur constante (et non pas une fonction de r) on aurait les relations suivantes:

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad D = \varepsilon E; \quad \varphi = \frac{U \ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

autrement dit, dans ce cas, l'intensité du champ ne serait plus constante mais varierait en raison inverse du rayon r, tandis que le potentiel φ ne serait plus une fonction linéaire de r mais une fonction logarithmique.

a comme le potentiel d'un champ de deux charges ponctuelles

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\,\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}.$$

Si $R \gg l$, on a $R_1R_2 \approx R^2$ et $R_2-R_1 \approx l\cos\theta$, et par conséquent

$$\varphi \approx \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon R^2}. \qquad (13.73)$$

A l'aide de l'expression du § 386 trouvons

$$E_R=-\frac{\partial\varphi}{\partial R}=\frac{ql\cos\theta}{2\pi\varepsilon R^3}; \qquad (13.74)$$

$$E_\theta=-\frac{\partial\varphi}{R\partial\theta}=\frac{ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon R^3}; \qquad (13.75)$$

$$E\alpha=0;$$

$$E=\sqrt{E_R^2+E_\theta^2}=\frac{ql}{4\pi\varepsilon R^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}. \qquad (13.76)$$

Ainsi dans le champ d'un doublet pour $R \gg l$ le potentiel φ varie en raison inverse du carré de la distance R entre le point considéré et le doublet, tandis que l'intensité varie en raison inverse du cube de cette distance; φ et E sont des fonctions de l'angle θ.

L'image du champ du doublet est représentée sur la fig. 428. L'intensité du champ en un certain point arbitraire a est égale à la somme géométrique des inten-

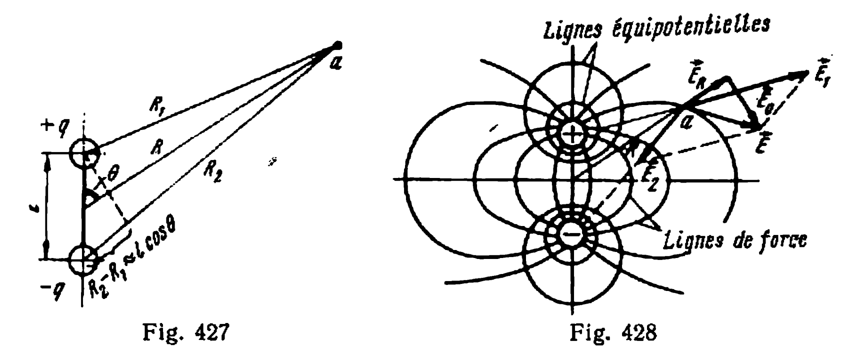


Fig. 427 Fig. 428

sités $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$, dues aux charges $+q$ et $-q$. Si on utilise un système sphérique de coordonnées, l'intensité du champ au même point a pourra être écrite sous forme de la somme des intensités $\vec{E_R}$ et $\vec{E_\theta}$; $\vec{E_R}$ est dirigé le long du rayon R et E_θ est dirigé suivant θ.

Exemple 193. Etablir les équations pour calculer l'intensité du champ et la capacité d'un condensateur plan à deux couches de la fig. 429 et construire les courbes de variation du module du vecteur champ électrique, du module du vecteur induction électrique D et du potentiel φ en fonction de la distance x.

L'épaisseur de la première couche du diélectrique est d_1 et celle de la deuxième couche d_2. Permittivité de la première couche ε_1, celle de la deuxième couche ε_2. Posons $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_1$ et $d_2 = 1{,}5\ d_1$.

S o l u t i o n. Attribuons l'indice 1 à toutes les grandeurs se rapportant à la première couche et réservons l'indice 2 à celles de la deuxième couche. Supposons que la différence de potentiel entre les armatures du condensateur est égale à U.

Négligeons l'influence perturbatrice sur le champ des bords du condensateur. Sous cette réserve, le champ dans chacune des couches est uniforme. Du fait que la composante normale du vecteur D est continue, nous avons $D_{1n}=D_{2n}$.

Mais $D_{1n} = \varepsilon_1 E_1$, $D_{2n} = \varepsilon_2 E_2$. Par conséquent,

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2. \qquad \text{(a)}$$

Ainsi, le rapport des intensités du champ est inversement proportionnel au rapport des permittivités.

L'équation (a) donne une relation entre deux grandeurs inconnues pour l'instant E_1 et E_2. Ecrivons la deuxième équation pour E_1 et E_2 en partant du fait que

$$\int_0^{d_1} \vec{E}_1 \, d\vec{x} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 \, d\vec{x} = U$$

ou

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U. \qquad \text{(b)}$$

La solution en commun de (a) et de (b) donne

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2}.$$

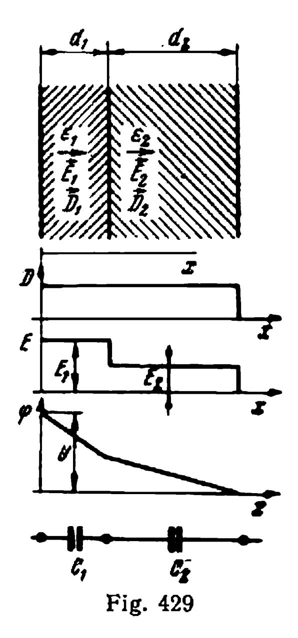


Fig. 429

Les courbes des valeurs D, E et φ en fonction de x sont représentées sur la fig. 429.

Pour que le condensateur puisse fonctionner normalement, il faut que l'intensité du champ électrique dans la première, comme dans la deuxième couches du condensateur n'atteigne pas une valeur donnant lieu au percement du diélectrique considéré.

L'intensité d'un champ uniforme donnant lieu au percement du diélectrique est appelée *intensité de claquage* ou de *perforation*. L'intensité de claquage, surtout pour les diélectriques gazeux, dépend nettement de la température et de la pression. L'intensité de claquage de l'air est égale à 30 *kV/cm* pour une pression atmosphérique normale et pour une température de 18° C.

Afin d'établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan à deux couches, plaçons mentalement à la surface de séparation des deux diélectriques un feuillet métallique infiniment mince. C'est une opération parfaitement admissible, puisque la surface de séparation des diélectriques était une surface équipotentielle avant le placement de ce feuillet et reste une surface équipotentielle après ce placement, la valeur du potentiel ne s'étant pas modifiée du fait de cette opération.

Après l'exécution de cette opération, la capacité d'un condensateur à deux couches peut être calculée comme la capacité de condensateurs C_1 et C_2, couplés en série ; C_1 — capacité de la première couche du condensateur et C_2 — capacité de sa deuxième couche :

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1}\, ; \; C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{d_2}\, .$$

Ici S — l'aire d'une face de l'armature du condensateur. La capacité des deux condensateurs couplés en série est :

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{S}{\frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1}}\, .$$

CHAPITRE XIV

CHAMP ÉLECTRIQUE DE COURANT CONTINU DANS UN MILIEU CONDUCTEUR

§ 422. Densité de courant et courant. Si un champ électrique dû aux sources extérieures est créé dans un milieu conducteur (dans des conducteurs métalliques, la terre, les liquides, etc.) un courant électrique circule dans ce milieu. Le courant électrique est un mouvement ordonné des particules chargées, sous l'effet d'un champ électrique.

Les porteurs des charges dans les métaux sont les électrons libres et les porteurs des charges dans les liquides sont les ions.

On appelle *courant de conduction* le mouvement ordonné, sous l'effet d'un cha p électrique, des électrons libres dans un métal et des ions dans un liquide.

Dans leur mouvement ordonné les porteurs des charges subissent de nombreuses collisions avec d'autres particules de la substance, animées d'agitation thermique. Ces collisions gênent le mouvement ordonné des porteurs des charges et sont la cause de la résistance opposée par le milieu conducteur à la circulation du courant.

La propriété du milieu, caractérisant sa capacité de conduire le courant est appelée *conductivité* et est désignée par γ. La conductivité dépend des propriétés physiques du matériau conducteur et de sa température; γ a les dimensions suivantes: $\Omega^{-1}\cdot m^{-1} = s/m$.

Le champ électrique dans un milieu conducteur est régi par des lois déterminées et la tâche immédiate du présent chapitre est justement d'examiner ces lois.

La grandeur essentielle dans un champ électrique d'un milieu conducteur est la densité du courant $\vec{\delta}$. C'est une grandeur vectorielle, dirigée suivant l'intensité du champ. Elle est numériquement égale au rapport du courant Δi, traversant un élément de surface Δs (perpendiculaire à la direction de l'intensité du champ au point considéré), à l'aire Δs de cette surface.

Si cette surface a des dimensions finies, la direction du vecteur de la densité du courant pour tous les éléments, en quels on peut diviser cette surface, et la direction des éléments de cette surface peut varier de sorte que le courant doit être calculé comme suit:

$$I = \int_S \vec{\delta}\, d\vec{s}.$$

Ainsi *le courant est le flux du vecteur de la densité du courant.*

Contrairement à sa densité, le courant lui-même est une grandeur scalaire.

Lorsque des courants continus circulent dans des corps conducteurs il existe à l'intérieur de ces corps, comme à l'extérieur de ces derniers, des champs magnétiques continus (invariables en fonction du temps).

Du fait de l'invariabilité de ces champs en fonction du temps, des phénomènes d'induction électromagnétique ne s'y manifestent pas. En d'autres termes, un champ magnétique créé par un courant continu n'exerce pas d'influence sur le champ électrique de courant continu. Grâce à ceci, on peut examiner *séparément* les champs électrique et magnétique de courant continu.

Le champ électrique de courant continu est examiné au chapitre présent et son champ magnétique sera étudié au chapitre XV.

§ 423. Loi d'Ohm sous forme différentielle. Deuxième loi de Kirchhoff sous forme différentielle. Isolons dans un milieu conducteur un petit parallélépipède de volume ΔV. Désignons par Δl la longueur de

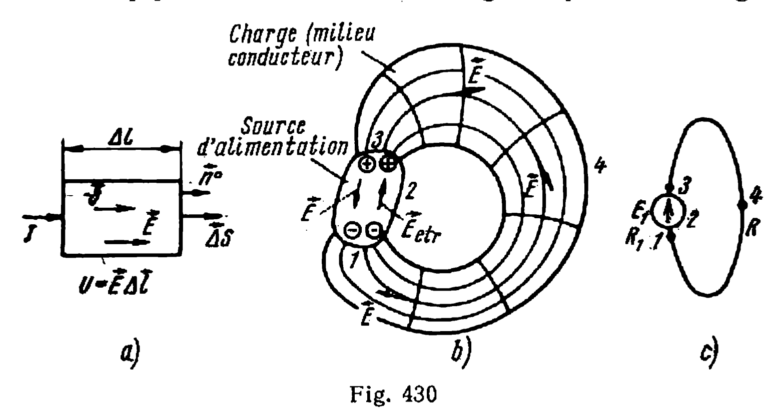


Fig. 430

l'arête de ce parallélépipède et par Δs l'aire de sa coupe transversale. Plaçons ce volume de manière que l'intensité du champ dans ce dernier soit dirigée parallèlement à son arête (fig. 430, *a*). Ce volume étant très petit, on peut estimer que l'intensité du champ électrique $\vec{E}$ est la même dans l'ensemble de ce volume élémentaire:

$$\Delta\vec{l} = \Delta l\vec{n}^\circ.$$

$$\Delta\vec{s} = \Delta s\vec{n}^\circ,$$

où $\vec{n}^\circ$ — vecteur unitaire dans la direction $\Delta\vec{l}$, $\Delta\vec{s}$ et $\vec{E}$.

Le courant $I = \int \vec{\delta}\, d\vec{s} = \vec{\delta}\Delta\vec{s}$.

La tension appliquée à l'élément de volume $U = \vec{E}\Delta\vec{l} = RI$.

Résistance de l'élément de volume

$$R = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta s}.$$

Substituons les équivalents de R et I dans l'expression $RI = \vec{E}\Delta\vec{l}$; on obtient:

$$\frac{\Delta l}{\gamma \Delta s}\vec{\delta}\,\Delta s\vec{n}^\circ = \vec{E}\Delta l\vec{n}^\circ.$$

D'où

$$\vec{\delta}=\gamma\vec{E}. \qquad (14.1)$$

La relation (14.1) est appelée *loi d'Ohm sous forme différentielle*. Cette relation établit le lieu entre la densité du courant au point considéré d'un milieu conducteur et l'intensité du champ au même point.

L'équation (14.1) est vraie pour toutes les régions en dehors des sources de F.E.M. Dans les régions occupées par les sources de F.E.M. il existe, en plus du champ électrostatique (« coulombien »), également un champ électrique dit champ électrique étranger, assurant le mouvement continu des charges dans le circuit électrique.

On appelle *champ électrique étranger* un champ électrique de nature non électrostatique (dû par exemple aux phénomènes chimiques, électrochimiques, thermiques, thermo-électriques, mécaniques ou électromagnétiques).

Désignons par $\vec{E}_{étr}$ l'intensité du champ étranger. Dans les régions occupées par les sources de F.E.M. la valeur totale de l'intensité du champ est égale à la somme géométrique de l'intensité des champs « coulombien » et étranger $\vec{E}+\vec{E}_{étr}$.

Un circuit électrique à courant continu est représenté schématiquement sur la fig. 430, *b*. Ce circuit comprend une source d'alimentation et une charge.

Une source de F.E.M. étrangère crée à l'intérieur de la source d'alimentation une intensité de champ étrangère $E_{étr}$.

L'intégrale de ligne de l'intensité du champ étrangère à l'intérieur d'une source de F.E.M. est appelée F.E.M. de la source E_1:

$$\int_1^3 \vec{E}_{étr}\,\vec{dl}=E_1.$$

Une séparation des charges électriques s'effectue continuellement dans la source sous l'effet du champ étranger. Les charges positives se déplacent vers le pôle + de la source, et les charges négatives se dirigent vers son pôle —.

Ces charges créent à l'intérieur, comme à l'extérieur de la source, un champ électrique, dont l'intensité de même que l'intensité du champ électrostatique (coulombien), est dirigée des charges positives vers les charges négatives.

Lorsqu'un courant continu circule dans un circuit, les charges électriques sont continuellement remplacées par d'autres charges, identiques à celles qui y existaient aux instants précédents. Ainsi, l'image du champ dans son sens macroscopique se répète aux instants contigus. Le champ a pour ainsi dire un caractère statique. C'est pour cette raison qu'un champ créé dans un milieu conducteur par les charges, qui se sont séparées, est appelé *champ coulombien* et l'intensité E de ce champ est appelée intensité du champ coulombien.

A l'intérieur d'une source le champ coulombien est dirigé à l'encontre du champ étranger. La valeur totale de l'intensité du champ à l'intérieur d'une source est égale à $\vec{E}+\vec{E}_{étr}$. En dehors de la source, le champ coulombien est dirigé de l'électrode positive vers l'électrode négative. C'est sous l'effet de ce champ qu'a lieu le mouvement ordonné des charges dans la région extérieure à la source. Lorsqu'un courant circule dans un circuit $|\vec{E}_{étr}|>|\vec{E}|$. A circuit ouvert $|\vec{E}_{étr}|=|\vec{E}|$.

Conformément à ce qui vient d'être dit la loi d'Ohm sous forme différentielle s'écrit de la manière suivante pour les régions occupées par les

sources de F.E.M. :

$$\vec{\delta}=\gamma(\vec{E}+\vec{E}_{étr}). \qquad (14.1')$$

Dans les ouvrages spécialisés l'équation (14.1') est appelée *loi généralisée d'Ohm sous forme différentielle.*

Si on prend dans les deux membres de l'équation (14.1') l'intégrale suivant le circuit fermé, comprenant une source de F.E.M., on obtient à partir de (14.1') la deuxième loi de Kirchhoff.

De ce fait on appelle également l'équation (14.1') *deuxième loi de Kirchhoff sous forme différentielle.*

La fig. 430, *c* représente un circuit fermé, parcouru par le courant I. Une source de F.E.M. étrangère E_1 est intercalée dans le tronçon *123*. Il n'y a pas de sources de F.E.M. étrangères dans le tronçon *341*. Désignons par R_1 la résistance du tronçon *123* et par R celle du tronçon *341*. Admettons que l'aire de la section transversale de tous les tronçons du circuit fermé soit suffisamment petite pour qu'on puisse estimer que la direction de la densité du courant et la direction de l'intensité du champ en un certain point coïncident avec la direction de l'élément de parcours $\vec{dl}$ au même point.

Multiplions les deux membres de (14.1') par $\frac{\vec{dl}}{\gamma}$ et écrivons la circulation le long du circuit fermé *12341* de la fig. 430, *c*:

$$\oint\frac{\vec{\delta}\,\vec{dl}}{\gamma}=\oint(\vec{E}+\vec{E}_{étr})\,\vec{dl}.$$

L'intégrale d'une somme étant égale à la somme des intégrales, on *a*:

$$\oint(\vec{E}+\vec{E}_{étr})\vec{dl}=\oint\vec{E}\,\vec{dl}+\oint\vec{E}_{étr}\,\vec{dl}.$$

$\oint\vec{E}\,\vec{dl}=0$ du fait du caractère potentiel du champ « coulombien ».

A son tour $\oint\vec{E}_{étr}\,\vec{dl}=\int\limits_{123}\vec{E}_{étr}\,\vec{dl}+\int\limits_{341}\vec{E}_{étr}\,\vec{dl}.$

Mais $\int\limits_{123}\vec{E}_{étr}\,\vec{dl}$ est égale à la F.E.M. étrangère E_1 et $\int\limits_{341}\vec{E}_{étr}\,\vec{dl}=0$, puisqu'il n'y a pas de F.E.M. étrangère dans le tronçon *341*.

Pour calculer la valeur de $\oint\frac{\vec{\delta}\vec{dl}}{\gamma}$ multiplions et divisons l'expression figurant sous le signe somme par l'aire de la section transversale S, passons de la densité du courant $\vec{\delta}$ au courant I et substituons à $\frac{dl}{\gamma S}$ la résistance dR du tronçon parcouru.

Nous obtenons alors

$$\frac{\vec{\delta}\,\vec{dl}}{\gamma}\frac{S}{S}=\frac{I\,dl}{\gamma S}=I\,dR,$$

$$\oint\frac{\vec{\delta}\,\vec{dl}}{\gamma}=I\oint dR=I\int\limits_{123}dR+I\int\limits_{341}dR+IR_1+IR.$$

Ainsi

$$I(R_1+R)=E_1 \qquad (a)$$

Par conséquent, nous avons formé à partir de l'équation (14.1') l'équation (a), écrite en vertu de la deuxième loi de Kirchhoff.

§ 424. Première loi de Kirchhoff sous forme différentielle. Si dans un milieu conducteur on isole un certain volume parcouru par un courant continu, invariable en fonction du temps, on peut dire que le courant qui pénètre dans ce volume doit être égal au courant qui en sort; autrement une accumulation de charges électriques se produirait dans le volume considéré, ce qui n'est pas confirmé par l'expérience. La somme des courants entrant dans un volume et sortant de ce dernier s'écrit comme suit:

$$\oint \vec{\delta}\, \vec{ds} = 0. \tag{14.2}$$

Si on divise le premier et le second membres de l'équation (14.2) par le même nombre (par le volume déjà mentionné), l'égalité reste satisfaite

$$\frac{\oint \vec{\delta}\, \vec{ds}}{V} = 0.$$

Il va de soi que cette dernière relation est satisfaite également lorsque le volume se trouvant à l'intérieur de la surface fermée tend vers zéro

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oint \vec{\delta}\, \vec{ds}}{V} = \operatorname{div} \vec{\delta} = 0.$$

Ainsi nous avons pour un champ permanent, invariable dans le temps dans un milieu conducteur

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0. \tag{14.3}$$

Cette relation s'appelle première loi de Kirchhoff sous forme différentielle. Elle indique qu'en régime permanent en un point quelconque du champ, il n'y a pas d'accumulation, ni d'évanouissement de lignes $\vec{\delta}$.

§ 425. Equation de continuité. La relation (14.3) n'est vraie que pour des champs permanents, invariables en fonction du temps. Pour les champs électriques non permanents, lorsqu'ils varient en fonction du temps, $\operatorname{div} \vec{\delta} \neq 0$. Dans ce cas, le courant sortant d'un volume quelconque est déterminé par la vitesse de variation de la charge q, se trouvant à l'intérieur de ce volume:

$$\oint \vec{\delta}\, \vec{ds} = -\frac{dq}{dt}. \tag{14.4}$$

Le signe — dans cette dernière expression s'explique par le fait qu'un courant sortant d'un volume, ne peut le faire qu'aux dépens de la diminution de la charge dans ce volume.

Divisons les deux membres de l'équation (14.4) par le volume V, se trouvant à l'intérieur de la surface fermée s, et trouvons la limite du rapport ainsi obtenu lorsque V tend vers zéro

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oint \vec{\delta}\, \vec{ds}}{V} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{V}\right)$$

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{d\rho}{dt}\text{*}. \qquad (14.5)$$

ρ — densité volumique de la charge au point considéré.

§ 426. Forme différentielle de la loi de Joule — Lenz. Comme il a été indiqué dans la section consacrée au courant continu de la première partie de ce cours, lorsqu'un courant continu I circule dans un conducteur quelconque, de résistance R, il s'y dégage par unité de temps (par seconde) une énergie égale à I^2R. Calculons l'énergie dégagée par unité de temps dans l'unité de volume d'un milieu conducteur. A cette fin, utilisons la fig. 430, *a*.

$$\frac{I^2R}{V} = \frac{(\delta\Delta s)^2}{\Delta l\Delta s}\frac{(\Delta l)}{\gamma\Delta s} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2. \qquad (14.6)$$

Ainsi une énergie, numériquement égale à γE^2, se dégage par unité de temps dans l'unité de volume d'un milieu conducteur.

§ 427. Le champ électrique dans un milieu conducteur est régi par l'équation de Laplace. De même que dans un champ électrostatique, l'intensité du champ électrique dans un milieu conducteur $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

On a pour un champ invariable dans le temps

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = \operatorname{div} \gamma\vec{E} = 0. \qquad (14.7)$$

Lorsque γ du milieu ne varie pas d'un point à l'autre, c'est-à-dire lorsque le milieu est homogène et isotrope, γ, étant une grandeur constante, peut être placée devant le signe de la divergence et, par conséquent, au lieu de div $\gamma\vec{E} = 0$ on peut écrire γ div $\vec{E} = 0$ ou

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \qquad (14.8)$$

En d'autres termes

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi) = 0$$

ou

$$\nabla^2\varphi = 0. \qquad (14.9)$$

Ainsi le champ dans un milieu conducteur homogène est régi par l'équation de Laplace. L'équation de Laplace décrit les champs potentiels. Par conséquent, le champ d'un courant continu dans un milieu conducteur dérive d'un potentiel. Dans ce champ, pour les régions ne comprenant pas de sources, $\oint \vec{E}\,\vec{dl} = 0$.

§ 428. Passage du courant d'un milieu ayant une certaine conductivité λ_1 dans un milieu avec une autre conductivité λ_2. Conditions aux limites. Recherchons quelles sont les conditions aux limites à satisfaire lors du

* Nous allons parler au § 460 de l'équation de continuité comme de l'équation exprimant la continuité du courant total (du courant de conduction et du courant de déplacement électrique).

passage du courant d'un milieu avec une certaine conductivité dans un milieu ayant une autre conductivité.

La ligne *OO* de la fig. 431 est la surface de séparation (la limite) des deux milieux. Prenons sur cette surface de séparation un contour plan fermé *1234*.

Ecrivons la circulation le long de ce contour.

Les côtés *12* et *34* sont très petits par rapport aux côtés *23* et *41*. (Désignons par dl la longueur de ces derniers).

Puisque $\oint \vec{E}\, \vec{dl}$ le long d'un contour fermé quelconque est nul, il est nul également pour le contour *1234*.

Du fait que les tronçons *12* et *34* sont très petits, on peut négliger les composantes de l'intégrale le long de ces tronçons; on obtient alors

$$E_{1t}\, dl - E_{2t}\, dl = 0 \quad \text{ou} \quad E_{1t} = E_{2t}. \qquad (14.10)$$

Cette relation concorde avec la relation (13.34).

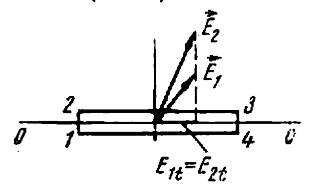


Fig. 431

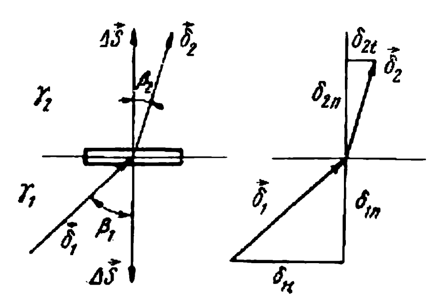


Fig. 432

A la surface de séparation les composantes normales des densités des courants sont égales les unes aux autres. Démontrons-le.

Isolons sur la surface de séparation un parallélépipède aplati (fig. 432). Le flux du vecteur $\vec{\delta}$ entrant dans volume à travers sa face inférieure est égal à $-\delta_{1n}\Delta S$. Le flux du vecteur $\vec{\delta}$ sortant de ce volume à travers la face supérieure est $\delta_{2n}\Delta S$. Du fait que $\oint \vec{\delta}\vec{ds} = 0$, on a

$$-\delta_{1n}\Delta S + \delta_{2n}\Delta S = 0$$

et

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}. \qquad (14.11)$$

Ainsi, lorsque le courant passe d'un milieu avec une certaine conductivité dans un milieu avec une autre conductivité, la composante tangentielle du vecteur $\vec{E}$ ($E_{1t} = E_{2t}$ mais $E_{1n} \neq E_{2n}$) ne subit pas de solution de continuité, ainsi que la composante normale de la densité du courant $\delta_{1n} = \delta_{2n}$ (mais $\delta_{1t} \neq \delta_{2t}$).

Il en découle que les valeurs totales du vecteur $\vec{E}$ et du vecteur $\vec{\delta}$ varient en général par saut à la surface de séparation.

Recherchons la relation entre l'angle d'incidence β_1 et l'angle de réfraction β_2:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\delta_{1t}}{\delta_{1n}} = \frac{E_{1t}\gamma_1}{\delta_{1n}}; \quad \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{\delta_{2t}}{\delta_{2n}} = \frac{E_{2t}\gamma_2}{\delta_{2n}}$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \qquad (14.12)$$

Si le courant passe d'un milieu à conductivité plus grande (constitué par du métal, par exemple) dans un milieu à conductivité plus petite (dans la terre, par exemple), la tangente de l'angle de réfraction $\operatorname{tg}\beta_2 = \operatorname{tg}\beta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ est plus petite que la tangente de l'angle d'incidence et, par conséquent, l'angle β_2 est plus petit que l'angle β_1. Si γ_2 est très petit, l'angle $\beta_2 \to 0$.

§ 429. Analogie entre un champ dans un milieu conducteur et un champ électrostatique. Un champ électrostatique et un champ de courant continu dans un milieu conducteur sont différents par leur nature même. Le champ électrostatique est créé par des charges électriques, invariables dans le temps et fixes dans l'espace, tandis que le champ électrique dans un milieu conducteur est un champ dans lequel les charges électriques sont animées d'un mouvement ordonné sous l'effet d'une source extérieure. Malgré ceci une certaine analogie formelle peut être constatée entre ces deux champs. En effet, un champ électrostatique dans les régions non occupées par des charges satisfait à l'équation de Laplace. Le champ électrique de courant continu dans un milieu conducteur, en dehors des sources étrangères, satisfait également à cette équation. On a affaire dans les deux champs au vecteur d'intensité du champ $\vec{E}$. Le vecteur densité du courant $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$ peut être comparé au vecteur déplacement électrique $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$.

D'autre part, on peut comparer au flux du vecteur $\vec{D}$ (désignons-la par la lettre ψ) $\psi = \int \vec{D}\, \vec{ds}$, le vecteur densité du courant électrique

$$I = \int \vec{\delta}\, \vec{ds}.$$

Les conditions aux limites sur la surface de séparation des deux diélectriques s'écrivent comme suit:

$$E_{1t} = E_{2t} \text{ et } D_{1n} = D_{2n}.$$

Les conditions aux limites sur la surface de séparation des deux milieux à conductivité différente:

$$E_{1t} = E_{2t} \text{ et } \delta_{1n} = \delta_{2n}.$$

Mais si deux champs satisfont à la même équation $\nabla^2\varphi = 0$ et lorsque les conditions identiques aux limites y sont satisfaites pour des grandeurs semblables, on peut dire, pour la même forme des surfaces de séparation et en vertu du théorème d'unicité, que l'ensemble des lignes de

force et des lignes équipotentielles pour ces deux champs (autrement dit, l'image du champ) est le même.

Cette analogie formelle est largement utilisée dans la pratique. Ainsi, par exemple, si un champ électrostatique quelconque a déjà été étudié, toutes les renseignements obtenus sur ce champ peuvent être appliqués également à un champ géométriquement semblable, se trouvant dans un milieu conducteur.

La réciproque est évidemment vraie.

§ 430. Etude expérimentale des champs à l'aide d'une cuve électrolytique. Si la forme des surfaces de séparation (des électrodes) est compliquée, le calcul analytique des champs est souvent très difficile. On a alors recours à l'étude expérimentale des champs. Les champs sont habituellement étudiés dans une cuve électrolytique. Supposons qu'on désire construire l'image d'un champ électrostatique plan-parallèle. On n'arrive pas à mesurer directement les potentiels du champ électrostatique en plaçant des sondes aux divers points du champ, car ces sondes, même lorsque la puissance absorbée par les indicateurs est faible, introduisent une perturbation dans le champ rien que par leur présence.

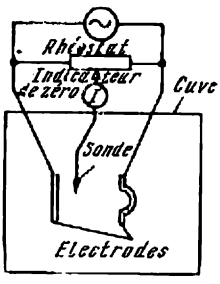


Fig. 433

Par conséquent, on a recours à la méthode de simulation. A cette fin on place des électrodes dans une cuve électrolytique (contenant de l'eau acidulée par exemple) (fig. 433). La forme et la disposition réciproque de ces électrodes doivent être exactement les mêmes que dans le champ électrostatique étudié. Afin que les parois du bain n'apportent que des perturbations minimales au champ étudié, les dimensions linéaires de la cuve doivent être de plusieurs fois supérieures aux dimensions linéaires respectives du champ étudié.

Les électrodes sont raccordées à une source de F.E.M. à basse fréquence (50 *Hz* habituellement). On ne peut pas utiliser une F.E.M. continue comme source d'alimentation, car une électrolyse de l'eau acidulée va se produire en courant continu et les bulles de gaz, en se déposant sur les électrodes, vont perturber le champ examiné. Il faut donc qu'un courant alternatif circule dans l'électrolyte.

On peut relever la famille des lignes équipotentielles de ce champ à l'aide d'un rhéostat auxiliaire, d'une sonde et d'un indicateur de zéro. A cette fin on amène le curseur du rhéostat en une position quelconque déterminée et, en déplaçant la sonde de manière à lire zéro sur l'indicateur, on trouve la totalité des points, dont le potentiel est égal au potentiel du curseur du rhéostat. Ensuite on amène le curseur du rhéostat en une nouvelle position et on détermine les coordonnées des points de la deuxième surface équipotentielle, etc. Après ceci, en partant de la famille des courbes équipotentielles ainsi obtenues on construit le réseau des lignes de force. En construisant ce dernier, il faut partir du fait que les lignes de force en un point quelconque du champ doivent être perpendiculaires aux surfaces équipotentielles, y compris les surfaces des électrodes.

Dans un champ électrostatique les lignes de force sont perpendiculaires aux surfaces des électrodes. Dans un champ d'un milieu conducteur, les lignes de force, rigoureusement parlant, s'écartent quelque peu de la normale aux surfaces des électrodes. Mais si la conductivité des électrodes est nettement supérieure à celle de l'électrolyte, on peut estimer (voir expression 14.12) avec une précision suffisante, que les lignes de force s'approchent de la surface des électrodes pratiquement sous un angle droit.

§ 431. Relation entre la conductance et la capacité. Lorsqu'on place des électrodes quelconques dans un milieu conducteur et lorsqu'on les raccorde à une source de F.E.M., un courant circule dans ce milieu conducteur. Si la tension entre les électrodes *1* et *2* est égale à U_{12} et lorsqu'un courant I traverse le milieu, la conductance de ce milieu est

$$G=\frac{I}{U_{12}}.$$

Puisque le courant $I=\int\vec{\delta}\,\vec{ds}=\gamma\int\vec{E}\,\vec{ds}$ et $U_{12}=\int_1^2\vec{E}\,\vec{dl}$, on a

$$G=\frac{\gamma\int\vec{E}\,\vec{ds}}{\int_1^2\vec{E}\,\vec{dl}}. \tag{14.13}$$

A son tour dans un champ électrostatique, à électrodes de même configuration, la capacité entre les deux parties des électrodes sur lesquelles sont réparties des charges Q de grandeur égale et de signes contraires, créant le flux ψ du vecteur d'induction électrique D

$$\psi=Q=\int\vec{D}\,\vec{ds},$$

est calculée comme suit:

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon\int\vec{E}\,\vec{ds}}{\int_1^2\vec{E}\,\vec{dl}}. \tag{14.14}$$

Si on divise (14.14) par (14.13) on obtient, après simplification,

$$\frac{C}{G}=\frac{\varepsilon}{\gamma}, \tag{14.15}$$

autrement dit, la capacité C entre deux corps, séparés par un diélectrique à permittivité ε se rapporte à la conductance G entre les mêmes corps, placés dans un milieu à conductivité γ, comme ε se rapporte à γ.

La relation (14.15) permet, en connaissant la capacité entre deux corps quelconques, de trouver l'expression pour la conductivité ou de réaliser l'opération inverse.

Ainsi, par exemple, la capacité d'une ligne à deux conducteurs

$$C=\frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{d}{r}}. \qquad (14.16)$$

Ici l — longueur des conducteurs, d — leur entraxe et r — rayon d'un conducteur.

Pour obtenir l'expression de la conductance entre deux conducteurs parallèles (deux cylindres), immergés dans un milieu à conductivité γ, il faut conformément à (14.15) substituer γ à ε dans (14.16). Nous obtenons ainsi

$$G=\frac{\pi\gamma l}{\ln\frac{d}{r}}. \qquad (14.17)$$

Voici un autre exemple encore. La capacité d'un câble coaxial (fig. 434, *a*) est

$$C=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

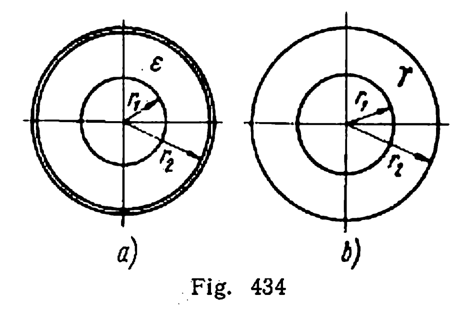


Fig. 434

La conductance entre deux cylindres coaxiaux de longueur séparés par un milieu à conductivité γ (fig. 434, *b*) est

$$G=\frac{2\pi\gamma l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Cette analogie peut être appliquée même à des champs plus compliqués. Ainsi, par exemple, si on place dans un champ uniforme, créé dans un milieu à conductivité γ_e, une sphère à conductivité γ_i, conformément à (13.67), le potentiel à l'intérieur de la sphère peut être calculé comme suit :

$$\varphi_i=\varphi_0+E_0\frac{3\gamma_e}{2\gamma_e+\gamma_i}z.$$

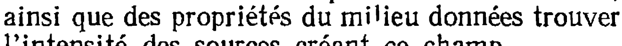
§ 432. Généralités sur les problèmes de calcul d'un champ électrique dans un milieu conducteur et les méthodes de leur solution. De même que les problèmes d'électrostatique, les problèmes de calcul d'un champ électrique dans un milieu conducteur peuvent être classés suivant le caractère de la grandeur, qu'on désire calculer ; nous avons ainsi des problèmes dans lesquels on recherche les caractéristiques ponctuelles (densité de courant, potentiel) et des problèmes à l'aide desquels on détermine les caractéristiques intégrales du champ, comme par exemple la résistance entre électrodes.

Suivant les grandeurs données et à trouver, tous les problèmes de calcul d'un champ électrique dans un milieu conducteur peuvent être répartis en deux grandes catégories.

Dans la première de ces catégories la forme et la disposition des électrodes, les caractéristiques géométriques du champ, les propriétés du milieu et l'intensité des sources, créant le champ, sont données. On

demande de trouver soit les caractéristiques ponctuelles, soit les caractéristiques intégrales du champ.

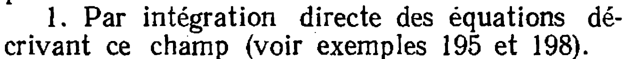
La seconde catégorie de problèmes est inverse de celle dont nous venons de parler. Comme exemple de problèmes de cette deuxième catégorie on peut citer le problème suivant : en partant de la caractéristique ponctuelle du champ, de la forme et de la disposition des électrodes,



ainsi que des propriétés du milieu données trouver l'intensité des sources créant ce champ.

Fig. 435

Les problèmes de calcul d'un champ électrique dans un milieu conducteur peuvent être résolus par les méthodes suivantes :



1. Par intégration directe des équations décrivant ce champ (voir exemples 195 et 198).

2. En utilisant les solutions analytiques pour d'autres champs statiques irrotationnels (voir exemples 194 et 200).



3. Par voie expérimentale (§ 430) ou graphique.

La méthode graphique de construction de l'image d'un champ est examinée au § 456 pour un champ magnétique plan-parallèle.

La méthode exposée dans ce paragraphe est également applicable à la construction de l'image d'un champ électrique plan-parallèle dans un milieu conducteur.

* * *

Examinons en conclusion le problème du calcul d'un champ électrique dans un diélectrique, entourant les conducteurs parcourus par des courants.

Il est admis que *l'image d'un champ électrique dans un diélectrique, entourant les conducteurs parcourus par des courants, soit similaire à l'image d'un champ électrique en électrostatique.*

Rigoureusement parlant, ceci n'est vrai qu'avec une certaine approximation, puisque en électrostatique la composante tangentielle de l'intensité du champ électrique à la surface d'un corps conducteur est nulle, alors que pour un courant continu circulant dans un conducteur, la composante tangentielle du champ électrique à la surface de ce conducteur, tout en étant très petite par rapport à la composante normale de l'intensité en ce point, n'est pas nulle cependant. Assurons-nous, à l'aide d'un exemple numérique, que la composante tangentielle de l'intensité du champ E_t est nettement plus petite que la composante normale du E_n.

Supposons que la différence de potentiel U entre deux barres en cuivre, parcourues par le courant (fig. 435), soit égale à 100 V, que la distance b entre ces barres est de 2 cm et que la densité du courant $\delta = 2{,}5 \cdot 10^6$ A/m^2. On a alors

$$E_t = \frac{\delta}{\gamma} = 4{,}46 \cdot 10^{-2} \ V/m,$$

$$E_n = \frac{U}{b} = 5 \cdot 10^3 \ V/m,$$

$$\frac{E_n}{E_t} \approx 1{,}12 \cdot 10^5.$$

Exemples

Exemple 194. Calculer le courant de fuite d'un câble coaxial d'un kilomètre de longueur. L'espace entre le conducteur et la gaine est rempli d'un diélectrique imparfait, ayant une certaine conductivité,

$$\gamma = 10^{-8}\,\Omega^{-1}\cdot m^{-1}.$$

Le rayon du conducteur est r_1 le rayon de la gaine $r_2 = er_1$, où e — base des logarithmes naturels. La tension entre le conducteur et la gaine est de 10 kV.

Solution. Le courant de fuite $I = UG$. La perditance

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\cdot 10^{-8}\cdot 10^3}{1} = 6{,}28\cdot 10^{-5}\ S.$$

Le courant de fuite à travers une isolation imparfaite:

$$I = 10^4\cdot 0{,}628\cdot 10^{-4} = 0{,}628\ A/km.$$

Exemple 195. Examinons le problème le plus simple de calcul du champ d'une prise de terre. L'écoulement du courant à la terre se fait à l'aide de prises de terre enfouies. Le courant s'écoule à la terre à travers cette prise et se répartit dans l'épaisseur de la terre, pour se rassembler auprès de l'autre électrode de la prise. La terre joue ici le rôle du conducteur de retour.

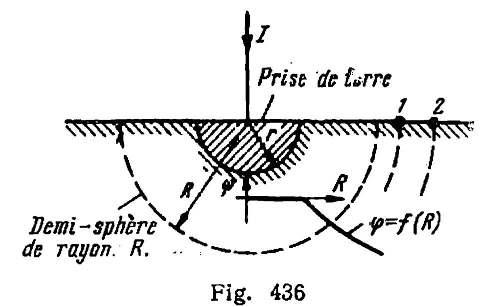


Fig. 436

Si on enfouit dans la terre un hémisphère métallique, à travers laquelle le courant I s'écoule dans la terre (fig. 436) et si on suppose que la deuxième électrode, vers laquelle ce courant est dirigé, se trouve très loin, la densité de courant dans la terre à la surface de l'hémisphère de rayon R est $\delta = \frac{I}{2\pi R^2}$ (surface de la sphère $4\pi R^2$, surface de l'hémisphère $2\pi R^2$). L'intensité du champ

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma R^2}.$$

La tension entre deux points à la surface de la terre (points 1 et 2:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E\,dR = \frac{1}{2\pi\gamma}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R^2} = -\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

La courbe de variation du potentiel à la surface de la terre est représentée sur la fig. 436.

A titre d'exemple trouvons la tension entre les points *1* et *2*, placés ne distance égale environ au pas d'un homme ($R_1 = 22$ *m*, $R_2 = 23$ *m*). Un courant $I = 1000$ *A* (un courant de court-circuit) s'écoule par la prise de terre, la conductivité de la terre étant $\gamma = 10^{-2}\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$:

$$U_{12}=\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{10^3}{2\pi\cdot 10^{-2}}\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{23}\right)\approx 31{,}9\,V.$$

Exemple 196. Deux tubes métalliques de 50 *cm* de diamètre extérieur et de 3 *m* de longueur sont placés verticalement dans l'eau de mer à $\gamma = 0{,}1\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$.

Trouver la conductance *G* entre ces tubes. Les axes des tubes se trouvent à une distance $d = 25$ *m* l'un de l'autre.

Solution.

$$G=\frac{\pi\gamma l}{\ln\frac{d}{r}}=\frac{\pi\cdot 10^{-1}\cdot 3}{\ln\frac{25}{0{,}25}}=\frac{\pi\cdot 0{,}3}{4{,}605}=0{,}205\ S.$$

Exemple 197. Etablir l'expression pour calculer la conductance *G* entre les plans S_1 et S_2 d'un corps conducteur, ayant la forme d'un coin (fig. 437).

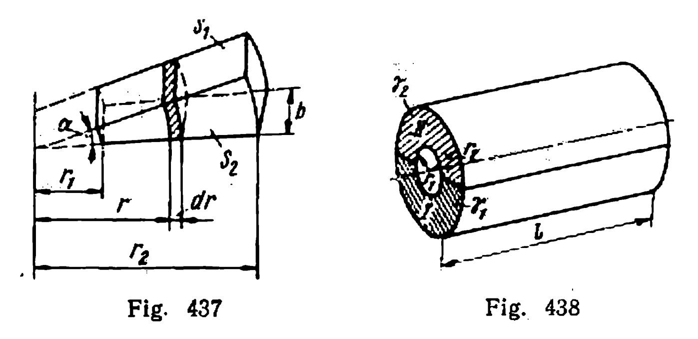


Fig. 437 Fig. 438

Solution. La conductance de la bande hachurée de hauteur $r\alpha$, d'épaisseur *dr* et de largeur *b* est

$$dG=\frac{\gamma b dr}{\alpha r},$$

ici γ — conductivité

$$G=\frac{\gamma b}{\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{\gamma b}{\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Exemple 198. L'espace entre deux tubes cylindriques coaxiaux en métal de longueur *l* et de rayons r_1 et r_2 contient deux milieux conducteurs différents (fig. 438). Le milieu *I* a une conductivité γ_1 et la conductivité du milieu *II* est γ_2. Trouver la conductance *G* entre ces tubes.

S o l u t i o n. Pour établir l'expression cherchée, supposons qu'une différence de potentiel U existe entre les tubes, que le courant circulant dans le premier milieu sous l'effet de la tension U soit I_1 et que le courant I_2 circule dans le deuxième milieu. Les lignes de densité du courant δ sont dirigées radialement.

Désignons par S la surface égale à la moitié de la surface cylindrique de rayon courant r

$$S = \pi r l \ (r_1 \leqslant r \leqslant r_2),$$

ici δ_1 — densité du courant dans le premier milieu et δ_2 — densité dans le deuxième:

$$I_1 = \delta_1 S = \gamma_1 E_1 \pi r l, \quad E_1 = \frac{I_1}{\pi r l \gamma_1};$$

$$I_2 = \delta_2 S = \gamma_2 E_2 \pi r l, \quad E_2 = \frac{I_2}{\pi r l \gamma_2};$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_1\, dr = \int_{r_1}^{r_2} E_2\, dr;$$

$$U = \frac{I_1}{\pi \gamma_1 l} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{I_2}{\pi \gamma_2 l} \ln \frac{r_2}{r_1};$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U \pi l (\gamma_1 + \gamma_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}};$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\pi l (\gamma_1 + \gamma_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

E x e m p l e 199. Utilisons les résultats de l'exemple 198 et écrivons l'expression pour le calcul de la capacité d'un condensateur cylindrique coaxial, dont les armatures ont respectivement les rayons r_1 et r_2. L'espace entre les armatures est rempli de deux diélectriques différents, conformément à la fig. 438 (où il faut lire cette fois ε_1 au lieu de γ_1 et ε_2 au lieu de γ_2).

S o l u t i o n. En vertu de l'analogie dont il était question au § 431, nous avons

$$C = \frac{\pi l (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

E x e m p l e 200. On a créé sur une plaque en aluminium ($\gamma_e = 3{,}57 . 10^7 \ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$) un champ électrique uniforme d'intensité $E_0 = 0{,}1 \ V/m$. Calculer la densité du courant dans une inclusion en cuivre ($\gamma_i = 5{,}6 \cdot 10^7 \ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$), ayant une forme cylindrique et disposée perpendiculairement au champ.

S o l u t i o n. Utilisons l'expression (13.72) et l'analogie examinée au § 431:

$$E_i = E_0 \frac{2\gamma_e}{\gamma_e + \gamma_i} = 10^{-1} \frac{2 \cdot 3{,}57}{3{,}57 + 5{,}6} = 0{,}78 \cdot 10^{-1} \ V/m;$$

$$\delta_i = \gamma_i E_i = 5{,}6 \cdot 10^7 \cdot 0{,}78 \cdot 10^{-1} = 436 \cdot 10^4 \ A/m^2.$$

CHAPITRE XV

CHAMP MAGNÉTIQUE DE COURANT CONTINU

§ **433. Introduction.** Nous avons exposé au chapitre « Circuits magnétiques » de la première partie de ce cours les méthodes de calcul des circuits magnétiques et les notions fondamentales caractérisant un champ magnétique. Nous y avons indiqué qu'un champ magnétique est caractérisé par l'induction $\vec{B}$, l'aimantation $\vec{J}$ et l'intensité du champ magnétique $\vec{H}$.

Ces trois grandeurs sont liées entre elles par la relation

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \qquad (15.1)$$

où μ_0 — perméabilité du vide. Dans le système MKSA

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ H/m.$$

L'une des manifestations essentielles d'un champ magnétique est l'effet qu'il exerce sur un conducteur parcouru par un courant, placé dans ce champ. L'expérience a montré que la force F, avec laquelle un champ magnétique agit sur l'élément d'un conducteur de longueur $\vec{dl}$, parcouru par le courant I, est déterminée de la manière suivante:

$$\vec{F} = I [\vec{dl} \times \vec{B}]. \qquad (15.2)$$

Fig. 439

Cette force est perpendiculaire à l'induction au point considéré du champ et en même temps perpendiculaire à l'élément du courant $I\vec{dl}$ (fig. 439). Il découle de l'expression (15.2) que l'induction peut être définie comme une force agissant sur un conducteur de longueur dl, égale à l'unité, lorsqu'il est parcouru par un courant I égal à l'unité.

Dans le système d'unités international MKSA, l'unité de mesure de l'induction est appelée tesla ($1\ T = 1\ V \cdot s/m^2$).

Dans le système CGS l'unité de mesure de l'induction est le gauss. Si l'induction $\vec{B}$ et l'élément $\vec{dl}$ sont parallèles, l'élément de courant n'est soumis à aucune action mécanique de la part du champ magnétique. L'action mécanique d'un champ magnétique sur un élément de courant est maximale lorsque $\vec{B}$ et $\vec{dl}$ sont respectivement perpendiculaires.

§ **434. Définition d'un champ magnétique.** Un champ électromagnétique est un ensemble de champs électrique et magnétique liés l'un à l'autre. Ainsi, le champ magnétique est l'un des aspects du champ électromagnétique. Au chapitre présent, nous allons examiner le champ magnétique de courant continu; il est caractéristique pour ce champ qu'un conducteur, qui s'y trouve, lorsqu'il est parcouru par un courant, subit l'action d'une force directement proportionnelle à l'intensité de ce courant.

Du fait que cette force dépend de l'orientation de l'élément du courant dans l'espace, on peut se faire une idée complète du champ au point considéré seulement lorsqu'on connaît les forces agissantes pour trois positions perpendiculaires de l'élément de courant (une grandeur vectorielle est définie par ses trois projections).

§ 435. Relation entre un champ magnétique et le courant. Un champ magnétique est créé par un courant. Partout où circule un courant électrique, il y crée obligatoirement un champ magnétique. La notion contraire est vraie également: si en un point quelconque ou en des points quelconques il existe un champ magnétique, ce champ a été engendré par un certain courant. Il n'est pas nécessaire que ce courant circule à proximité immédiate des points de l'espace où il existe un champ magnétique.

Un champ magnétique est créé à même titre par le courant de conduction, comme par le courant de déplacement électrique. Bornons-nous ici à mentionner le courant de déplacement électrique, comme courant dû à une variation de l'intensité du champ électrique en fonction du temps. Dans la présente section, comme nous l'avons déjà dit, nous examinons le champ magnétique de courant continu, et dans ces conditions, il n'existe pas de courant de déplacement.

§ 436. La loi fondamentale d'un champ magnétique est la loi du courant total. Le lieu quantitatif entre la circulation du vecteur $\vec{H}$ le long d'un circuit fermé et le courant traversant ce circuit est donné par la loi du courant total

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = I. \tag{15.3}$$

Cette loi peut être énoncée comme suit: l'intégrale de ligne du champ magnétique le long d'un contour fermé quelconque est égale au courant total embrassé par ce contour.

On entend par courant total la totalité des courants (le courant de conduction et le courant de déplacement) embrassé par le contour d'intégration.

L'écriture mathématique de la loi du courant total sous forme d'une équation (15.3) a été appelée *forme intégrale de la loi du courant total.* Le terme « forme intégrale » signifie ici que l'expression (15.3) donne une relation de nature intégrale, c'est-à-dire une relation entre l'intégrale $\vec{H}$, suivant un certain contour fermé, et le courant et non pas une relation entre l'intensité du champ en un point quelconque de ce champ et la densité du courant au même point (cette dernière relation est appelée relation différentielle).

La forme intégrale de la loi du courant total est utilisée lorsqu'on peut se servir de la symétrie du champ. Ainsi, par exemple, l'intensité du champ en un certain point A dans le champ d'un conducteur droit unique, parcouru par le courant I (fig. 440), est déterminée, en vertu de la loi du courant total, de la manière suivante: traçons par le point A une circonférence de rayon R, située dans le plan perpendiculaire à l'axe du conducteur, de manière que le centre de cette circonférence se

trouve sur cet axe. En vertu de la symétrie, l'intensité du champ en tous les points de la circonférence est numériquement la même. La direction de l'intensité coïncide avec la tangente à la circonférence. Par conséquent,

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = \oint H\,dl \cos 0° = H \oint dl = H \cdot 2\pi R = I, \quad H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Lorsque le rayon R augmente, l'intensité du champ magnétique décroît suivant une loi hyperbolique.

Si un champ quelconque a un caractère compliqué, et si on n'arrive pas à établir un contour fermé, dont tous les points se trouvent dans des conditions symétriques, la forme intégrale d'écriture de la loi du courant, tout en restant vraie même pour un tel contour, ne peut pas être utilisée pour trouver l'intensité du champ en un point quelconque de ce dernier (H ne peut être mis en facteur devant le signe d'intégration).

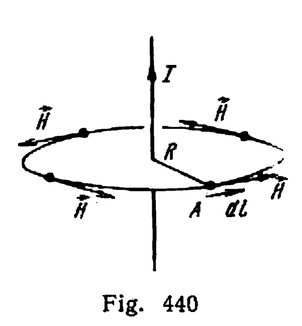


Fig. 440

§ 437. Forme différentielle de la loi du courant total. La relation (15.3) peut être utilisée pour un contour de dimensions quelconques, y compris un contour très petit.

Isolons dans un milieu quelconque un contour de petites dimensions (représenté en gros traits sur la fig. 441) et écrivons pour ce dernier la circulation du vecteur H. La circulation de l'intensité du champ le long de ce contour est égale au courant transperçant l'aire délimitée par de gros traits.

Si cette aire est très petite on peut supposer que la densité du courant $\vec{\delta}$ à l'intérieur de cet élément de surface soit partout la même; alors le courant qui la traverse est

$$\Delta_i = \vec{\delta}\,\vec{\Delta s} = \delta_n \Delta s.$$

Ici δ_n — projection du vecteur de la densité du courant $\vec{\delta}$ sur la normale à l'élément de surface, c'est-à-dire sur la direction $\vec{\Delta s}$:

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = \delta_n \Delta s.$$

Fig. 441

On prend comme sens positif pour la normale à l'élément de surface, le sens de déplacement d'un tire-bouchon, qu'on tourne dans le sens, considéré comme positif pour le parcours du contour lors de l'établissement de la circulation.

Divisons les deux membres de l'équation par Δs et écrivons que Δs tend vers zéro. Ceci correspond au resserrement jusqu'à zéro de l'aire tracée en gros traits sur la fig. 441. La limite de la relation ainsi obtenue est

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint \vec{H}\,\vec{dl}}{\Delta s} = \delta_n.$$

La grandeur figurant comme premier membre de cette égalité est appelée en mathématiques « projection du rotationnel du vecteur $\vec{H}$ sur la direction de la normale à l'aire Δs ». La projection du rotationnel sur la direction de la normale est désignée comme

$$\mathrm{rot}_n \vec{H},$$

Par conséquent,

$$\mathrm{rot}_n \vec{H} = \delta_n.$$

Si on oriente l'aire Δs dans l'espace de manière que la direction de la normale à cette aire coïncide avec la direction du vecteur densité du courant $\vec{\delta}$ au point considéré du champ, on peut écrire à la place de l'égalité des projections des deux vecteurs ($\mathrm{rot}_n \vec{H}$ et $\vec{\delta}_n$) l'égalité des vecteurs eux-mêmes, à savoir

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta}. \tag{15.4}$$

Cette dernière équation représente justement la loi du courant total sous sa forme différentielle. Elle sera fréquemment utilisée par la suite pour le calcul des champs magnétiques.

Le rotationnel peut être défini comme une fonction caractérisant le champ au point considéré en tant que son aptitude à la formation de tourbillons.

L'équation (15.4) est écrite sous sa forme générale, sans se référer à un système de coordonnées quelconque; par conséquent, pour chaque système de coordonnées particulier elle doit être exprimée sous une forme différente.

§ 438. Expression de $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta}$ en coordonnées cartésiennes. L'égalité des deux vecteurs $\mathrm{rot}\,\vec{H}$ et $\vec{\delta}$ signifie que leur projection sur l'axe des x, leur projection sur l'axe des y et leur projection sur l'axe des z sont égales respectivement. La projection de $\mathrm{rot}\,\vec{H}$ sur l'axe des z est égale à $\mathrm{rot}_z \vec{H} = \frac{\oint \vec{H}\,\vec{dl}}{\Delta s_z}$, la projection du vecteur $\vec{\delta}$ sur l'axe des z est δ_z.

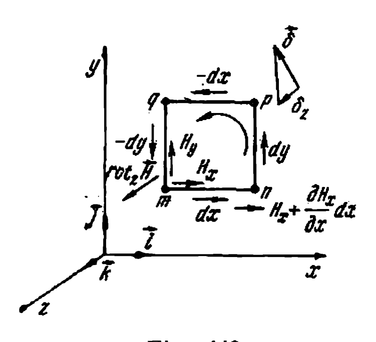


Fig. 442

Un petit contour rectangulaire *mnpq* est représenté dans un système de coordonnées cartésien sur la fig. 442. Parcourons ce contour dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre et écrivons la circulation du vecteur $\vec{H}$. En l'écrivant, il faut tenir compte de la variation du vecteur $\vec{H}$ d'un point à l'autre. Désignons la projection de $\vec{H}$ sur l'axe des x et des y au point m respectivement par $\vec{H}_x$ et $\vec{H}_y$. Au point n la projection sur l'axe des x n'est plus la même que la projection au point

m et devient égale à $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx$; la projection sur l'axe des y: $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx$.

On a de même au point q:

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \quad \text{et} \quad H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy.$$

Et au point p:

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \quad \text{et} \quad H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx.$$

En écrivant la circulation le long des tronçons mn et pq il ne faut tenir compte que des composantes de H suivant x (les composantes suivant y sont perpendiculaires à l'élément du parcours).

La composante $\oint \vec{H}\, \vec{dl}$ suivant le tronçon mn va être trouvée comme produit de la valeur moyenne de la composante suivant x de l'intensité sur ce tronçon par la longueur dx du tronçon, c'est-à-dire

$$\frac{H_x + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx\right)}{2} dx = \left(H_x + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx\right) dx.$$

La composante 2 suivant le tronçon np est

$$\frac{\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx\right) + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy\right)}{2} dy =$$

$$= \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy\right) dy.$$

Suivant le tronçon pq

$$\frac{\left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy\right) + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx\right)}{2} (-dx) =$$

$$= \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx\right) (-dx).$$

Et, enfin suivant le tronçon qm

$$\frac{H_y + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy\right)}{2} (-dy) = \left(H_y + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy\right) (-dy).$$

Si on additionne toutes les composantes de la circulation le long du contour $mnpq$ on obtient

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Conformément à la définition de la projection du rotationnel sur l'axe des z, divisons la circulation par l'aire $ds_z = dx\, dy$; alors cette

projection s'écrit de la manière suivante:

$$\operatorname{rot}_z \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z.$$

De même

$$\operatorname{rot}_x \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x$$

et

$$\operatorname{rot}_y \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y.$$

Ainsi

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right). \quad (15.5)$$

§ 439. Expression du rotationnel sous forme du produit vectoriel ($\nabla \times \vec{H}$). Au point de vue formel rot $\vec{H}$ peut être représenté sous forme de produit vectoriel de l'opérateur différentiel dans l'espace ∇ (nabla) par le vecteur $\vec{H}$, c'est-à-dire: par rot $\vec{H} = (\nabla \times \vec{H})$.

Il est facile de s'en assurer en multipliant directement ∇ par $\vec{H}$:

$$\left[\left(\vec{i}\frac{\partial}{dx} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z)\right] =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right).$$

§ 440. Expression du rot $\vec{H}$ sous forme d'un déterminant dans un système de coordonnées cartésien. Le rotationnel d'un vecteur quelconque utilisé dans la théorie du champ électromagnétique peut être représenté sous forme de déterminant de troisième ordre.

Ainsi rot $\vec{H}$ s'écrit dans le système de coordonnées cartésien sous forme du déterminant suivant

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (15.6)$$

Le calcul direct de ce déterminant montre qu'on obtient l'expression (15.5).

§ 441. Expression des projections du rotationnel dans un système de coordonnées cylindrique. Donnons sans l'établir l'expression des

projections du rot $\vec{H}$ dans un système des coordonnées cylindrique

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}_r \vec{H} &= \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H\alpha}{x},\\ \operatorname{rot}_\alpha \vec{H} &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r},\\ \operatorname{rot}_z \vec{H} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha) - \frac{\partial H_r}{\partial \alpha}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (15.7)$$

§ 442. Expression des projections du rotationnel dans un système de coordonnées sphérique. Projection du rotationnel dans un système de coordonnées sphérique:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}_R \vec{H} &= \frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\alpha) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\alpha}\right],\\ \operatorname{rot}_\theta \vec{H} &= \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial H_R}{\partial\alpha} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\alpha),\\ \operatorname{rot}_\alpha \vec{H} &= \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RH_\theta) - \frac{\partial H_R}{\partial\theta}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (15.8)$$

§ 443. Principe de continuité du flux magnétique. On appelle flux magnétique le flux du vecteur d'induction magnétique à travers une surface quelconque

$$\Phi = \int_s \vec{B}\,\vec{ds}.$$

L'indice s figurant sous le signe d'intégration montre qu'il s'agit d'une intégrale prise suivant la surface s. Si cette surface est fermée sur elle-même (comme l'est, par exemple, la surface de la terre) le flux, traversant une surface fermée, s'écrit comme suit:

$$\Phi = \oint \vec{B}\,\vec{ds}.$$

L'expérience montre que le flux magnétique pénétrant à l'intérieur d'un volume quelconque est égal au flux magnétique sortant du même volume. Par conséquent, la somme des flux entrant dans un volume et sortant de ce dernier est nul:

$$\oint \vec{B}\,\vec{ds} = 0. \qquad (15.9)$$

Cette dernière expression est l'écriture mathématique du principe de continuité du flux magnétique.

§ 444. Forme différentielle du principe de continuité du flux magnétique. Divisons les deux membres de l'expression (15.9) par le volume V se trouvant à l'intérieur de la surface fermée s et trouvons la limite du rapport ainsi trouvé lorsque le volume V tend vers zéro:

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint \vec{B}\,\vec{ds}}{V} = 0 \text{ ou } \operatorname{div}\vec{B} = 0. \qquad (15.10)$$

La relation (15.10) peut être considérée comme forme différentielle du principe de continuité du flux magnétique. Elle est vraie pour n'importe quel point d'un champ magnétique. Par conséquent, il n'existe pas en un point quelconque d'un champ magnétique ni accumulation, ni disposition de lignes du vecteur d'induction magnétique. Les lignes du vecteur $\vec{B}$ ne sont interrompues nulle part et sont des lignes fermées sur elles-mêmes (la circonférence est un exemple d'une ligne fermée sur elle-même).

§ 445. Dans les régions « occupées par un courant continu » le champ magnétique est un champ rotationnel tandis que dans les régions « non occupées par le courant », il peut être considéré comme un champ de potentiel (irrotationnel). On appelle rotationnel un champ dont le rotationnel n'est pas nul. Puisque pour un champ magnétique de courant continu

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$$

en tous les points de l'espace, où $\vec{\delta} \neq 0$, le champ du vecteur $\vec{H}$ en ces points est un champ rotationnel.

Dans les régions de l'espace où $\vec{\delta} = 0$, le $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ et le champ magnétique peut y être considéré comme un champ de potentiel (irrotationnel).

§ 446. Potentiel scalaire d'un champ magnétique. Pour l'ensemble des points où $\vec{\delta} = 0$, le $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ et le champ magnétique peut y être considéré comme champ de potentiel, c'est-à-dire comme un champ dont chaque point a un certain potentiel magnétique scalaire φ_m. Par conséquent, on peut écrire pour ces régions

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m. \qquad (15.11)$$

Puisque $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu \vec{H} = 0$ on a pour $\mu = \text{const}$ $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. Substituons dans cette dernière expression $-\operatorname{grad} \varphi_m$ à $\vec{H}$; il vient:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m = 0.$$

Ainsi, le potentiel scalaire du champ magnétique φ_m, dont on peut parler seulement pour les régions non occupées par le courant, est régi par l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \qquad (15.12)$$

La différence de potentiel magnétique scalaire entre les points *1* et *2* est appelée chute de potentiel magnétique entre les points *1* et *2*:

$$U_{M12} = \varphi_{M1} - \varphi_{M2} = \int_1^2 \vec{H}\, \vec{dl}.$$

La chute de potentiel magnétique entre les points *1* et *2* le long d'un parcours quelconque (par exemple, le long du parcours *132* de la fig. 443,*a*)

est exactement égale à la chute de potentiel magnétique entre les mêmes points, prise le long d'un autre parcours quelconque (le parcours *142* par exemple), dans tous les cas où ces parcours constituent un contour fermé à l'intérieur duquel le courant est nul.

Si, par contre, un contour fermé, constitué par deux parcours différents, embrasse un certain courant, la chute de potentiel magnétique le long du premier parcours n'est pas égale à la chute de potentiel magnétique le long du deuxième parcours; ces chutes diffèrent l'une de l'autre de la valeur du courant embrassé par le circuit. Cette constatation

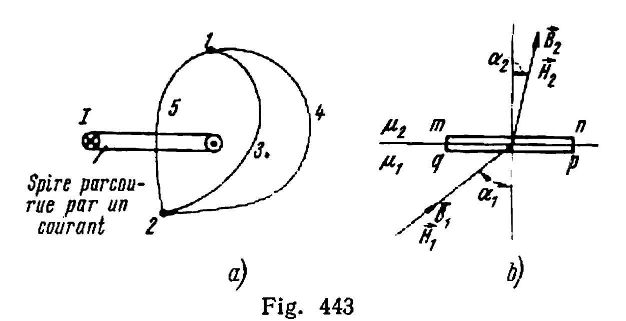


Fig. 443

découle de la loi du courant total. Ainsi pour la fig. 443, *a* $\int\limits_{152} \vec{H}\,\vec{dl} \neq \int\limits_{132} \vec{H}\,\vec{dl}$ (car, en vertu de la loi du courant total $\int\limits_{132} \vec{H}\,\vec{dl} + \int\limits_{251} \vec{H}\,\vec{dl} = -I$ ou $\int\limits_{132} \vec{H}\,\vec{dl} = -I + \int\limits_{152} \vec{H}\,\vec{dl}$).

Il faut distinguer les notions de chute de potentiel magnétique et le potentiel magnétique lui-même. La première n'est définie que par l'intégrale de ligne de $\vec{H}$ sur $\vec{dl}$, le long du parcours choisi. La deuxième notion dépend non seulement de cette intégrale, mais également de la F.M.M. rencontrée sur le parcours. Une analogie complète existe ici avec les notions de chute de tension et de tension pour un circuit électrique.

§ 447. Conditions aux limites. De même que certaines conditions aux limites étaient satisfaites dans un champ électrostatique et dans un champ en un milieu conducteur, des conditions aux limites qui lui sont propres existent dans un champ magnétique. Ces conditions sont au nombre de deux:

$$H_{1t} = H_{2t}, \qquad (15.13)$$

$$B_{1n} = B_{2n}. \qquad (15.14)$$

La condition (15.13) indique qu'à la surface de séparation de deux milieux homogènes et isotropes, différents au point de vue magnétique (dont les μ sont différents), les composantes tangentielles des vecteurs du champ magnétique sont égaux.

La condition (15.14) témoigne de l'égalité des composantes normales des vecteurs d'induction magnétique à la surface de séparation.

L'expression (15.13) est établie en écrivant l'intégrale $\oint \vec{H}\, \vec{dl}$ suivant le contour plan *mnpq* (fig. 443, *b*), de même qu'on écrivait dans la section du champ électrostatique l'intégrale $\oint \vec{E}\, \vec{dl} = 0$. Les côtés *np* et *qm* sont infiniment petits par rapport aux côtés *mn* et *pq*. Désignons par dl la longueur du côté *mn*, ainsi que la longueur du côté *pq*, égale à cette dernière. On a alors $H_1 \sin \alpha_1\, dl - H_2 \sin \alpha_2\, dl = 0$, mais $H_1 \sin \alpha_1 = H_{1t}$, $H_2 \sin \alpha_2 = H_{2t}$ et par conséquent, $H_{1t} = H_{2t}$.

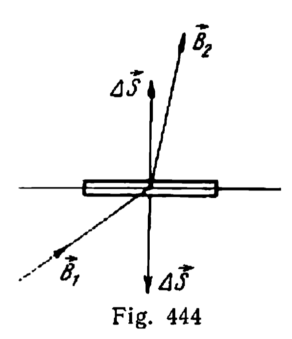


Fig. 444

Il y a lieu de remarquer que la condition (15.13) n'est pas satisfaite, si un courant, dit « courant surfacique » circule sur la surface de séparation des deux milieux. On appelle courant surfacique un courant circulant dans un conducteur plan, infiniment mince, placé sur cette surface.

Dans ce cas $\oint \vec{H}\, \vec{dl}$ n'est plus nulle, mais égale au courant surfacique $\sigma\, dl$, ayant pénétré à l'intérieur du circuit fermée: $H_1 \sin \alpha_1\, dl - H_2 \sin \alpha_2\, dl = \sigma\, dl$, et de ce fait $H_{1t} - H_{2t} = \sigma$.

En d'autres termes, en présence d'un courant surfacique à densité σ, la composante tangentielle de l'intensité du champ subit une discontinuité. Cependant en général il n'existe pas de courant surfacique et l'égalité (15.13) est satisfaite.

L'égalité des composantes normales des vecteurs d'induction magnétique découle du principe de continuité du flux magnétique

$$\oint \vec{B}\, \vec{ds} = 0.$$

Pour s'assurer que (15.14) est satisfaite, isolons sur la surface de séparation un petit parallélépipède plat et calculons les flux du vecteur $\vec{B}$ à travers sa face inférieure (fig. 444) $- B_{1n}\Delta s$ et sa face supérieure $B_{2n}\Delta s$.

La somme de ces flux est nulle:

$$-B_{1n}\Delta s + B_{2n}\Delta s = 0.$$

Par conséquent,

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

La relation suivante découle de (15.13) et de (15.14)

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \qquad (15.15)$$

Elle donne le rapport entre l'angle d'incidence α_1 et l'angle de réfraction α_2 (voir fig. 443, *b*). Si les lignes de force magnétiques quittent

un milieu à perméabilité élevée, par exemple $\mu_1 = 10^4 \mu_0$, pour pénétrer dans un milieu à perméabilité faible, l'air, par exemple, $\mu_2 = \mu_0$, on a

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = 10^4 \text{ et } \operatorname{tg} \alpha_2 = 10^{-4} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Par conséquent, l'angle α_2 est nettement plus petit que l'angle α_1.

Exemple 201. Trouver l'angle α_2 sous lequel les lignes de force pénètrent dans un milieu à perméabilité μ_2, lorsque l'angle $\alpha_1 = 89°$; $\mu_1 = 10^4 \mu_0$, $\mu_2 = \mu_0$.

Solution. $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} 89° = 57{,}29$.

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = 10^{-4} \operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}005729;$$

$$\alpha_2 = 20'.$$

§ 448. Potentiel vecteur d'un champ magnétique. Dans le calcul des champs magnétiques on fait largement appel au potentiel vecteur du champ magnétique. Il est désigné par $\vec{A}$. C'est une grandeur vectorielle artificiellement introduite, variant continûment d'un point à l'autre et dont le rotationnel est égal à l'induction magnétique:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{15.16}$$

La représentation de l'induction sous forme de rotationnel du potentiel vecteur est parfaitement justifiée, parce que la divergence d'un rotationnel quelconque est identiquement nulle.

On sait que dans un champ magnétique div $\vec{B} = 0$. En substituant dans cette égalité le rot $\vec{A}$ à $\vec{B}$, on obtient une expression identiquement nulle:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0^*.$$

Si le potentiel vecteur est connu en fonction des coordonnées, l'induction en un point quelconque du champ est calculée en prenant le rotationnel du potentiel vecteur conformément à (15.16). Contrairement au potentiel magnétique scalaire φ_m qu'on peut utiliser seulement pour les régions « non occupées par le courant » (voir § 446), on peut employer le potentiel vecteur pour les régions « non occupées par le courant » comme pour celles « occupées par le courant ».

Dans les calculs électrotechniques le potentiel vecteur est employé à deux fins.

---

* Le fait que div rot $\vec{A}$ est nulle peut être expliqué à l'aide de l'opérateur ∇. A cette fin écrivons $\nabla \times \vec{A}$ au lieu de rot $\vec{A}$. Alors div rot $\vec{A} = \nabla [\nabla \times \vec{A}]$. Le produit vectoriel $\nabla \times \vec{A}$ est perpendiculaire à ∇ et à $\vec{A}$. Le produit scalaire de ∇ par $(\nabla \times \vec{A})$, c'est-à-dire $\Delta [\Delta \times \vec{A}]$ est nul, parce que le cosinus de l'angle entre ∇ et $\nabla \times \vec{A}$ est nul.

Premièrement: pour le calcul de l'induction magnétique à l'aide de l'équation (15.16).

Deuxièmement: pour le calcul du flux magnétique, embrassé par un circuit fermé quelconque (voir § 450).

Le potentiel vecteur en un point arbitraire du champ est lié à la densité du courant au même point par l'équation de Poisson.

§ 449. Equation de Poisson pour le potentiel vecteur. Multiplions les deux membres de (15.4) par la perméabilité μ du milieu:

$$\mu \operatorname{rot} \vec{H} = \mu\vec{\delta}.$$

Convenons que nous aurons affaire aux milieux, pouvant être répartis en plusieurs régions distinctes, de manière que les perméabilités μ soient constantes à l'intérieur de ces régions. Si μ est constant, il peut être placé sous le signe rotationnel

$$\operatorname{rot} \mu \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{B} = \mu\vec{\delta}. \qquad (15.17)$$

Substituons rot $\vec{A}$ à $\vec{B}$ dans (15.17) et nous aurons

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu\vec{\delta}. \qquad (15.18)$$

Le rotationnel d'un rotationnel est un double produit vectoriel; on a *:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{\delta} \qquad (15.19)$$

Jusqu'ici nous n'avons imposé aucune condition complémentaire au potentiel vecteur, sauf qu'il doit être une fonction ayant des dérivées spatiales. Du fait que $\vec{A}$ est une fonction théorique, utilisée dans les calculs, nous avons droit d'écrire qu'elle satisfait à la condition suivante pour un champ magnétique de courant continu

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \qquad (15.20)$$

En vertu de cette condition les lignes du vecteur $\vec{A}$ sont des lignes fermées sur elles-mêmes. En tenant compte de (15.20), l'équation (15.19) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{\delta}. \qquad (15.21)$$

L'équation (15.21) n'est autre chose que l'équation de Poisson. Contrairement à l'équation (13.26) elle est écrite pour une grandeur vec-

---

* On sait qu'un double produit vectoriel peut être développé comme suit

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Dans notre cas le rôle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est joué par l'opérateur ∇ et le rôle du vecteur $\vec{c}$ est joué par le potentiel vecteur $\vec{A}$. Ainsi $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla\vec{A}) - \vec{A}(\nabla\nabla) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2\vec{A}$.

torielle, alors que l'équation (13.26) était écrite pour la grandeur scalaire φ. Substituons $\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$ à $\vec{A}$ dans (15.21) et substituons $\vec{i}\delta_x + \vec{j}\delta_y + \vec{k}\delta_z$ à la densité du courant $\vec{\delta}$:

$$\nabla^2\vec{i}A_x + \nabla^2\vec{j}A_y + \nabla^2\vec{k}A_z = -\mu\vec{i}\delta_x - \mu\vec{j}\delta_y - \mu\vec{k}\delta_z.$$

Cette dernière équation peut être décomposée en trois équations suivantes, établies par rapport aux grandeurs scalaires A_x, A_y, A_z:

$$\nabla^2 A_x = -\mu\delta_x,$$
$$\nabla^2 A_y = -\mu\delta_y,$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu\delta_z.$$

Leur solution en commun par analogie avec l'équation (13.26) peut être écrite comme suit:

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\delta_x\,dV}{R}, \qquad (15.22a)$$

$$A_y = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\delta_y\,dV}{R}. \qquad (15.22b)$$

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\delta_z\,dV}{R}. \qquad (15.22c)$$

Si on multiplie (15.22a) par $\vec{i}$, (15.22b) par $\vec{j}$ et (15.22c) par $\vec{k}$ et si on additionne les produits ainsi obtenus, on a

$$\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{(\vec{i}\delta_x + \vec{j}\delta_y + \vec{k}\delta_z)\,dV}{R}$$

ou

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\delta}\,dV}{R}. \qquad (15.23)$$

L'équation (15.23) est la solution générale de (15.21). Le potentiel vecteur en un point quelconque du champ peut être déterminé en calculant l'intégrale de volume (15.23). L'intégrale de volume doit être calculée pour l'ensemble des régions occupées par le courant.

§ 450. Expression du flux magnétique à partir de la circulation du potentiel vecteur. Le flux magnétique traversant une surface s quelconque est

$$\Phi = \int_s \vec{B}\,\vec{ds}. \qquad (15.24)$$

Puisque $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$, on a $\Phi = \int_s \text{rot}\,\vec{A}\,\vec{ds}$.

En vertu du théorème de Stokes, l'intégrale de surface peut être transformée en une intégrale:

$$\int_s \operatorname{rot} \vec{A}\, \vec{ds} = \oint \vec{A}\, \vec{dl}. \tag{15.25}$$

Ainsi

$$\Phi = \oint \vec{A}\, \vec{dl}. \tag{15.26}$$

En d'autres termes pour déterminer le flux magnétique, traversant une certaine surface s, il suffit de calculer la circulation du potentiel vecteur le long du circuit fermé sur lequel prend appui la surface s.

Le calcul du flux à l'aide de (15.26) est souvent plus avantageux que le calcul du flux à partir de l'induction magnétique à l'aide de (15.24). En effet, la relation (15.24) ne peut être utilisée que lorsqu'on connaît la valeur de $\vec{B}$ en un point quelconque de la surface s, alors que pour le calcul du flux à l'aide de la relation (15.26), il suffit de connaître la valeur de $\vec{A}$ suivant le contour délimitant la surface et on n'a pas besoin de connaître sa valeur en tous les points situés à l'intérieur de ce contour.

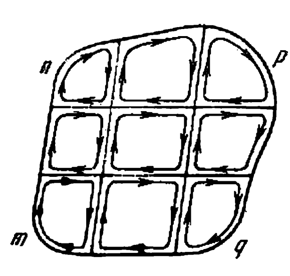


Fig. 445

Le passage du $\int_s \operatorname{rot} \vec{A}\, \vec{ds}$ à l'intégrale $\oint \vec{A}\, \vec{dl}$ peut être expliqué comme suit.

Décomposons la surface s en un certain nombre d'aires élémentaires (fig. 445). Remplaçons l'intégrale par une somme et substituons sous le signe d'intégration, conformément à la définition du rotationnel, $\oint \frac{\vec{A}\, \vec{dl}}{\Delta s}$ à rot $\vec{A}$ (en omettant la limite) et nous aurons:

$$\int_s \operatorname{rot} \vec{A}\, \vec{ds} \approx \sum \frac{\oint \vec{A}\, \vec{dl}}{\Delta s} \Delta s \approx \sum \oint \vec{A}\, \vec{dl}.$$

Ainsi, pour calculer $\int_s \operatorname{rot} \vec{A}\, \vec{ds}$, il faut trouver les composantes de la circulation du vecteur $\vec{A}$ le long des contours de toutes les aires élémentaires et les additionner ensuite. Du fait qu'en écrivant la circulation on doit parcourir deux fois les tronçons, communs à deux aires contiguës quelconques, et ceci dans deux sens opposés, les composantes de la circulation suivant tous les tronçons contigus s'annulent réciproquement et il ne reste que la circulation le long du contour périphérique *mnpq*

$$\sum \oint \vec{A}\, \vec{dl} = \oint_{\substack{\text{suivant} \\ mnpq}} \vec{A}\, \vec{dl}.$$

§ 451. **Potentiel vecteur d'un élément de courant.** Calculons la valeur et la direction de la composante du potentiel vecteur $\vec{A}$, créé par le courant i circulant dans un élément d'un conducteur linéaire, de longueur dl. Désignons par R la distance entre l'élément du courant et un point quelconque de l'espace (fig. 446). Conformément à l'expression générale

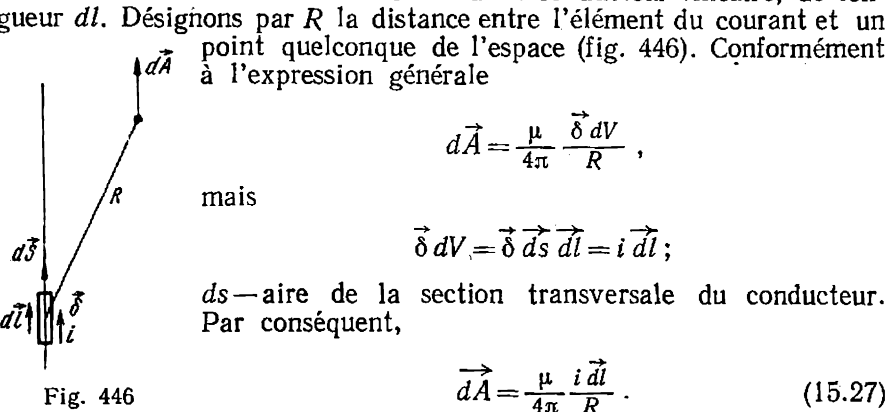


Fig. 446

$$d\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{\delta}\, dV}{R},$$

mais

$$\vec{\delta}\, dV = \vec{\delta}\, \vec{ds}\, \vec{dl} = i\, \vec{dl};$$

ds — aire de la section transversale du conducteur. Par conséquent,

$$\overrightarrow{dA} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i\, \vec{dl}}{R}. \qquad (15.27)$$

Le potentiel vecteur correspondant à un élément de courant a la même direction dans l'espace que le courant circulant dans l'élément du conducteur *.

§ 452. **Correspondance réciproque entre un champ électrostatique et un champ magnétique de courant continu.** Une correspondance de l'un des deux types suivants existe entre l'image d'un champ électrostatique et celle d'un champ magnétique de courant continu, dans les régions non occupées par le courant. *Dans le premier type de correspondance* la répartition des charges linéaires dans un champ électrostatique est la même que celle des courants linéaires dans un champ magnétique. Dans ce cas l'image du champ magnétique (le réseau des lignes de ce champ) est similaire à l'image du champ électrostatique correspondant. Il diffère par le fait que les lignes de force d'un champ électrostatique correspondent aux lignes équipotentielles d'un champ magnétique, tandis qu'aux lignes équipotentielles d'un champ électrostatique correspondent les lignes de force d'un champ magnétique.

Nous avons représenté à titre d'exemple sur la fig. 447 à gauche l'image d'un champ dû à une charge linéaire unique $+\tau$ et, à droite, sur la même figure nous avons tracé l'image d'un champ d'un conducteur isolé, parcouru par le courant I (pour la région extérieure au conducteur).

Dans le deuxième type de correspondance la forme des surfaces équipotentielles limites est la même pour le champ électrostatique et pour le champ magnétique de courant continu. Dans ce cas, l'image du champ est exactement *la même*.

La correspondance du deuxième type est expliquée à l'aide de la fig. 449. Nous avons représenté sur cette figure l'image d'un champ

* Notons que l'unité de mesure de $\vec{A}$ est $V{\cdot}s/m$.

magnétique dans l'entrefer, d'une machine à courant continu (ses enroulements n'étant pas représentés). Si on admet que le pôle et l'induit de cette machine soient utilisés comme armatures d'un certain condensateur, l'image du champ électrique dans l'espace entre ces armatures

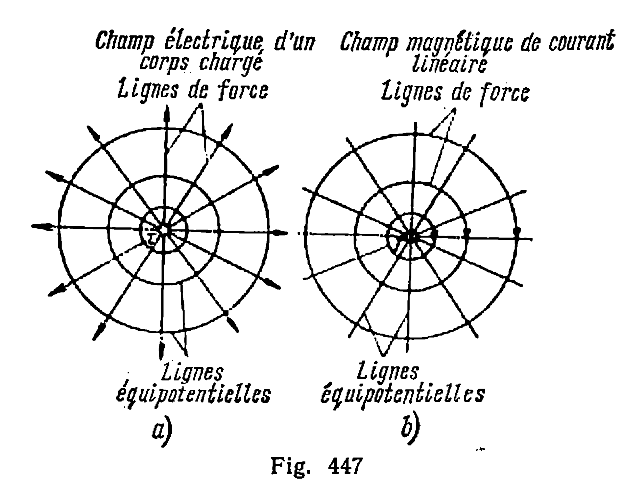


Fig. 447

correspond exactement à l'image du champ magnétique; dans les deux cas, les lignes de force sortent du pôle et pénètrent dans l'induit.

§ 453. Quelques types de problèmes de calcul des champs magnétiques. Il existe beaucoup de types différents de problèmes de calcul des champs magnétiques. Examinons sommairement à titre d'illustration, seulement certains d'entre eux.

On est souvent obligé de calculer l'inductance d'un circuit quelconque ou l'inductance mutuelle de deux circuits. C'est le premier type de problèmes. Le deuxième type de problèmes comprend ceux de calcul des forces agissant dans un champ magnétique sur un électron en mouvement, sur un conducteur fixe parcouru par un courant, sur des masses ferromagnétiques se trouvant dans ce champ magnétique *. Il est souvent très important de connaître ces forces. Ainsi, par exemple, lorsque les appareils électriques fonctionnent en court-circuit, leurs circuits peuvent être parcourus par des surintensités telles, que les forces d'interaction apparaissant entre ces circuits et le champ, peuvent détruire l'appareil, si on ne prend pas des mesures de protection nécessaires.

Le troisième type de problèmes est celui de calcul des blindages magnétiques. On appelle blindages magnétiques les dispositifs destinés à affaiblir un champ magnétique dans la région considérée de l'espace, par rapport au champ magnétique en dehors de ce blindage. On a recours au blindage magnétique, par exemple, pour protéger les appareils sensibles contre l'influence des champs magnétiques étrangers et, en particulier, contre celle du champ magnétique terrestre.

---

* Voir §§ 77 et 78.

Le quatrième type de problèmes comprend ceux de détermination du mode de répartition des courants dans un certain volume, pour obtenir le champ magnétique désiré. Ainsi, par exemple, dans la navigation la suppression du champ magnétique des navires est très important: chaque navire possède une grande masse ferromagnétique et perturbe le champ magnétique terrestre non seulement à sa proximité immédiate, mais même à une certaine distance. Des capteurs appropriés de la perturbation du champ magnétique terrestre peuvent mettre en marche les mines autopropulsées, se trouvant à proximité, et le navire risque d'être torpillé. Afin de l'éviter, on installe sur les navires des enroulements magnétisants spéciaux, disposés de manière à compenser la perturbation du champ magnétique terrestre au voisinage du navire. On rencontre beaucoup d'autres problèmes de calcul des champs magnétiques, concernant l'enregistrement magnétique du son, ainsi que la recherche magnétique de défauts. Cette méthode permet de juger d'après l'image du champ magnétique de la présence de failles et d'autres défauts dans des pièces en matériaux ferromagnétiques. La défectoscopie magnétique est très largement utilisée dans les transports ferroviaires pour contrôler le bon état des rails.

§ 454. Généralités sur les méthodes de calcul et d'étude des champs magnétiques de courant continu. Toutes les méthodes connues de calcul et d'investigation des champs magnétiques peuvent être réparties en trois groupes suivants: analytique, graphique et expérimental.

Le groupe analytique comprend tous les modes de calcul purement analytiques, à savoir: intégration de l'équation de Poisson (pour les régions occupées par le courant), intégration de l'équation de Laplace (pour les régions non occupées par le courant), utilisation des méthodes des images symétriques, etc.

Du fait des difficultés de nature mathématique, les méthodes analytiques ne permettent de résoudre qu'un nombre très limité de problèmes. Lorsque le calcul d'un champ par les méthodes analytiques donne lieu à des difficultés, on a recours à la méthode graphique de la construction de l'image du champ ou à l'étude du champ magnétique sur un modèle. Les méthodes graphiques de construction de l'image du champ sont utilisables pour les champs irrotationnels à deux dimensions. Il existe plusieurs modes différents de ces constructions. L'un d'eux sera exposé en détail ci-dessous.

§ 455. Etude expérimentale de l'image d'un champ magnétique. L'étude expérimentale de l'image d'un champ magnétique peut être menée par plusieurs méthodes. La première méthode, reposant sur le phénomène d'induction électromagnétique, est la suivante: un cadre plat de très petites dimensions, portant un enroulement, placé dans la région étudiée du champ, est raccordé à un galvanomètre balistique. Lors de l'inversion du courant dans les enroulements d'un appareil ou d'une machine, dans l'entrefer duquel on étudie le champ, ou en amenant rapidement le cadre dans une région où le champ magnétique est notoirement faible (dans ce dernier cas il n'y a pas lieu d'inverser le courant dans les enroulements), on mesure la quantité d'électricité

ayant traversé le galvanomètre balistique et à partir de cette quantité on calcule la valeur moyenne de l'induction dans le cadre. On place ensuite ce cadre en un autre point du champ, on relève l'induction à nouveau et ainsi de suite. Cette méthode permet d'étudier des champs magnétiques d'une configuration pratiquement quelconque dans l'espace, en dehors des ferromagnétiques.

La deuxième méthode expérimentale d'étude d'un champ irrotationnel est celle de sa simulation par des champs de courants dans un milieu conducteur. Elle repose sur l'analogie existant entre un champ dans un milieu conducteur et un champ magnétique irrotationnel. Cette méthode a été mise au point par L. R. Neumann et comprend les opérations suivantes : pour relever l'image d'un champ plan-parallèle, existant dans l'entrefer d'un appareil ou d'une machine quelconque, on exécute à l'aide d'une feuille de métal (d'une tôle d'acier, par exemple) un modèle agrandi de la région étudiée du champ. Ainsi, nous avons représenté sur la fig. 448 un modèle établi pour l'étude du champ de fuite entre les pôles d'une machine à courant continu. La F. M. M. étant répartie tout le long du pôle, on amène le courant au bord de ce pôle à l'aide de plusieurs conducteurs, soudés à la tôle. Les courants circulant dans ces conducteurs peuvent être réglés séparément et on peut ainsi établir arbitrairement la loi de répartition de la F.M.M. en fonction de la hauteur du pôle. Le courant est prélevé de la ligne *mn*, considérée comme équipotentielle, à l'aide d'une pièce conductrice massive.

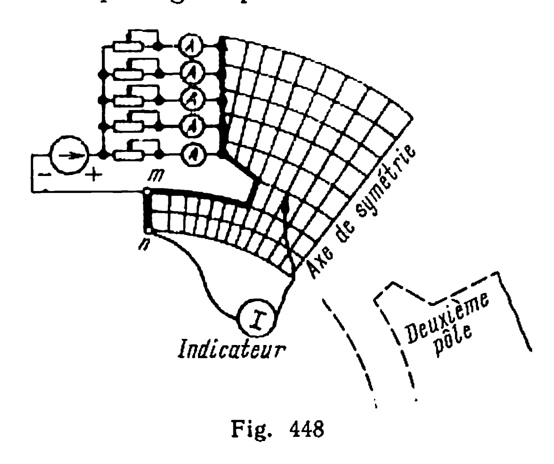


Fig. 448

Une sonde et un indicateur sont utilisés pour construire les lignes équipotentielles dans le champ du milieu conducteur.

Une étude qualitative d'un champ magnétique peut être réalisée à l'aide de la limaille d'acier. Cette limaille est disposée sur une tôle plate en matériau non ferromagnétique, qu'on place dans un champ magnétique et on frappe ensuite légèrement sur cette tôle. La limaille se disposera d'elle-même le long des lignes de force. La densité des lignes de forces permet de se faire une représentation qualitative de l'intensité du champ magnétique.

On peut également utiliser au lieu de la limaille une poudre très fine d'oxyde de fer, se trouvant en suspension dans un liquide quelconque, le pétrole, par exemple.

Cette dernière méthode est largement employée dans la recherche magnétique de défauts dans les pièces en matériaux ferromagnétiques.

§ 456. Construction graphique de l'image du champ et calcul de la réluctance à partir de cette image. Examinons à l'aide d'un exemple concret la méthode de construction graphique de l'image d'un champ magnétique plan-parallèle, on voit sur la fig. 449 le pôle et l'induit d'une machine à courant continu. La dimension, normale à la figure, est considérée comme suffisamment grande, car ce n'est qu'à cette condition que le champ peut être considéré comme plan-parallèle.

Du fait que la perméabilité de l'acier est nettement supérieure à la perméabilité de l'air, les lignes de force magnétiques sont pratiquement perpendiculaires à la surface du pôle et de l'induit. Par conséquent, les surfaces du pôle et de l'induit sont des surfaces équipotentielles. La famille des lignes de force et des lignes équipotentielles est construite au jugé, en s'inspirant des règles suivantes : les lignes de force doivent être perpendiculaires aux surfaces du pôle et de l'induit et doivent être disposées les unes par rapport aux autres de manière à obtenir, après le traçage des lignes équipotentielles, des rectangles curvilignes pour lesquels *le rapport* de la largeur moyenne du rectangle (appelons-la b) à sa longueur moyenne (a) soit sensiblement le même pour tous les rectangles. Il se peut qu'on ne réussisse pas à réaliser ceci d'une manière satisfaisante au cours de la première tentative, mais après plusieurs essais, surtout si on a acquis une certaine habitude et en tenant compte de la symétrie du champ (si cette dernière existe), on arrivera certainement à construire le réseau des lignes du champ, de manière que

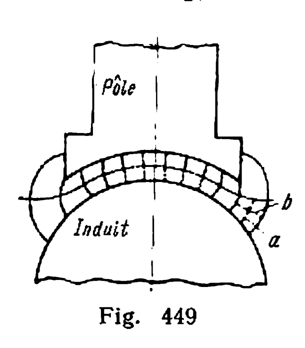


Fig. 449

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \ldots$$

Dans ces conditions, les flux dans tous les tubes de force seront les mêmes. Ceci facilite le calcul de la réluctance.

Supposons que le nombre des rectangles curvilignes dans un tube de force soit égal à n et que le nombre de ces tubes soit m (pour la fig. 449 $n = 2$ et $m = 11$).

Le potentiel magnétique entre le pôle et l'induit :

$$U_m = \int \vec{H}\,\vec{dl} \approx H_1a_1 + H_2a_2 + H_3a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} H_k a_k.$$

A son tour, le flux dans un tube de force

$$\Delta\Phi = lb_1\mu H_1 = lb_2\mu H_2 = \ldots$$

Ici l — dimension dans le sens perpendiculaire à celui de la figure, μ — perméabilité de l'aire (égàle à μ_0).

Par conséquent,

$$H_1=\frac{\Delta\Phi}{lb_1\mu}, \quad H_2=\frac{\Delta\Phi}{lb_2\mu}, \text{ etc.}$$

Le potentiel magnétique

$$U_m=\frac{\Delta\Phi}{\mu l}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots\right).$$

Mais, par construction, tous les termes $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, etc. sont égaux. Le nombre de ces termes est n. Par conséquent,

$$U_m=\frac{\Delta\Phi}{\mu l}\frac{a}{b}n.$$

D'où

$$\Delta\Phi=\frac{U_m\mu lb}{na}.$$

Du fait que pour tous les rectangles $\frac{b}{a}\approx$ const, leur construction a été faite de manière que les flux $\Delta\Phi$ soient les mêmes dans tous les tubes de force.

Le flux total entre l'induit et le pôle est

$$\Phi=m\Delta\Phi=U_m\mu l\frac{b}{a}\frac{m}{n},$$

où m — nombre des tubes de force.

La réluctance

$$R_m=\frac{U_m}{\Phi}=\frac{an}{\mu lbm}. \qquad (15.28)$$

La perméance

$$G_m=\frac{\mu lbm}{an}. \qquad (15.29)$$

La méthode graphique de construction de l'image du champ est employée non seulement pour le calcul des champs magnétiques, mais est également largement utilisée pour le calcul d'autres champs irrotationnels, en particulier pour le calcul d'un champ électrostatique et celui d'un champ de courant continu dans un milieu conducteur. Ainsi, la conductance G entre deux corps peut être calculée à l'aide de l'expression (15.30), obtenue à partir de (15.29) en substituant γ à μ

$$G=\frac{\gamma lbm}{an}. \qquad (15.30)$$

Capacité entre deux corps dans un champ plan-parallèle :

$$C=\frac{\varepsilon lbm}{an}. \qquad (15.31)$$

§ 457. **Blindage magnétique.** Supposons que dans un champ magnétique uniforme d'intensité H_0 on désire blinder une certaine région de

l'espace, cylindrique par exemple, de manière que l'intensité du champ dans cette région soit nettement inférieure à l'intensité du champ extérieur.

La perméabilité relative du blindage cylindrique à rayon intérieur a et à rayon extérieur b est égale à μ_{2r} (fig. 450, a).

Désignons par I la région intérieure, par II la région du corps du blindage et par III la région extérieure au blindage.

Dans les régions I et III, la perméabilité relative est égale à l'unité. Puisqu'il n'existe pas de courant dans les trois régions, le champ magnétique dans ces régions est décrit par l'équation de Laplace $\nabla^2\varphi_m = 0$.

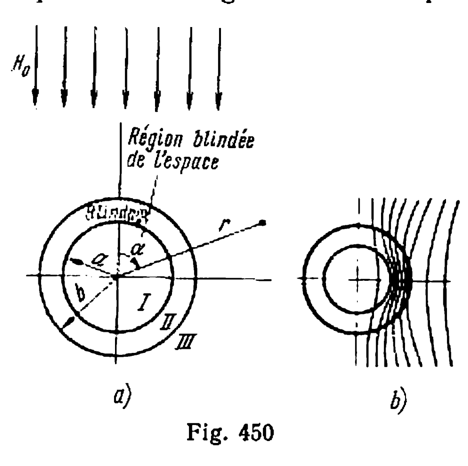


Fig. 450

Le blindage est supposé suffisamment long suivant l'axe des z (l'axe des z est perpendiculaire au schéma ; φ_m dépend seulement des coordonnées r et α du système cylindrique. Développons l'équation $\nabla^2\varphi_m = 0$ en coordonnées cylindriques

$$\nabla^2\varphi_m = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_m}{\partial_r}\right) + \frac{\partial^2\varphi_m}{r^2\,\partial\alpha^2} = 0.$$

Sa solution par la méthode de Fourier — Bernoulli (voir section « Electrostatique ») donne :

pour la première région $\varphi_m^{\mathrm{I}} = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right)\cos\alpha$,

pour la deuxième région $\varphi_m^{\mathrm{II}} = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r}\right)\cos\alpha$,

pour la troisième région $\varphi_m^{\mathrm{III}} = \left(C_5 r + \frac{C_6}{r}\right)\cos\alpha$.

La constante d'intégration, utilisée dans le calcul du potentiel, est considérée ici comme nulle.

Pour calculer les six constantes (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6) écrivons les six équations suivantes :

1. Comparons φ_m^{III} à l'expression de φ_m à l'infini : $\varphi_m = H_0 r\cos\alpha$. Il résulte de cette comparaison que $C_5 = H_0$.

2. Dans la première région pour $r = 0$, φ_m doit rester fini ; ceci n'est possible que lorsque le terme $\frac{C_2}{r}$ n'existe pas dans l'expression φ_m^{I}. Cette dernière condition est satisfaite pour $C_2 = 0$.

3. L'égalité de φ_m^{I} et de φ_m^{II}, pour $r = a$, donne l'équation

$$C_1 a = C_3 a + \frac{C_4}{a}.$$

Il est facile de s'assurer que la condition de la continuité du potentiel est équivalente à la condition de l'égalité des composantes tangentielles

de l'intensité du champ à la limite de séparation, pour $r = a$. En effet *

$$H_\alpha = -\frac{\partial \varphi_m}{r\,\partial \alpha}.$$

Par conséquent,

$$\underset{r=a}{H_\alpha^{\mathrm{I}}} = -C_1 \sin\alpha$$

et

$$\underset{r=a}{H_\alpha^{\mathrm{II}}} = -\sin\alpha\left(C_3 + \frac{C_4}{a^2}\right).$$

Ainsi

$$C_1 = C_3 + \frac{C_4}{a^2}.$$

Cette dernière équation est identique à celle obtenue auparavant.

4. L'égalité de φ_m à la surface de séparation entre la deuxième et la troisième régions (pour $r = b$) conduit à l'équation suivante :

$$C_5 b + \frac{C_6}{b} = C_3 b + \frac{C_4}{b}.$$

5. L'égalité des composantes normales de l'induction

$$B_r = \mu \frac{\partial \varphi_m}{\partial r}$$

à la surface de séparation entre la première et la deuxième régions (pour $r = a$) donne

$$C_1 = \left(C_3 - \frac{C_4}{a^2}\right)\mu_{2r}.$$

6. L'égalité des composantes normales de l'induction pour $r = b$ donne l'équation

$$C_5 - \frac{C_6}{b^2} = \left(C_3 - \frac{C_4}{b^2}\right)\mu_{2r}.$$

La solution en commun de toutes ces équations permet d'obtenir l'expression du potentiel dans la première région :

$$\varphi_m^{\mathrm{I}} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} r \cos\alpha$$

ou, en passant en coordonnées cartésiennes (l'axe des x étant dirigé vers le haut, $x = r \cos\alpha$)

$$\varphi_m^{\mathrm{I}} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} x. \qquad (15.32)$$

---

* Rappelons, que $\vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi_m$. Les expressions, permettant de calculer $H\alpha$ et H_2 à partir de φ_m, résultent de la relation (13.9).

Ici

$$q=\frac{2\mu_{2r}}{(1+\mu_{2r})^2}\approx\frac{2}{\mu_{2r}}\,; \quad \Delta=b^2-\beta^2a^2\,;$$

$$\beta=\frac{\mu_{2r}-1}{\mu_{2r}+1}\approx 1.$$

Le module de l'intensité du champ dans la première région est:

$$H^{\mathrm{I}}=\frac{\partial\varphi_m^{\mathrm{I}}}{\partial x}=H_0\frac{2qb^2}{\Delta}\,. \tag{15.33}$$

Le rapport de l'intensité du champ H^{I} à l'intérieur du blindage à celle du champ extérieur H_0 est

$$\frac{H^{\mathrm{I}}}{H_0}=\frac{2qb^2}{\Delta}\approx\frac{4}{\mu_{2r}}\frac{b^2}{b^2-a^2}\,. \tag{15.34}$$

L'expression (15.34) n'est qu'approximative $\left(\text{on a pris } \beta=1 \text{ et } q=\frac{2}{\mu_{2r}}\right)$. Il découle de cette expression que l'effet de blindage est d'autant plus efficace, que μ_{2r} est plus grand et que la paroi du blindage est plus épaisse.

La représentation qualitative des lignes d'induction magnétique en présence d'un blindage est donnée sur la fig. 450, *b*. On voit sur cette figure que les lignes de force du champ magnétique, dans leur très grande majorité, tendent à passer le long des parois du blindage et ce n'est qu'une très faible partie de ces lignes qui pénètre dans la région blindée.

E x e m p l e 202. $\mu_{2r}=10^4$; $a=5$ *cm* ; $b=5{,}5$ *cm*.

Trouver le rapport $\frac{H^{\mathrm{I}}}{H_0}$.

$$\frac{H^{\mathrm{I}}}{H_0}=\frac{4}{10^4}\frac{5{,}5^2}{5{,}5^2-5^2}=0{,}0023,$$

autrement dit, l'intensité du champ à l'intérieur du blindage n'est que de 0,23% de l'intensité H_0.

§ 458. Application de la méthode des images symétriques. Pour calculer les champs magnétiques créés par des courants linéaires circulant à proximité des masses d'acier, on utilise largement la méthode des images symétriques. Supposons qu'un conducteur parcouru par le courant I_1, placé parallèlement au plan de séparation de ces milieux, se trouve dans l'air ou dans un autre milieu quelconque à perméabilité μ_1 (fig. 451, *a*).

La perméabilité du deuxième milieu est μ_2. On demande de trouver l'intensité du champ en des points quelconques du premier et du deuxième milieux. A cette fin on introduit dans le calcul les courants fictifs I_2 et I_3. Un conducteur parcouru par le courant I_2 est placé symétriquement par rapport au conducteur parcouru par le courant I_1 et un conducteur parcouru par le courant I_3 est placé au même endroit que le conducteur où circule le courant I_1.

Conférons aux deux courants I_2 et I_3 encore inconnus des intensités telles que les deux conditions aux limites soient satisfaites à la surface de séparation des deux milieux.

Le champ dans le demi-plan supérieur (là où est placé le courant I_1) (fig. 451, *b*) dépend de deux courants : du courant donné I_1 et du courant fictif I_2, les demi-plans supérieur et inférieur étant remplis d'un milieu à perméabilité μ_1. Le champ en un point quelconque du demi-plan inférieur dépend du courant I_3, tandis que pour les demi-plans supérieur et inférieur $\mu = \mu_2$ (fig. 451, *c*). Ecrivons les équations pour calculer

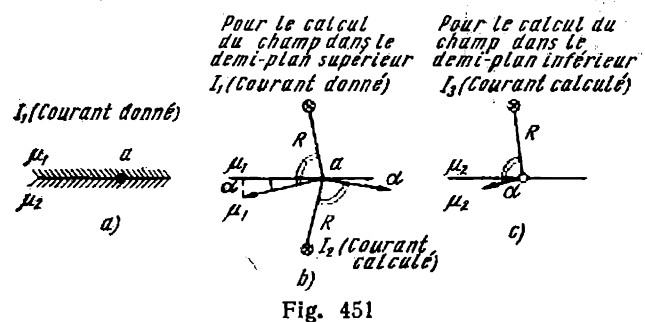


Fig. 451

les courants I_2 et I_3. Si on prend un point arbitraire quelconque a situé à la limite de séparation des milieux, on peut considérer que ce point appartient au premier, comme au deuxième milieu. Si l'on considère qu'il appartient au premier milieu, la composante tangentielle de l'intensité du champ dans ce milieu est représentée par le premier membre de l'équation (15.35′), tandis que la composante tangentielle de l'intensité du champ (15.35″) au même point, considéré comme appartenant au deuxième milieu, est donnée par le second membre de (15.35′)

$$\left(\frac{I_1}{2\pi R} - \frac{I_2}{2\pi R}\right)\cos\alpha = \frac{I_3}{2\pi R}\cos\alpha. \qquad (15.35')$$

On obtient ainsi la première relation entre les courants

$$I_1 - I_2 = I_3.$$

Pour obtenir la deuxième relation, écrivons l'équation exprimant l'égalité des composantes normales de l'induction magnétique en un point arbitraire a, situé à la surface de séparation :

$$\left(\frac{I_2}{2\pi R} + \frac{I_1}{2\pi R}\right)\mu_1\sin\alpha = \frac{I_3}{2\pi R}\mu_2\sin\alpha,$$

c'est-à-dire

$$I_1 + I_2 = I_3\frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (15.35'')$$

La résolution en commun de ces équations donne

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1,$$

$$I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1.$$

E x e m p l e 203. Trouver l'intensité du champ aux points m et n (fig. 452, a). Les cotes géométriques sont données en centimètres sur cette figure. Les perméabilités relatives sont $\mu_{1r} = \mu_1 = 1$, $\mu_{2r} = \mu_2 = 999$, $I_1 = 10\,A$.

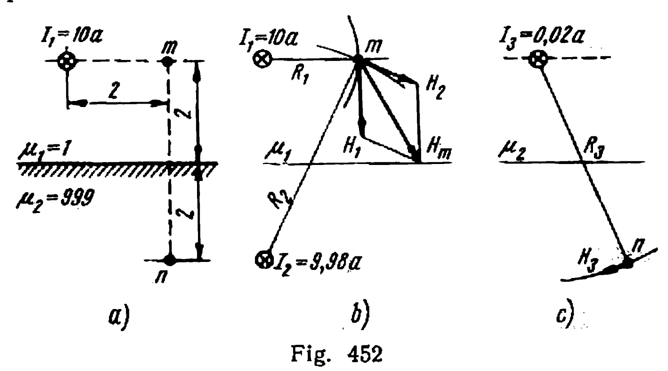


Fig. 452

S o l u t i o n. A l'aide des expressions du § 458, trouvons

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1 = 9{,}98\,A,$$

$$I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1 = 0{,}02\,A.$$

Pour calculer l'intensité du champ au point m, situé dans le même demi-plan (milieu) que le courant I_1, on utilise la fig. 452, b

$$\vec{H}_m = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

Conformément à la loi du courant total, nous avons:

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1} = \frac{10}{2\pi \cdot 0{,}02} = 79{,}5\ A/m;$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2} = \frac{9{,}98}{2\pi \cdot 4{,}48 \cdot 10^{-2}} = 35{,}4\ A/m.$$

Trouvons par la méthode graphique $H_m = 101\ A/m$.

L'intensité au point n (fig. 452, c)

$$H_3 = H_n = \frac{I_3}{2\pi R_3} = \frac{0{,}02}{2\pi \cdot 4{,}48 \cdot 10^{-2}} = 0{,}0715\ A/m.$$

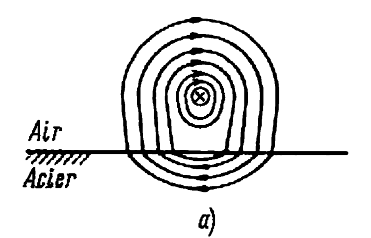
L'image des lignes magnétiques de l'induction B est représentée qualitativement sur la fig. 453, a pour un conducteur parcouru par le courant, placé dans l'air, parallèlement à la surface d'une plaque en acier. L'image de la fig. 453, b est celle des lignes B, lorsque le conducteur parcouru par le courant passe par un canal étroit, ménagé dans une plaque en acier, parallèlement à la surface de cette dernière.

E x e m p l e 204. Un courant continu I circule le long d'un conducteur bimétallique de grande longueur (fig. 454). Le rayon du brin inté-

rieur est r_1 et celui de la couche extérieur r_2. Conductivité du brin intérieur γ_1, celle de la couche extérieure γ_2.

Déterminer la loi de variation du potentiel vecteur $\vec{A}$ et de l'induction magnétique à l'intérieur du conducteur (dans la région intérieure *I*) et dans la région extérieure (*II*) ainsi qu'à l'extérieur du conducteur (région *III*).

S o l u t i o n. Calculons la densité du courant dans la première région (δ_1) et dans la deuxième région (δ_2).



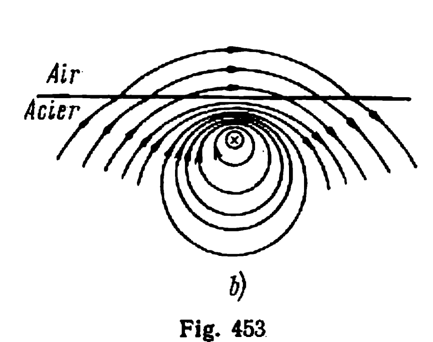


Fig. 453

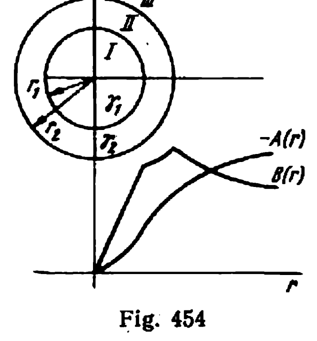


Fig. 454

Du fait que $E_{1t} = E_{2t}$, on a $\frac{\delta_1}{\gamma_1} = \frac{\delta_2}{\gamma_2}$. D'autre part

$$\delta_1 \pi r_1^2 + \delta_2 (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = I.$$

Par conséquent,

$$\delta_1 = \frac{I}{\pi r_1^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2)}$$

et

$$\delta_2 = \delta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

En développant l'expression $\nabla^2 \vec{A}$ dans un système de coordonnées cylindrique n'oublions pas que dans le problème considéré $\vec{A}$ n'a qu'une seule composante $\vec{A} = \vec{z}^\circ A_z = \vec{z}^\circ A$, dirigée suivant l'axe du conducteur (suivant l'axe des z), et que cette composante dépend uniquement de r:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = \begin{cases} -\mu_1\delta_1 \text{ pour la première région,} \\ -\mu_2\delta_2 \text{ pour la deuxième région,} \\ 0 \text{ pour la troisième région.} \end{cases}$$

Une double intégration par rapport à r donne

$$A_I = -\frac{\mu_1\delta_1 r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2;$$

$$A_{II} = -\frac{\mu_2\delta_2 r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4;$$

$$A_{III} = C_5 \ln r + C_6.$$

Le terme $C_1 \ln r$ ne doit pas figurer dans l'expression, car A ne peut acquérir des valeurs infiniment grandes pour $r = 0$; il en découle que $C_1 = 0$.

Le potentiel vecteur est calculé à une constante près ; supposons que cette constante soit nulle: $C_2 = 0$. Dans ces conditions $A = 0$ sur l'axe du conducteur. En partant des conditions aux limites, écrivons les équations permettant de calculer les quatre constantes restantes :

1. Pour $r = r_1$ $A_I = A_{II}$, par conséquent,

$$-\frac{\mu_1\delta_1 r_1^2}{4} = -\frac{\mu_2\delta_2 r_1^2}{4} + C_3 \ln r_1 + C_4.$$

2. Pour $r = r_2$ $A_{II} = A_{III}$, c.-à.-d.

$$-\frac{\mu_2\delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 = C_5 \ln r_2 + C_6.$$

3. Pour $r = r_1$ $H_{1t} = H_{2t}$ ou $-\frac{1}{\mu_1}\frac{dA_I}{dr} = -\frac{1}{\mu_2}\frac{dA_{II}}{dr}$, c.-à.-d.

$$\frac{\delta_1 r_1}{2} = \frac{\delta_2 r_1}{2} - \frac{C_3}{\mu_2 r_1}.$$

4. Pour $r = r_2$ les composantes tangentielles de l'intensité du champ doivent être égales

$$\frac{\delta_2 r_2}{2} - \frac{C_3}{\mu_2 r_2} = -\frac{C_5}{\mu_3 r_2}.$$

Nous avons donc :

$$C_3 = \frac{\mu_2 r_1^2}{2}(\delta_2 - \delta_1);$$

$$-C_5 = \frac{\delta_2(r_2^2 - r_1^2) + \delta_1 r_1^2}{2}\mu_3;$$

$$C_4 = -\frac{\mu_1\delta_1 r_1^2}{4} + \frac{\mu_2\delta_2 r_1^2}{4} - C_3 \ln r_1;$$

$$C_6 = -\frac{\mu_2\delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 - C_5 \ln r_2.$$

Sur la fig. 454, l'une des courbes donne le caractère de variation de $-A = f(r)$; l'autre courbe indique le caractère de variation de $B = f(r)$ pour $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{5,7}{3,5}$ et pour $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

Exemple 205. En partant de l'expression $\Phi = \oint \vec{A}\, \vec{dl}$ et des données de l'exemple 204, trouver le flux magnétique coupé par le conducteur bimétallique de l'exemple 204 sur la longueur $l = 1$ *m*.

Solution. Suivant l'expression (15.26) $\Phi = \oint \vec{A}\,\vec{dl}$. Décomposons le chemin de l'intégration en quatre tronçons.

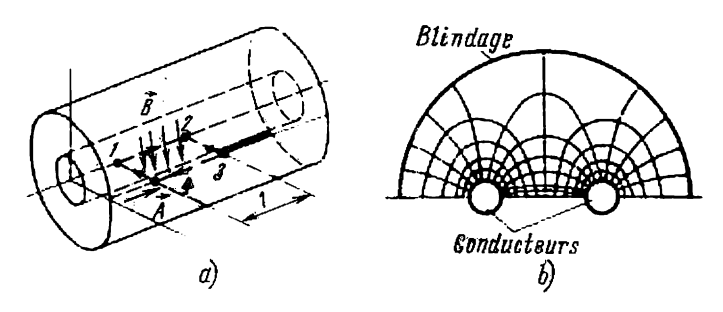


Fig. 455

Le premier tronçon va du point *1* au point *2* (voir fig. 455, *a*).
Deuxième tronçon du point *2* au point *3*.
Troisième tronçon du point *3* au point *4*, et quatrième tronçon du point *4* au point *1*.
Conformément à ceci

$$\oint \vec{A}\,\vec{dl} = \int_1^2 \vec{A}\,\vec{dl} + \int_2^3 \vec{A}\,\vec{dl} + \int_3^4 \vec{A}\,\vec{dl} + \int_4^1 \vec{A}\,\vec{dl}.$$

$\int_1^2 \vec{A}\,\vec{dl}$ est nul puisque la valeur de $\vec{A}$ pour $r = 0$ est nulle. Pour les deuxième et quatrième tronçons $\int \vec{A}\,\vec{dl}$ est également nul puisque l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{dl}$ est égal à $\pm 90°$ et $\cos 90° = 0$.

$\int \vec{A}\,\vec{dl}$ n'est pas nul seulement pour le troisième tronçon. On a pour ce dernier

$$\underset{r=r_2}{A} = -\frac{\mu \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4,$$

tandis que l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{dl}$ est égal à 180° (cos 180° = — 1). Par conséquent,

$$\Phi = \int_3^4 \underset{r=r_2}{\vec{A}\,\vec{dl}} = -\underset{r=r_2}{A} \cdot 1.$$

Exemple 206. En utilisant les constructions de la fig. 449 calculer la perméabilité de l'entrefer par unité de longueur de l'induit (1 m) d'une machine à courant continu.

Solution. Conformément à la fig. 449 $n = 2$ et $m = 11$; $\frac{b}{a} - 0{,}9$. Suivant l'expression (15.29)

$$G_m = \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 0{,}9 \cdot 11}{2} = 6{,}23 \cdot 10^{-6}\ H.$$

Exemple 207. Calculer la capacité et l'inductance par mètre de longueur d'une ligne de câbles à deux fils, à blindage cylindrique conducteur. La coupe de cette ligne et l'image du champ sont représentées sur la fig. 455, b ($\varepsilon_r = 2{,}5$).

Solution. L'image du champ, représentée sur la fig. 455, b, est valable pour un champ électrique, comme pour un champ magnétique. En outre, conformément au § 452, les lignes de force du champ électrique correspondent aux lignes équipotentielles du champ magnétique.

Le nombre de tubes de force du champ électrique est $m = 10{,}5 \cdot 2 = 21$. Le nombre de cellules par tube est $n = 10$ (5 entre le conducteur et l'armure et 5 entre les deux armures et le conducteur). Le rapport $\frac{b}{a} \approx 1$. Le nombre de tubes de force du champ magnétique $m = 10$, le nombre de cellules par tube étant $n = 21$. A l'aide de l'expression (15.31) trouvons la capacité par mètre de longueur du câble ($l = 1m$) :

$$C = \frac{2{,}5 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 21}{10} = 46 \cdot 10^{-12}\ F.$$

Par définition, l'inductance L est égale au rapport entre le flux magnétique total et le courant ayant créé ce flux, $L = \frac{\psi}{I}$. Dans le problème considéré nous avons affaire à une seule spire (les conducteurs d'aller et de retour). Par conséquent, le flux total ψ est égal au flux Φ entre les conducteurs (nous négligeons l'inductance due aux flux magnétiques totaux dans les corps des conducteurs, du fait de leur faible valeur).

Conformément à la loi du courant total, le courant I peut être remplacé par $\oint \vec{H}\,\vec{dl}$, le long d'un circuit fermé entourant ce conducteur. A son tour $\oint \vec{H}\,\vec{dl}$ est la chute du potentiel magnétique U_m le long de ce circuit. Par conséquent,

$$L = \frac{\psi}{I} \approx \frac{\Phi}{\oint \vec{H}\,\vec{dl}} = \frac{\Phi}{U_m} = G_m.$$

Ainsi, dans l'exemple considéré l'inductance L est égale à la perméance G_m. Pour calculer cette dernière faisons appel à l'expression (15.29) *

$$G_m = L = \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10}{21} = 6 \cdot 10^{-7}\ H.$$

* Lorsqu'on calcule L en utilisant l'expression établie pour G_m, le nombre de cellules dans le tube de force doit être compté suivant un circuit fermé.

Exemple 208. Trouver la différence de potentiel magnétique scalaire (la tension magnétique) entre les points A et B, situés dans le champ magnétique du courant linéaire $I = 10\ A$ (fig. 456).

Solution.

$$U_{m\,AB}=\int_A^B \vec{H}\,d\vec{l}=\int_{\text{suivant } AmC} \vec{H}\,d\vec{l}+\int_{\text{suivant } CnB} \vec{H}\,d\vec{l},$$

$$\int_{\text{suivant } AmC} \vec{H}\,d\vec{l} = H\int dl=\frac{I}{2\pi R_A}\,\frac{2\pi R_A}{4}=\frac{I}{4}.$$

Ligne de force
Ligne équipotentielle

Fig. 456

$\int_{\text{suivant } CnB} \vec{H}\,d\vec{l} = 0$, puisque sur ce tronçon l'angle entre $\vec{H}$ et $d\vec{l}$ est égal à 90°. Par conséquent,

$$U_{m\,AB}=\frac{I}{4}=2{,}5\ A.$$

Exemple 209. Un champ magnétique uniforme d'intensité $H_0=240\ A/m$ a été créé dans l'air. Une petite bille ferromagnétique à perméabilité $\mu_i=20$ est placée dans ce champ. Trouver l'induction à l'intérieur de cette bille.

Solution. Faisons appel à l'analogie entre les champs électrostatique et magnétique irrotationnel. Dans l'expression (13.69) substituons H_0 à E_0 et μ à ε.

Nous obtenons ainsi

$$H_i=H_0\frac{3\mu_e}{2\mu_e+\mu_i}=240\cdot\frac{3\cdot 1}{2+20}=32{,}7\ A/m.$$

Induction à l'intérieur de la bille:

$$B_i=20\cdot 32{,}7\cdot 1{,}256\cdot 10^{-6}=8{,}21\cdot 10^{-4}\ T.$$

Exemple 210. Un courant continu I circule le long d'un tube à rayon intérieur r_1 et à rayon extérieur r_2 (fig. 457). Etablir l'équation pour calculer l'intensité du champ H à l'intérieur du tube, dans le corps du tube et à l'extérieur de ce dernier.

Fig. 457

Solution. L'intensité du champ dans l'une quelconque des régions mentionnées est trouvée à l'aide de la loi du courant total.

Si on trace une circonférence de rayon $r<r_1$, dont le centre se trouve sur l'axe du tube, cette circonférence n'embrasse pas le courant. Par conséquent, pour $r\leqslant r_1$ $H=0$. En d'autres termes, il n'existe pas de champ magnétique à l'intérieur du tube. La densité du courant dans le corps du tube est:

$$\delta=\frac{I}{\pi(r_2^2-r_1^2)}.$$

Une circonférence de rayon $r_1\leqslant r\leqslant r_2$ embrasse le courant $\delta\pi\,(r^2-r_1^2)$.

Par conséquent, dans l'intervalle entre r_1 et r_2

$$H = \frac{I(r^2 - r_1^2)}{2\pi r (r_2^2 - r_1^2)}.$$

A l'extérieur du tube, pour $r \gg r_2$, l'intensité du champ décroît suivant une loi hyperbolique

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

La courbe $H = f(r)$ est représentée sur la fig. 457.

* * *

Les *lois de Biot — Savart et de Laplace* ont été exposées au cours de physique. Conformément à ces lois et en l'absence de milieux ferromagnétiques, un tronçon de conducteur linéaire $\vec{dl}$, parcouru par le courant I, crée une induction magnétique $\vec{dB}$ en un point se trouvant à la distance R de l'élément du courant ; cette induction est calculée de la manière suivante :

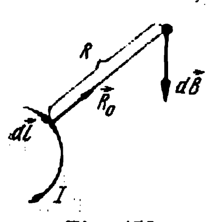


Fig. 458

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{R}_0}{R^2}. \tag{15.36}$$

Ici $\vec{R}_0$ — vecteur unitaire mené de $\vec{dl}$ au point où on calcule l'induction magnétique (fig. 458). Induction résultante en ce point est

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_l \frac{\vec{dl} \times \vec{R}_0}{R^2}. \tag{15.37}$$

Dans l'expression (15.37) l'intégration est faite suivant toute la longueur du circuit fermé, parcouru par le courant.

Si dans l'expression (15.36) on introduit le courant I, puisqu'il a une valeur constante, dans le produit vectoriel et si on substitue $\vec{\delta} dV$ à $I\,\vec{dl}$, où dV — élément de volume du conducteur à densité du courant $\vec{\delta}$, on obtient

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\vec{\delta} \times \vec{R}_0)\,dV}{R^2} \tag{15.38}$$

et

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{(\vec{\delta} \times \vec{R}_0)}{R^2} dV. \tag{15.39}$$

Dans l'expression (15.39) l'intégration se fait suivant le volume « occupé par le courant ».

Dans les ouvrages spécialisés la formule (15.38) est souvent appelée *loi d'Ampère.*

Dans la pratique, les expressions (15.37) à (15.39) sont employées lorsque l'intégration peut être fait sans grosses difficultés. Deux exemples simples d'utilisation de l'expression (15.37) sont donnés à la p. 635—636.

Pour conclure *arrêtons-nous sur les deux considérations suivantes* :

1. La structure des expressions (15.36) et (15.38) est jusqu'à une certaine mesure similaire à la structure de l'expression de l'intensité du champ électrique dans un champ d'une charge ponctuelle, obtenue au § 382 à partir de la loi de Coulomb.

2. Il est intéressant de comparer la loi du courant total avec les lois de Biot — Savart — Laplace. Toutes ces lois permettent de calculer l'induction magnétique créée par le courant. Cependant la loi du courant total n'est applicable qu'à des circuits fermés parcourus par des courants, tandis que les lois de Biot — Savart — Laplace sont applicables non seulement aux circuits fermés parcourus par des courants, mais également aux tronçons des conducteurs parcourus par des courants (aux éléments de courant). Dans ce sens, les lois de Biot — Savart — Laplace sont plus universelles.

Exemple 211. Calculer à l'aide de l'expression (15.37) pour le point m l'induction magnétique créée par le tronçon d'un conducteur linéaire, parcouru par le courant I (fig. 459). Le point m est situé à une distance b du conducteur.

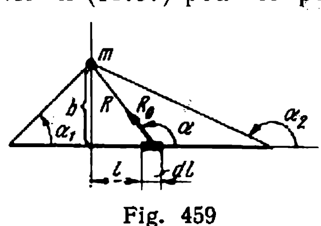


Fig. 459

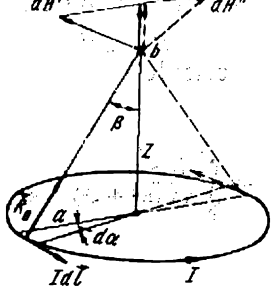


Fig. 460

Solution. Désignons par α l'angle entre dl et R. En partant des considérations géométriques, on a

$$R=\frac{b}{\sin\alpha}; \quad l=-b\operatorname{ctg}\alpha.$$

Par conséquent, $dl=\frac{b\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$

$$|\vec{dl}\times\vec{R}_0|=dl\cdot 1\cdot\sin\alpha;$$

$$dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi b}\sin\alpha\,d\alpha;$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\,d\alpha=\frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2).$$

Le vecteur $\vec{B}$ est dirigé vers le lecteur.

Si le conducteur est infiniment long $\alpha_1=0$, $\alpha_2=180°$, $\cos\alpha_1-\cos\alpha_2=2$ et $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}$, ce qui confirme le résultat obtenu à l'aide de la loi du courant total.

Exemple 212. Etablir l'expression pour calculer l'intensité du champ magnétique sur l'axe d'une spire circulaire, parcourue par le courant I (fig. 460). Appelons a le rayon de cette spire.

Solution. Considérons l'élément de courant $I\,\vec{dl}$. L'intensité du champ $d\vec{H}'$, créée par cet élément au point b, situé sur l'axe de la spire et se trouvant à la distance z du plan de la spire, est

$$\frac{I\,(\vec{dl}\times\vec{R}_0)}{4\pi\,(a^2+z^2)};$$

l'intensité $d\vec{H}'$ est perpendiculaire à $\vec{dl}$ et à $\vec{R}_0$. L'intensité au même point b, due à l'élément du courant $I\,\vec{dl}$, situé à l'opposé du précédent est $d\vec{H}''$. Les modules de $d\vec{H}'$ et de $d\vec{H}''$ sont égaux.

En effectuant l'addition géométrique de $d\vec{H}'$ et $d\vec{H}''$, nous obtenons un vecteur orienté suivant l'axe de la spire

$$dl = ad\,\alpha$$

$$H=\int_0^{2\pi}\frac{Ia\sin\beta\,d\alpha}{4\pi\,(a^2+z^2)}=\frac{Ia}{4\pi\,(a^2+z^2)}\,\frac{a}{(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi}d\alpha=\frac{Ia^2}{2\,(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

CHAPITRE XVI

ÉQUATIONS FONDAMENTALES D'UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE VARIABLE

§ 459. Définition d'un champ électromagnétique variable. On entend par champ électromagnétique variable l'ensemble des champs électrique et magnétique, variant en fonction du temps et liés réciproquement l'un à l'autre.

Le champ électromagnétique variable est une particulière forme de la matière. Il possède une énergie, une masse, une quantité de mouvements et peut passer à d'autres formes de la matière. Les perturbations quelconques de ce champ, dans un diélectrique, sont transmises à de grandes distances avec une vitesse considérable, égale approximativement à $3 \cdot 10^8$ *m/s*.

Les équations utilisées dans l'étude des phénomènes se déroulant dans un champ électromagnétique variable, sont appelées équations de Maxwell.

Le système des équations de Maxwell comprend quatre équations :

1. L'équation exprimant la relation entre le rotationnel du champ magnétique et la densité du courant au même point du champ. Cette équation est appelée première équation de Maxwell.

2. L'équation donnant la relation entre le rotationnel du champ électrique et la vitesse de variation du champ magnétique au même point du champ. Cette équation est appelée deuxième équation de Maxwell.

3. L'équation $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ exprimant le principe de la continuité du flux magnétique.

4. L'équation $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}$ exprimant la relation entre la divergence du champ électrique et la densité des charges libres au même point du champ.

Lorsqu'on étudie les relations énergétiques existant dans un champ électromagnétique, on a recours également au théorème d'Oumov — Poynting qui sera examiné par la suite au § 463.

§ 460. Première équation de Maxwell. La première équation de Maxwell s'écrit de la manière suivante

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (16.1)$$

Deux densités de courant figurent au second membre de cette équation : la densité du courant de conduction $\vec{\delta}$ et la densité du courant de déplacement électrique $\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Le courant de déplacement électrique apparaît dans un diélectrique quelconque, y compris le vide, lorsque l'intensité du champ électrique varie en fonction du temps. Le courant de déplacement donne naissance à un champ magnétique, comme le fait

le courant de conduction. Quoique la nature du courant de conduction et celle du courant de déplacement ne soient pas identiques, les courants de ces deux espèces possèdent la même propriété, celle de donner naissance à un champ magnétique.

Le sens physique de la première équation de Maxwell est d'exprimer que toute variation du champ électrique en fonction du temps $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ en un point quelconque du champ fait apparaître au même point un rotationnel du champ magnétique (rot $\vec{H}$).

Le mérite de l'introduction du courant de déplacement dans les équations fondamentales du champ électromagnétique variable revient à James Maxwell. Maxwell a fait paraître en 1873 un ouvrage fondamental, portant le titre « Traité d'électricité et de magnétisme ». C'est dans cet ouvrage qu'il a introduit le courant de déplacement dans les calculs électrotechniques.

Nous avons déjà en affaire maintes fois au courant de déplacement dans les sections précédentes de ce livre (et en particulier dans celle, intitulée « Phénomènes transitoires », dans la deuxième partie de ce cours).

On sait que pendant la charge d'un condensateur quelconque, ce dernier est parcouru par un courant. Ce courant, qui traverse le diélectrique n'est pas autre chose, que le courant de déplacement.

Ainsi, lorsque le champ électrique dans un diélectrique varie en fonction du temps, ce diélectrique est traversé par un courant. Si, par exemple, on prend un condensateur à air, plan, non chargé et si on le branche par l'intermédiaire de la résistance R, à une source de F.E.M. à tension U, la tension aux armatures du condensateur va croître conformément à la loi suivante : $u_C = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$. Du fait que le champ électrique dans un condensateur plan est :

$$E = \frac{u_C}{d},$$

où d — distance entre les armatures, on a

$$E = \frac{U}{d}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

La capacité des condensateurs plans est $C = \frac{\varepsilon s}{d}$. Le courant de déplacement traversant un centimètre carré, dans une section du diélectrique, pris perpendiculairement aux lignes de force, est

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon \frac{U}{d} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{1}{RC} = \frac{U}{Rs} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Courant de déplacement à travers la surface s est

$$\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}},$$

c'est-à-dire qu'il est exactement égal au courant de conduction, circulant dans les conducteurs raccordant les condensateurs à la source de F.E.M.

Il y a lieu de souligner que *les lignes du courant sont des lignes fermées.*

Pour terminer l'examen de la première équation de Maxwell, remarquons qu'en réalité cette équation n'est autre chose que la loi du courant total, écrite sous forme différentielle.

Assurons-nous que de la loi du courant total découle l'équation (16.1). A cette fin prenons un circuit fermé quelconque et écrivons pour ce dernier l'équation de la loi du courant total. Le courant total traversant l'aire délimitée par le circuit est égal à la somme du courant de conduction et du courant de déplacement. Par conséquent,

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = \int_s \left(\vec{\delta} + \varepsilon\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\vec{ds}.$$

Conformément au théorème de Stokes $\oint \vec{H}\,\vec{dl} = \int_s \operatorname{rot} \vec{H}\,\vec{ds}$. Par conséquent,

$$\int_s \operatorname{rot} \vec{H}\,\vec{ds} = \int_s \left(\vec{\delta} + \varepsilon\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\vec{ds}.$$

Cette dernière égalité doit être satisfaite pour toutes les aires s, quelles qu'elles soient. Ceci ne peut être vrai que lorsque les fonctions à intégrer du premier et du second membre de cette dernière expression sont égales, c'est-à-dire lorsque

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \varepsilon\,\frac{d\vec{E}}{\partial t}.$$

Nous avons déjà dit que les lignes du courant sont des lignes fermées. On peut traduire mathématiquement *le fait que les lignes du courant total sont fermés.* A cette fin prenons la divergence de deux membres de l'équation (16.1). Nous avons déjà indiqué que la divergence d'un rotationnel est identiquement nulle (voir § 448). Par conséquent,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div}\left(\vec{\delta} + \varepsilon\,\frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t}\right) = 0.$$

D'où

$$\operatorname{div}\left(\vec{\delta} + \varepsilon\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0.$$

Ainsi il n'existe pas en un point quelconque du champ ni disparition, ni création de lignes du courant total.

L'équation $\operatorname{div}\left(\vec{\delta} + \varepsilon\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$ est l'équation de continuité (14.5), examinée au § 425, écrite en forme différente. En effet, il résulte de l'équation $\operatorname{div}\left(\vec{\delta} + \varepsilon \cdot \frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t}\right) = 0$, que $\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D}$. Mais $\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{lib}$. Par conséquent, $\operatorname{div}\vec{\delta} = -\frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t}$.

§ 461. Deuxième équation de Maxwell. La deuxième équation de Maxwell s'écrit de la manière suivante

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (16.2)$$

Voici le sens physique de cette équation : chaque variation du champ magnétique en fonction du temps $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$, en un point quelconque du champ, amorce un tourbillon ou un rotationnel du champ électrique au même point de ce champ, autrement dit, provoque un champ électrique rotationnel.

La deuxième équation de Maxwell n'est autre chose que la forme différentielle de la loi de l'induction électromagnétique.

Le raisonnement suivant nous le démontre. Considérons mentalement un certain contour fermé, situé dans un champ électromagnétique variable. La chute de tension dans ce circuit est égale à $\oint \vec{E}\,\vec{dl}$, cette chute devant être égale à la F.E.M. induite par le flux magnétique variable est

$$e = \oint \vec{E}\,\vec{dl}.$$

Mais la F.E.M. $e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

Ainsi,

$$\oint \vec{E}\,\vec{dl} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

A son tour

$$\Phi = \int_s \vec{B}\,\vec{ds} \text{ et } e = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\vec{ds}.$$

Par conséquent,

$$\oint_l \vec{E}\,\vec{dl} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\vec{ds},$$

l'aire s étant limitée par l contour.

Conformément au théorème de Stockes $\oint \vec{E}\,\vec{dl} = \int_s \operatorname{rot} \vec{E}\,\vec{ds}$ et, par conséquent,

$$\int_s \operatorname{rot} \vec{E}\,\vec{ds} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\vec{ds}.$$

Cette dernière égalité doit être satisfaite quelles que soient les aires s; ceci ne peut avoir lieu que lorsque les fonctions à intégrer des deux membres sont égales. Par conséquent,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Le signe —, figurant devant le second membre de la deuxième équation de Maxwell $\left(\text{de même que dans l'expression } e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$, s'explique par la règle du tire-bouchon. Si on visse le tire-bouchon de manière que le sens positif du vecteur de l'induction magnétique $\vec{B}$, en un certain point de l'espace et lorsque l'induction en ce point augmente, coïncide avec le sens de déplacement de la pointe du tire-bouchon, le sens positif pour le vecteur d'intensité du champ électrique $\vec{E}$ coïncide

avec le sens de rotation du tire-bouchon, la circulation du vecteur $\vec{E}$ étant écrite le long d'un contour fermé infiniment petit, embrassant ce point et situé dans un plan perpendiculaire au vecteur $\vec{B}$.

Le signe — est placé devant le second membre de (16.2) pour faire coïncider le sens réel de $\vec{E}$, dans les conditions susmentionnées, avec le sens pris comme positif pour $\dot{\vec{E}}$.

Des dérivées partielles (et non totales) en fonction du temps figurent dans la première comme dans la deuxième équation de Maxwell. Ceci provient de ce que les équations de Maxwell sont écrites pour des corps et des circuits fermés, *immobiles* par rapport au système de coordonnées choisi.

Il y a lieu de remarquer que dans un champ électrique variable, en plus des lignes de force du champ électrique « commençant » et se terminant aux charges électriques (de même que dans un champ électrostatique), peuvent également exister des lignes de force du champ électrique, fermées sur elles-mêmes, embrassant les lignes de force du champ magnétique, également fermées sur elles-mêmes (voir par exemple fig. 483).

§ 462. Equation de Maxwell écrite sous forme complexe. Les équations (16.1) et (16.2) sont écrites pour des valeurs instantanées. Lorsque H et E varient dans le temps suivant une loi sinusoïdale, on peut également utiliser la méthode symbolique et écrire les équations (16.1) et (16.2) sous une forme différente. Soit :

$$H = H_m \sin(\omega t + \psi_H) \quad \text{et} \quad E = E_m \sin(\omega t + \psi_E).$$

On peut écrire $H = \operatorname{Im} \dot{H}_m e^{j\omega t}$ (Im —« partie imaginaire ») ou, par convention, $H \to \dot{H}_m e^{j\omega t}$ où l'amplitude complexe est

$$\dot{H}_m = H_m e^{j\psi_H}.$$

A son tour $E \to \dot{E}_m e^{j\omega t}$ ($\to$ étant le signe de correspondance).

Du fait que les intensités E et H varient non seulement en fonction du temps suivant une loi sinusoïdale, mais sont également des fonctions vectorielles, c'est-à-dire qu'elles sont des vecteurs orientés d'une façon déterminée dans l'espace, nous allons placer au-dessus de ces symboles une flèche et un point

$$\dot{\vec{E}}_m \text{ et } \dot{\vec{H}}_m.$$

La flèche montre qu'il s'agit ici d'un vecteur dans l'espace et le point signifie que la projection de ce vecteur sur un axe quelconque de coordonnées varie dans le temps suivant une loi sinusoïdale. Alors $\vec{\delta}$ peut être remplacée par $\gamma \dot{\vec{E}} e^{j\omega t}$,

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ par } j\omega\varepsilon \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} \right)$$

et

$$\operatorname{rot}\vec{\dot{H}} = \operatorname{rot}(\vec{\dot{H}}\cdot e^{j\omega t}) = e^{j\omega t}\operatorname{rot}\vec{\dot{H}}$$

($e^{j\omega t}$, étant une grandeur constante, indépendante des coordonnées, peut être mis en facteur devant le signe du rotationnel). Dans ces conditions la première équation de Maxwell s'écrit comme suit :

$$e^{j\omega t}\operatorname{rot}\vec{\dot{H}} = (\gamma\vec{\dot{E}} + j\varepsilon\omega\vec{\dot{E}})\, e^{j\omega t}.$$

Après simplification par $e^{j\omega t}$ nous avons

$$\operatorname{rot}\vec{\dot{H}} = \gamma\vec{\dot{E}} + j\omega\varepsilon\vec{\dot{E}}. \qquad (16.3)$$

De même la deuxième équation de Maxwell peut être écrite ainsi sous forme complexe :

$$\operatorname{rot}\vec{\dot{E}} = -j\omega\mu\vec{\dot{H}}. \qquad (16.4)$$

§ 463. Théorème d'Oumov — Poynting pour les grandeurs instantanées. En plus des équations de Maxwell, un grand rôle est joué dans la théorie du champ électromagnétique par le théorème d'Oumov — Poynting. Ce théorème permet de se rendre compte des rapports énergétiques existant dans un champ.

Il existe deux formes d'écriture du théorème d'Oumov — Poynting. La première est utilisée pour les grandeurs instantanées, et la deuxième, la forme complexe, pour les grandeurs variant suivant une loi sinusoïdale.

Il a été indiqué au § 421 que l'énergie par unité de volume d'un champ électrique est égale à $\frac{\varepsilon E^2}{2}$. L'énergie du champ magnétique par unité de volume est — $\frac{\mu H^2}{2}$. L'énergie contenu dans le volume dV est

$$\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right) dV.$$

Pour établir l'expression donnant l'énergie totale du volume dV, multiplions (16.1) $\vec{E}\, dV$ et (16.2) par $\vec{H}\, dV$. Nous obtenons ainsi

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}\, dV = \left(\gamma\vec{E}\vec{E} + \varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) dV = \left(\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon E^2}{2}\right) dV, \qquad (16.5)$$

$$\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}\, dV = \left(-\mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) dV = \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu H^2}{2}\right) dV. \qquad (16.6)$$

Soustrayons (16.6) de (16.5) :

$$(\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E})\, dV = \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)\right] dV \qquad (16.7)$$

Puisque div $(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H}$ rot $\vec{E} - \vec{E}$ rot $\vec{H}$*, le premier membre de (16.7 est — div $(\vec{E} \times \vec{H})\ dV$.

Par conséquent,

$$-\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H})\,dV=\left[\gamma E^2+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)\right]dV.$$

Pour simplifier l'écriture désignons le produit vectoriel $\vec{E} \times \vec{H}$ par $\vec{S}$, c'est-à-dire posons $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H})$; $\vec{S}$ est vecteur qu'on appelle habituellement vecteur de Poynting ; ses dimensions sont celles du produit des dimensions de E par les dimensions de H

$$[S]=[E]\,[H]=\frac{V}{m}\,\frac{A}{m}=VA/m^2.$$

Ainsi, le vecteur de Poynting a les dimensions d'une puissance (ou d'une énergie par unité de temps), rapportée à une unité de surface et son sens (fig. 461) coïncide avec celui du déplacement de la pointe du tire-bouchon, lorsque l'angle de rotation de $\vec{E}$ à $\vec{H}$ est le plus petit. Ainsi :

$$-\operatorname{div}\vec{S}\,dV=\left[\gamma E^2+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)\right]dV. \qquad (16.8)$$

Etendons (16.8) à un certain volume de dimensions finies. A cette fin intégrons (16.8) dans le volume V :

$$-\int_V \operatorname{div}\vec{S}\,dV=\int_V \gamma E^2\,dV+\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)dV. \qquad (16.8')$$

De même que l'intégrale de surface peut être transformée conformément au théorème de Stokes, en intégrale de ligne, comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent (§ 450)

$$\int_s \operatorname{rot}\vec{A}\,d\vec{s}=\oint \vec{A}\,d\vec{l},$$

l'intégrale de volume peut être à son tour transformée en une intégrale de surface. Cette transformation se fait à l'aide du théorème d'Ostrogradski — Gauss

$$\int \operatorname{div}\vec{S}\,dV=\oint \vec{S}\,d\vec{s}.$$

---

* Rappelons la déduction de cette relation. Utilisons les indices a et b, désignant la variable (a ou b), par rapport à laquelle on effectue la dérivation et rappelons qu'on peut faire une permutation circulaire des facteurs. Nous aurons alors

$$\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B})=\nabla(\vec{A}\times\vec{B})=\nabla_a(\vec{A}\times\vec{B})+\nabla_b(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}(\nabla_a\times\vec{A})+$$

$$+\vec{A}(\vec{B}\times\nabla_b)=\vec{B}(\nabla_a\times\vec{A})-\vec{A}(\nabla_b\times\vec{B})=\vec{B}\operatorname{rot}\vec{A}-\vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}.$$

En substituant $\vec{E}$ à $\vec{A}$ et $\vec{H}$ à $\vec{B}$ on obtient précisément la relation cherchée:

$$\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}-\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}.$$

Expliquons cette transformation au point de vue qualitatif. Divisons le volume V (fig. 462) en un grand nombre de volumes élémentaires ΔV, substituons $\frac{\sum \vec{S}\Delta\vec{s}}{\Delta V}$ à $\operatorname{div} \vec{S}$ $\left(\text{rigoureusement parlant il aurait fallu prendre } \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{S}\Delta\vec{s}}{\Delta V}\right)$, où $\Delta\vec{s}$ est un élément de surface du volume ΔV et où le signe $\sum$ désigne la sommation suivant toutes les surfaces du volume ΔV. On a alors

$$\int_V \operatorname{div} S dV = \sum\sum \frac{\vec{S}\Delta\vec{s}}{\Delta V} \Delta V = \sum\sum \vec{S}\Delta\vec{s}.$$

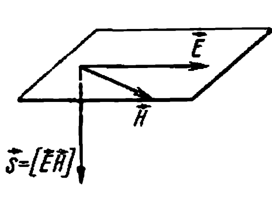


Fig. 461

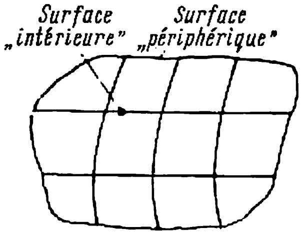


Fig. 462

Le premier signe de $\sum$ désigne la sommation suivant les surfaces d'un volume élémentaire et le deuxième signe correspond à la sommation suivant les divers volumes.

La somme $\sum\sum \vec{S}\,\Delta\vec{s}$ peut être décomposée en deux sommes : la somme des expressions $\vec{S}\,\Delta s$, suivant toutes les surfaces, séparant un volume du volume voisin (suivant les surfaces « intérieures ») et la somme $\vec{S}\,\Delta\vec{s}$, suivant les surfaces « périphériques ». La première somme est nulle, puisque pour deux volumes continus les normales, extérieures à leurs surfaces communes, sont dirigées en opposition. On peut le voir sur la fig. 463 ; mn est la face commune de deux volumes. Pour le volume supérieur la normale à cette face est dirigée vers le bas $(\Delta\vec{s}_1)$ et pour le volume inférieur, la normale à sa surface est dirigée vers le haut $(\Delta\vec{s}_2)$; le vecteur $\vec{S}$, étant multiplié par $(\Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2)$ s'annule. La somme $\vec{S}\Delta\vec{s}$, suivant toutes les surfaces périphériques, donne précisément $\oint \vec{S}\,d\vec{s}$.

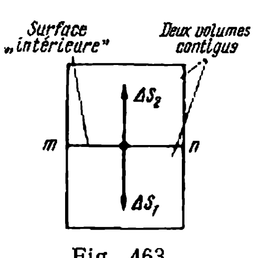


Fig. 463

Ainsi, le théorème d'Oumov — Poynting pour les valeurs instantanées s'écrit de la manière suivante :

$$-\oint_s \vec{S}\,d\vec{s} = \int_V \gamma E^2\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right) dV. \qquad (16.9)$$

Le premier membre (16.9) est le flux du vecteur de Poynting (dirigé vers l'intérieur du volume) à travers une surface fermée quelconque s,

délimitant un certain volume V*. Conformément à l'équation de Joule — Lenz, écrite en forme différentielle, γE^2 est l'énergie dégagée sous forme de chaleur par unité de volume dans l'unité de temps.

Par conséquent, $\int_V \gamma E^2 dV$ est l'énergie dégagée sous forme de chaleur par unité de temps dans le volume V ;

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)$ est la vitesse de variation de la réserve de l'énergie électromagnétique par unité de volume.

Mais la vitesse de variation d'énergie électromagnétique n'est autre chose que la puissance. Par conséquent, le flux du vecteur de Poynting, à travers une surface fermée quelconque délimitant le volume V, est égal à la puissance dégagée dans ledit volume V sous forme de chaleur, et à la puissance utilisée pour accroître l'énergie du champ magnétique.

Le théorème d'Oumov — Poynting peut être interprété comme équation du bilan énergétique ; le premier membre de (16.9) est la puissance ou l'énergie apportée par unité de temps sous forme du vecteur du flux de Poynting à l'intérieur d'un certain volume ; le second membre de (16.9) est l'énergie dépensée par unité de temps à l'intérieur de ce volume.

La relation (16.9) a été établie dans l'hypothèse que le milieu à l'intérieur du volume V soit homogène et isotrope, ainsi qu'en supposant qu'il n'existe pas d'onde réfléchie, ni de sources de force électromotrice à l'intérieur du volume V.

Si le champ ne varie pas dans le temps, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)=0$$

et

$$-\oint \vec{S}\,\vec{ds}=\int_V \gamma E^2\, dV.$$

L'énergie électromagnétique est transmise de l'endroit où elle est engendrée à celui de son utilisation suivant un diélectrique (tandis que les conducteurs jouent un rôle double : ce sont des canaux le long desquels circule le courant et en même temps des organisateurs de la structure du champ dans le diélectrique).

Démontrons le bien-fondé de cette affirmation à l'aide de l'exemple le plus simple. Supposons que l'énergie du courant continu soit transportée le long d'un câble coaxial (fig. 464). Le rayon du conducteur est r_1, le rayon intérieur de la gaine est r_2. Supposons que la conductivité du

* Expliquons le sens du signe — figurant devant le premier membre de l'expression (16.9). L'élément de surface $\vec{ds}$ en un point quelconque de cette surface est dirigé dans le sens de la normale extérieure par rapport au volume considéré. Le vecteur de Poynting $\vec{S}$ est dirigé à l'intérieur de ce volume. Du fait que l'angle entre $\vec{S}$ et $\vec{ds}$ est plus grand que 90°, le produit scalaire $\vec{S}\,\vec{ds} < 0$ et $-\vec{S}\,\vec{ds} > 0$. Ainsi, grâce à la présence du signe —, le premier membre de l'expression (16.9) est une quantité positive.

matériel du brin et celle de la gaine soient tellement grandes (théoriquement infiniment grandes), que l'intensité du champ $E = \frac{\delta}{\gamma}$ dans le brin et dans la gaine tendent vers zéro. L'espace entre le brin et la gaine est rempli de diélectrique.

Assurons-nous que l'énergie transmise au récepteur par unité de temps et égale à UI est effectivement canalisée suivant le diélectrique.

A cette fin calculons le flux du vecteur de Poynting à travers la section transversale du diélectrique ayant dans le cas considéré la forme

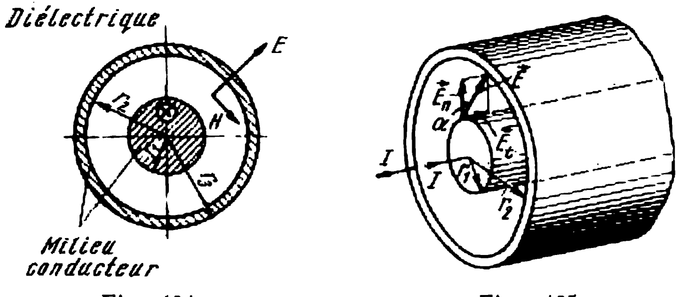


Fig. 464　　　Fig. 465

d'un anneau de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2. Conformément à la loi du courant total l'intensité du champ magnétique dans le diélectrique est

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Le champ électrique dans le diélectrique pour le courant continu est calculé comme en électrostatique :

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r l} = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Ici Q — charge totale du conducteur sur la longueur l, U — tension entre le brin et la gaine. Par conséquent, en un certain point du diélectrique, situé à la distance r de l'axe ($r_1 \leqslant r \leqslant r_2$), on a

$$S = EH = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

($\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont respectivement perpendiculaires. Voir fig. 465). Le flux du vecteur de Poynting à travers un anneau à rayons r_1 et r_2 est :

$$\int \vec{S}\,\vec{ds} = \int_{r_1}^{r_2} S 2\pi r\,dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = UI.$$

Ainsi, toute l'énergie fournie au récepteur est effectivement transmise le long du diélectrique. Aucune énergie n'est transmise au récepteur le long du brin ou de la gaine. En outre, si l'on tient compte que γ a une valeur finie et que l'intensité du champ électrique dans le brin et dans la gaine est dirigée dans le même sens que le courant et n'est pas nulle, il est facile de se rendre compte qu'il existe un flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale du conducteur vers l'intérieur de ce conducteur, c.-à-d. que les conducteurs consomment eux-mêmes de l'énergie, prélevée du diélectrique, afin de compenser les pertes thermiques.

Exemple 213. Calculer la tangente de l'angle entre le champ électrique et la normale à la surface du brin en un point appartenant à la surface du brin d'un câble coaxial (fig. 464), ainsi que la valeur du flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale du conducteur, sur la longueur d'un mètre et comparer la valeur du flux du vecteur de Poynting, ainsi trouvé, avec les pertes d'énergie dans les conducteurs, pour la même longueur de 1 *m*. Rayon du brin en cuivre $r_1 = 0{,}3$ *cm*. Rayon intérieur de la gaine $r_2 = 1$ *cm*. Courant continu circulant dans le câble $I = 50$ *A*. Tension U entre le conducteur et la gaine 10 *kV*.

Solution. La composante de l'intensité du champ électrique normale à la surface du brin

$$E_n = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{10^4}{0{,}003 \cdot \ln \frac{1}{0{,}3}} = 2{,}77 \cdot 10^5 \; V/m.$$

La composante de l'intensité du champ électrique, tangente à la surface du brin, conformément à la loi d'Ohm, vaut :

$$E_t = \frac{I}{\pi r_1^2 \gamma} = \frac{50}{\pi \cdot 0{,}003^2 \cdot 5{,}8 \cdot 10^7} = 3{,}05 \cdot 10^{-2} \; V/m.$$

Le vecteur de l'intensité du champ électrique $\vec{E}$ forme avec la normale à la surface du conducteur un angle α (fig. 465), dont la tangente est

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_t}{E_n} = 1{,}1 \cdot 10^{-7}.$$

L'intensité du champ magnétique à la surface du brin, conformément à la loi du courant total, est

$$H = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{50}{2\pi \cdot 0{,}003} = 2650 \; A/M.$$

Pour calculer la valeur du flux du vecteur de Poynting, pénétrant à l'intérieur du brin, pour une longueur de 1 *m*, il faut multiplier la composante du vecteur de Poynting EH, pénétrant à l'intérieur du brin, par la valeur de la surface latérale du conducteur sur une longueur de 1 *m*

$$E_t H \cdot 2\pi r_1 \cdot 1 = 3{,}05 \cdot 10^{-2} \cdot 2650 \cdot 2\pi \cdot 0{,}003 \cdot 1 = 1{,}523 \; W.$$

Cette valeur est exactement égale aux pertes d'énergie dans le conducteur du câble sur une longueur de 1 *m* :

$$I^2 R = I^2 \frac{l}{\gamma S} = 50^2 \frac{1}{5{,}8 \cdot 10^7 \pi \cdot 0{,}003^2} = 1{,}523 \; W.$$

Exemple 214. La fig. 466 représente la coupe transversale d'un noyau de transformateur. Ce noyau est entouré d'une spire. Deux voltmètres électrodynamiques identiques V_1 et V_2 sont branchés aux extrémités ouvertes a et b de cette spire. La disposition des conducteurs entre les voltmètres et les points a et b est représentée sur la fig. 466. Les différents points de la spire et des conducteurs sont désignés par des lettres.

Le flux Φ circulant dans le noyau du transformateur est dirigé le long de ce noyau (perpendiculairement à la figure) et varie comme suit en fonction du temps

$$\Phi = 0{,}001 \cos 500\, t\ Wb.$$

Calculer les indications des voltmètres, en supposant qu'il n'y a pas de flux magnétiques en dehors du noyau et que la résistance R_V de chaque voltmètre est beaucoup plus grande que la résistance R_{sp} de la spire elle-même, autrement dit que

$$\frac{R_{sp}}{R_V} \ll 1.$$

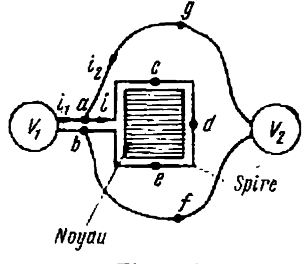


Fig. 466

Solution. Désignons par i_1 le courant dans le voltmètre V_1, par i_2 celui dans le voltmètre V_2, par i le courant dans la spire. Les sens positifs pour ces courants sont indiqués par des flèches sur la fig. 466.

Conformément à la première loi de Kirchhoff

$$i_1 + i_2 = i. \qquad (a)$$

Ecrivons deux équations suivant la deuxième loi de Kirchhoff. L'une d'entre elles est établie pour le circuit constitué par le voltmètre V_1 et la spire, c.à-d. pour le circuit fermé $acdebV_1a$. En écrivant ces équations n'oublions pas que le circuit embrasse le noyau et, par conséquent, qu'il est traversé par le flux Φ

$$i_1 R_V + i R_{sp} + \frac{d\Phi}{dt} = 0. \qquad (b)$$

Ecrivons la deuxième équation pour le circuit constitué par le voltmètre V_2 et la spire (circuit $agV_2fbedca$). Ce circuit n'embrasse pas le noyau et, par conséquent, n'est pas traversé par le flux magnétique

$$i_2 R_V + i R_{sp} = 0. \qquad (c)$$

En partant de l'équation (c) trouvons $i = -i_2 \frac{R_V}{R_{sp}}$ et substituons dans (a) la valeur ainsi trouvée. Nous obtenons alors $i_1 = -i_2 \left(\frac{R_V}{R_{sp}} + 1 \right)$. Du fait que $\frac{R_V}{R_{sp}} \gg 1$, $i_1 \approx -i_2 \frac{R_V}{R_{sp}}$.

Substituons $i = i_1 + i_2$ où $i_2 = -i_1 \frac{R_{sp}}{R_V}$ dans l'équation (b). Nous aurons alors

$$i_1 R_V \left[1 + \frac{R_{sp}}{R_V} - \left(\frac{R_{sp}}{R_V} \right)^2 \cdot \right] \approx i_1 R_V = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = 0{,}5 \sin 500\, t.$$

L'indication du voltmètre V_1 est égale à la valeur efficace de la grandeur $i_1 R_V$, c'est-à-dire à $\frac{0{,}5}{\sqrt{2}} = 0{,}355\ V$.

Les indications du voltmètre V_2 sont égales à la valeur efficace de la grandeur

$$i_2 R_V \approx 0.$$

L'exemple considéré montre nettement que *lors des mesures dans un champ électromagnétique variable, les indications du voltmètre dépendent de la position des conducteurs entre ce voltmètre et l'installation à mesurer.*

§ 464. Théorème d'Oumov — Poynting écrit sous forme complexe. Avant d'examiner l'écriture du théorème d'Oumov — Poynting en sa forme complexe, parlons de la puissance totale dans un circuit à courant alternatif. La puissance totale est

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = P + jQ.$$

Soit un circuit à courant alternatif comprenant une résistance active R, une inductance L et une capacité C, couplées en série. Pour ce circuit la puissance réactive est

$$Q = I^2 X = I^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \omega\left[I^2 L - I^2\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 C\right] = 2\omega(w_m - w_e).$$

Ici

$$w_m = \frac{LI^2}{2} \quad \text{et} \quad w_e = \frac{CU_c^2}{2},$$

U_C — tension aux armatures du condensateur.

Ainsi la puissance réactive Q est égale à la différence entre les énergies magnétique w_m et électrique w_e, multipliée par 2ω. De même que dans un circuit à courant alternatif, pour calculer la puissance totale $\tilde{S}$, il faut multiplier la valeur complexe de la tension $\dot{U}$ par la valeur complexe conjuguée du courant $\overset{*}{I}$, on fait appel ici au vecteur complexe de Poynting $\vec{\tilde{S}}$. Il est égal à

$$\vec{\tilde{S}} = \dot{\vec{E}} \times \overset{*}{\vec{H}}.$$

Nous aurons ainsi au lieu de $-\oint \vec{S}\,\vec{ds}$

$$-\oint \vec{\tilde{S}}\,\vec{ds} = -\int_V \operatorname{div} \vec{\tilde{S}}\, dV = \int_V (\dot{\vec{E}} \operatorname{rot} \overset{*}{\vec{H}} - \overset{*}{\vec{H}} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}})\, dV.$$

Conformément à (16.3) et (16.4)

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega\varepsilon \dot{\vec{E}}$$

et

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu \dot{\vec{H}}.$$

Par conséquent, $\operatorname{rot}\overset{*}{\vec{H}} = \gamma\overset{*}{\vec{E}} - j\omega\varepsilon\overset{*}{\vec{E}}$ et

$$\dot{\vec{E}}\operatorname{rot}\overset{*}{\vec{H}} - \overset{*}{\vec{H}}\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = \gamma\dot{\vec{E}}\overset{*}{\vec{E}} - j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}\overset{*}{\vec{E}} + j\omega\mu\overset{*}{\vec{H}}\dot{\vec{H}} = \gamma E^2 + 2j\omega\left(\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\varepsilon E^2}{2}\right).$$

Et de ce fait 168

$$-\oint \tilde{\vec{S}}\,\vec{ds} = \int_V \gamma E^2\,dV + j2\omega\int_V\left(\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\varepsilon E^2}{2}\right)dV. \qquad (16.10)$$

Le premier terme du second membre représente la puissance active, et le deuxième terme est la puissance réactive. Ainsi le théorème d'Oumov — Poynting peut être écrit de la manière suivante :

$$-\oint \tilde{\vec{S}}\,\vec{ds} = P + jQ.$$

Il est souvent utilisé sous cette forme pour calculer la résistance active et la réactance intérieure des conducteurs en courant alternatif (voir pour les détails le § 472).

§ 465. Quelques observations complémentaires. Avant de terminer le chapitre XVI il y a lieu de faire les quatre remarques suivantes:

Première remarque. Les équations de Maxwell comprennent les paramètres (ε,γ,μ), caractérisant les moyennes des propriétés de la substance dans l'espace et dans le temps. En basses fréquences, ces paramètres sont des nombres réels (non complexes) et c'est ainsi que nous les considérerons dans ce cours.

En haute fréquence la viscosité diélectrique, les phénomènes de relaxation et autres commencent à jouer un rôle important dans les diélectriques. Dans les substances ferromagnétiques ce sont les phénomènes d'hystérésis, de viscosité magnétique et certains autres encore qui se manifestent nettement dans ces conditions. Pour ces raisons ε, γ et μ deviennent des fonctions de la fréquence et sont des quantités complexes.

Deuxième remarque. Au § 460 nous avons examiné la première équation de Maxwell (16.1). Deux densités du courant, celle du courant de conduction $\vec{\delta}$ et celle du courant de déplacement électrique $\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ figurent dans le deuxième membre de cette équation. Mais il existe en réalité en plus du courant de conduction et du courant de déplacement électrique, un courant de troisième espèce, à savoir le courant de transfert. Le courant de transfert est une notion collective.

On appelle *courant de transfert*, un courant dont la nature diffère de celle du courant de conduction, ainsi que de celle du courant de déplacement. L'exemple le plus typique du courant de transfert est le courant circulant dans un tube électronique du fait du phénomène d'émission thermo-électronique.

La densité du courant de transfert est égale à la densité volumique des charges transportées ρ, multipliée par la vitesse de leur transfert $\vec{v}$. Si le courant de transfert est créé par un mouvement à vitesse $\vec{v}_+$, les particules à charge positive ayant la densité volumique ρ et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_-$ et des particules à charge négative de densité volumique ρ_-, la densité du courant de transfert est égale à $\rho_+\vec{v}_+ + \rho_-\vec{v}_-$.

Si on tient compte du courant de transfert, on doit écrire la première équation de Maxwell sous la forme suivante:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \delta + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \rho \vec{v}.$$

Pour les problèmes considérés dans la troisième partie de ce cours, le courant de transfert n'existe pas et, par conséquent, la première équation de Maxwell sera prise dans sa forme (16.1).

Troisième remarque. Pour des fréquences très élevées, lorsque la longueur de l'onde électromagnétique devient commensurable avec les dimensions linéaires caractérisant la structure moléculaire de la substance elle-même, celle-ci ne peut plus être considérée comme un continuum. Dans ce cas les équations de Maxwell doivent être remplacées par des équations tenant compte de la structure moléculaire de la substance.

Quatrième remarque. Nous avons indiqué au § 459 que le champ électromagnétique possède non seulement une énergie, mais également une masse et une quantité de mouvement. La masse par unité de volume du champ électromagnétique est calculée comme quotient de l'énergie du champ, localisée dans l'unité de volume, par le carré de la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide

$$M = \frac{\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}}{v^2}.$$

La quantité de mouvement du champ électromagnétique G, réduite à l'unité de volume, est égale au produit de la masse du champ dans l'unité de volume par la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide

$$G = M_v.$$

Lorsqu'on parle de la propagation d'un champ électromagnétique, il ne faut pas oublier qu'on a affaire au mouvement du flux de la masse du champ et du flux de la quantité du mouvement du champ, en même temps qu'au mouvement du flux d'énergie électromagnétique.

La masse d'un champ électromagnétique, contenue dans l'unité de volume, est infiniment petite par rapport à la masse (à la densité) de toutes les substances connues. Même pour les valeurs maximales, réalisables à l'heure actuelle, des intensités des champs électrique et magnétique, la masse du champ électromagnétique par unité de volume ne dépasse pas de 10^{-20} à 10^{-15} g/cm^3.

Mais malgré ceci l'existence d'une masse dans un champ électromagnétique joue un rôle de principe: elle se manifeste par une certaine inertie des phénomènes se déroulant dans un champ électromagnétique.

Quoique la présence de la masse et de la quantité de mouvement dans un champ électromagnétique ait une valeur de principe, ces notions ne sont pas utilisées dans le cours présent où l'attention a été concentrée sur les relations énergétiques.

CHAPITRE XVII

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE VARIABLE DANS UN MILIEU CONDUCTEUR HOMOGÈNE ET ISOTROPE

§ 466. Equations de Maxwell pour un milieu conducteur. Examinons la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu conducteur à conductivité γ et perméabilité μ. La propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu conducteur comporte certaines particularités, qui seront étudiées au présent chapitre.

Considérons la première et la seconde équations de Maxwell, écrites sous forme complexe, lorsque E et H varient en fonction du temps suivant une loi sinusoïdale

$$\text{rot}\,\dot{\vec{H}} = \gamma\dot{\vec{E}} + j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}$$

et

$$\text{rot}\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}.$$

Dans un milieu conducteur, même à de très hautes fréquences, le produit $\omega\varepsilon$ est nettement inférieur à la conductivité γ. Par conséquent, et avec une précision très suffisante on peut négliger le terme $j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}$ dans la première équation de Maxwell.

A l'heure actuelle, la science ne possède pas de données précises sur la valeur numérique du facteur de permittivité ε_r pour les métaux. Les données dont on dispose indiquent seulement que l'ordre de grandeur de ε_r pour les métaux est le même que pour la majorité des diélectriques (c.-à-d. qu'il varie entre plusieurs unités et plusieurs dizaines). Prenons à titre d'exemple ε_r pour le cuivre, égal à 10 et calculons de combien de fois le courant de conduction dans le cuivre est plus grand que le courant de déplacement pour $\omega = 10^3$ et pour $\omega = 10^8$ *rad/s*. Pour $\omega = 10^3$

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \frac{5{,}6\cdot10^7}{10^3\cdot10\cdot8{,}86\cdot10^{-12}} = 6{,}33\cdot10^{14}.$$

Et pour $\omega = 10^8$

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = 6{,}33\cdot10^9.$$

Autrement dit dans l'exemple numérique considéré, même pour $\omega = 10^8$, le courant de conduction s'avère être $6{,}33\cdot10^9$ plus grand que le courant de déplacement.

Ainsi, la première et la deuxième équations de Maxwell pour un milieu conducteur acquièrent l'aspect suivant

$$\text{rot}\,\dot{\vec{H}} = \gamma\dot{\vec{E}} \tag{17.1}$$

et

$$\text{rot}\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}. \tag{17.2}$$

Ce sont deux équations à deux inconnus $\dot{\vec{E}}$ et $\dot{\vec{H}}$. Résolvons-les en commun. A cette fin prenons le rotationnel de l'équation (17.1)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{H}} - \nabla^2\dot{\vec{H}} = \gamma\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}.$$

Du fait que $\operatorname{div}\dot{\vec{H}} = 0$ on a $\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{H}} = 0$.

Substituons $-j\omega\mu\dot{\vec{H}}$ à $\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}$, conformément à (17.2). Nous obtenons

$$\nabla^2\dot{\vec{H}} = j\omega\gamma\mu\dot{\vec{H}}. \qquad (17.3)$$

L'équation (17.3) est une équation différentielle par rapport à $\dot{\vec{H}}$. Dans le cas général, lorsque $\dot{\vec{H}}$ dépend de l'ensemble des trois coordonnées ou même de deux d'entre elles seulement, la résolution de (17.3) n'est pas un problème simple. Par conséquent, bornons-nous à examiner la résolution de l'équation (17.3) pour un cas particulier, celui d'une onde électromagnétique plane.

§ 467. Onde électromagnétique plane. On appelle par convention *onde électromagnétique plane*, une onde pour laquelle *en tous les points* d'un plan (du plan xoy, par exemple), perpendiculaire à la direction de la propagation de l'onde (à l'axe des z), l'intensité du champ électrique E à l'instant considéré est la même (en grandeur et en direction) et est située dans le plan xoy ; en outre, l'intensité du champ magnétique en tous les points du plan xoy est aussi la même et se trouve également dans ce plan. La fig. 467 sert à illustrer graphiquement la définition donnée de l'onde électromagnétique plane. Cette figure représente, au même instant, les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, dans deux plans parallèles, perpendiculaires à l'axe des z du système de coordonnées cartésien. En tous les points du premier plan, l'intensité du champ électrique (magnétique) est la même en valeur et en direction. En tous les points du deuxième plan, l'intensité du champ électrique (magnétique) est aussi la même en grandeur et en direction, mais elle n'est pas égale à l'intensité du champ dans le premier plan.

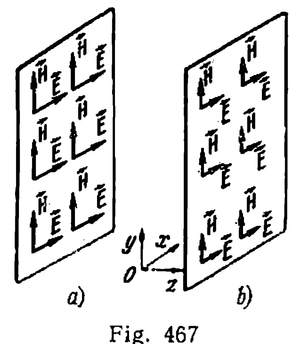


Fig. 467

En vertu de la définition même de l'onde plane

$$\frac{\partial\dot{\vec{H}}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\dot{\vec{H}}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\dot{\vec{E}}}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial\dot{\vec{E}}}{\partial y} = 0.$$

Dans une onde plane $\dot{\vec{E}}$ et $\dot{\vec{H}}$ sont des fonctions d'une seule coordonnée, de la coordonnée z dans le cas considéré.

Tournons les axes de coordonnées de manière que l'axe des y coïncide avec l'intensité du champ magnétique $\vec{\dot{H}}$. Dans ce cas

$$\vec{\dot{H}} = \vec{j}\dot{H}.$$

Ici $\vec{j}$ est vecteur unitaire de l'axe des y du système de coordonnées cartésien. Substituons $\vec{\dot{H}} = \vec{j}\dot{H}$ dans l'équation (17.3) et développons ∇^2.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{j}\dot{H} = j\omega\gamma\mu\vec{j}\dot{H}. \qquad (17.4)$$

Vu que

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial y^2} = 0.$$

Nous aurons

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = j\omega\gamma\mu\dot{H}. \qquad (17.5)$$

Dans cette dernière équation nous avons fait figurer une dérivée simple à la place d'une dérivée partielle. Le passage d'une dérivée partielle à une dérivée simple pour une onde plane est parfaitement admissible, puisque $\dot{H}$ n'est fonction que de la variable z.

L'équation (17.5) est une équation différentielle linéaire de second ordre. Sa solution s'écrit de la manière suivante

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}\,; \qquad (17.6)$$

$\dot{C}_1$ et $\dot{C}_2$ sont ici les constantes d'intégration ; ce sont des complexes, calculées à partir des conditions aux limites et sont différentes pour chaque problème concret.

A son tour le coefficient

$$p = \sqrt{j\omega\gamma\mu}. \qquad (17.7)$$

Si γ est exprimé en unités $\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$, μ en H/m, p est mesuré en $1/m$.

Puisque $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90°}} = e^{j45°} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$, p peut être également écrit comme suit :

$$p = k(1+j), \qquad (17.8)$$

où

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}. \qquad (17.9)$$

L'intensité du champ électrique peut être trouvée à l'aide des équations (17.1) et (17.6). Il résulte de (17.1) que

$$\vec{\dot{E}} = \frac{1}{\gamma}\,\text{rot}\,\vec{\dot{H}}.$$

Trouvons rot $\dot{\vec{H}}$. Conformément à (15.6) on a dans le cas le plus général

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \dot{H}_x & \dot{H}_y & \dot{H}_z\end{vmatrix}.$$

Pour le problème considéré

$$\frac{\partial\dot{H}}{\partial x}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\dot{H}}{\partial y}=0.$$

Par conséquent, l'expression rot $\dot{\vec{H}}$ peut être nettement simplifiée

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \dot{H} & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\left(-\frac{\partial\dot{H}}{\partial z}\right). \tag{17.10}$$

De ce fait

$$\dot{\vec{E}}=\vec{i}\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz}\right). \tag{17.10'}$$

La dérivée

$$\frac{d\dot{H}}{dz}=p\,[\dot{C}_1e^{pz}-\dot{C}_2e^{-pz}]. \tag{17.11}$$

L'expression (17.10′) montre que l'intensité du champ électrique dans une onde plane et pour la disposition choisie des coordonnées est orientée le long de l'axe des x, ce qui est confirmé par la présence du vecteur unitaire de l'axe des x (du vecteur unitaire $\vec{i}$). Ainsi dans une onde électromagnétique plane il existe entre $\dot{\vec{E}}$ et $\dot{\vec{H}}$ *un décalage dans l'espace de* 90° ($\dot{\vec{E}}$ est dirigé suivant l'axe des x et $\dot{\vec{H}}$ suivant l'axe des y).

Le quotient de p par γ, appelé impédance caractéristique, est désigné par Z_C :

$$Z_C=\frac{p}{\gamma}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\,e^{j45^\circ}. \tag{17.12}$$

L'impédance caractéristique est mesurée en *ohms*. Elle dépend des propriétés du milieu (de γ et μ) et de la fréquence angulaire ω. Conformément à (17.10′) et (17.11) la projection de $\dot{\vec{E}}$ sur l'axe des x est

$$\dot{E}=\dot{E}_{inc}+\dot{E}_{réf}\,;$$

où

$$\dot{E}_{inc}=Z_C\dot{C}_2e^{-pz} \quad \text{et} \quad \dot{E}_{réf}=-Z_C\dot{C}_1e^{pz}.$$

La projection de $\dot{\vec{H}}$ sur l'axe des y, conformément à (17.6), est

$$\dot{H} = \dot{H}_{inc} + \dot{H}_{réf}$$

où

$$\dot{H}_{inc} = \dot{C}_2 e^{-pz} \text{ et } \dot{H}_{réf} = C_1 e^{pz}.$$

Les composantes de l'onde incidente $\dot{E}_{inc}$ et $\dot{H}_{inc}$ donnent le vecteur de Poynting $\vec{S}_{inc}$ (fig. 468, *a*). Ce vecteur est dirigé suivant le sens positif de l'axe des z. Par conséquent, l'onde réfléchie transporte une énergie et la direction du mouvement de cette énergie coïncide avec le sens positif de l'axe des z.

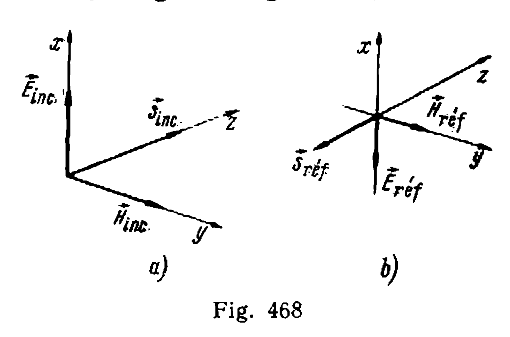


Fig. 468

Les composantes de l'onde réfléchie $\dot{E}_{réf}$ et $\dot{H}_{réf}$ donnent le vecteur de Poynting $\vec{S}_{réf}$ (voir fig. 468, *b*). Ce dernier est dirigé dans le sens négatif de l'axe des z. Ceci indique que l'onde réfléchie porte une énergie et que cette énergie se déplace dans le sens négatif de l'axe des z.

L'impédance caractéristique Z_C peut être interprétée comme le rapport $\frac{\dot{E}_{inc}}{\dot{H}_{inc}}$*. Du fait que l'impédance caractéristique est un nombre complexe (voir 17.12), le décalage dans *le temps* entre $\dot{E}_{inc}$ et $\dot{E}_{réf}$ au même point du champ est égal à 45°.

§ 468. Propagation d'une onde électromagnétique plane dans un demi-espace homogène et conducteur. Examinons le problème de la propagation d'une onde électromagnétique plane dans un milieu homogène conducteur, s'étendant théoriquement dans l'infini (fig. 469).

Une onde électromagnétique en passant du diélectrique dans un milieu conducteur se propage dans ce dernier. Du fait que ce milieu s'étend théoriquement à l'infini et que l'onde incidente ne rencontre à l'intérieur du milieu conducteur aucun obstacle qui aurait pu perturber sa propagation, il n'existe pas d'onde réfléchie dans le cas examiné.

En présence de l'onde incidente seule on a

$$\dot{H} = \dot{C}_2 e^{-pz} \quad \text{et} \quad \dot{E} = Z_C \dot{C}_2 e^{-pz}.$$

La constante d'intégration $\dot{C}_2$ est trouvée à partir des conditions aux limites. Si on désigne par $\dot{H}_a = H_a e_a^{j\psi}$ l'intensité du champ magnétique à la surface du milieu conducteur, on a pour $z = 0$

$$\dot{C}_2 = \dot{H}_a.$$

* Le rapport $\dot{E}_{réf}$ à $-\dot{H}_{réf}$ est de même égal à Z_C.

Par conséquent, et en tenant compte de (17.8)

$$\dot{H} = \dot{H}_a e^{-kz} e^{-jkz} e_a^{j\psi}. \qquad (17.13)$$

A son tour

$$\dot{E} = H_a e^{-kz} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{-jkz} e_a^{j\psi} e^{j45°}. \qquad (17.14)$$

On peut écrire maintenant les expressions pour les valeurs instantanées de H et de E. A cette fin il faut multiplier les deuxièmes membres de (17.13) et (17.14) par $e^{j\omega t}$ et prendre les parties imaginaires des produits ainsi obtenus.

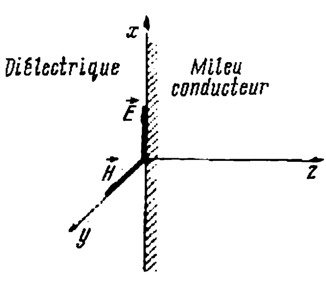


Fig. 469

Nous avons

$$H = H_a e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a) \qquad (17.15)$$

et

$$E = H_a \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a + 45°). \qquad (17.16)$$

Analysons les expressions obtenues. L'amplitude H est égale à $H_a e^{-kz}$. L'amplitude E est égale à $H_a \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{-kz}$. Au fur et à mesure que z croît, le facteur e^{-kz} diminue suivant une loi exponentielle. Par conséquent, au fur et à mesure de la pénétration de l'onde électromagnétique dans un milieu conducteur, les amplitudes de E et de H diminuent suivant une loi exponentielle. On voit sur la fig. 470 les enveloppes des amplitudes H, construites conformément à l'équation $H_a e^{-kz}$. La valeur instantanée de H et de E est déterminée par l'argument du sinus. L'argument du sinus dans l'expression (17.15), par exemple, dépend de z et de ωt. Si on prend $\omega t = \text{const}$ et si on part de la courbe des valeurs instantanées de H en fonction de z, on obtient la courbe *1* de la fig. 470 pour $\omega t = \psi_a = 0$ et la courbe *2* pour $\omega t = \psi_a = 90°$.

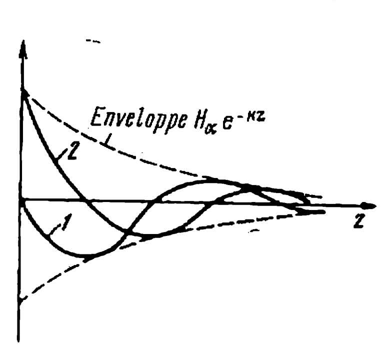


Fig. 470

Afin de caractériser la vitesse avec laquelle décroît l'amplitude d'une onde incidente au fur et à mesure de la pénétration de cette onde dans un milieu conducteur, on fait appel à la notion de la profondeur de pénétration.

§ 469. Profondeur de pénétration et longueur d'onde. On appelle *profondeur de pénétration* Δ la distance le long de la direction de la propagation de l'onde (le long de l'axe des z), pour laquelle l'amplitude de

l'onde incidente E (H) diminue de $e = 2{,}7183$ fois. L'équation pour le calcul de la profondeur de pénétration s'écrit comme suit

$$e^{-k\Delta} = e^{-1}.$$

Il en découle que $k\Delta = 1$ ou

$$\Delta = \frac{1}{k}. \qquad (17.17)$$

La profondeur de pénétration dépend des propriétés du milieu conducteur (de γ et de μ) et de la fréquence ω. Ainsi, si l'onde électromagnétique a une fréquence $f = 5\,000$ *Hz* et pénètre dans un milieu conducteur pour lequel $\gamma = 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ et $\mu_2 = 10^3$ *, on a

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 5000 \cdot 10^3 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^7}{2}} = 14\,100\ 1/m.$$

La profondeur de pénétration étant $\Delta = \frac{1}{k} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ *m*, autrement dit même sur une distance très petite, égale à 0,007 *cm* seulement, les amplitudes H et E ont diminué de 2,7183 fois.

On entend par *longueur d'onde* λ dans un milieu conducteur la distance suivant la direction de la propagation de cette onde (le long de l'axe des z), pour laquelle la phase des oscillations varie de 2π. La longueur d'onde est calculée à partir de l'équation $\lambda k = 2\pi$, donc

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \qquad (17.18)$$

Pour l'exemple numérique examiné plus haut

$$\lambda = \frac{2\pi}{14\,100} \approx 0{,}000445\ m.$$

On utilise quelquefois la notion de la vitesse de phase de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu conducteur. On appelle *vitesse de phase* la vitesse avec laquelle il faudrait se déplacer le long de l'axe des z pour que l'oscillation conserve toujours la même phase. La phase de l'oscillation est déterminée par l'expression

$$(\omega t - kz + \psi_a).$$

La dérivée d'une grandeur constante étant nulle, on a

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kz + \psi_a) = 0.$$

Ou

$$\omega - k\frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = v_{phase}; \quad v_{phase} = \frac{\omega}{k}. \qquad (17.19)$$

Pour l'exemple numérique considéré

$$v_{phase} = \frac{2\pi \cdot 5000}{14\,100} \approx 2{,}25\ m/s.$$

* Nous supposons que μ_r est indépendante de H.

§ 470. Effet magnétique pelliculaire. A titre de deuxième exemple de propagation des ondes électromagnétiques planes dans un milieu conducteur, examinons le champ existant dans une tôle d'acier, du fait du passage le long de cette tôle d'un flux magnétique variable $\dot{\Phi}_m$. La tôle (fig. 471) a une épaisseur $2a$, une hauteur h ($h \gg 2a$) et une très grande longueur dans le sens perpendiculaire à la figure. La densité moyenne du flux magnétique suivant la coupe de la tôle est

$$\dot{B}_{moy} = \frac{\dot{\Phi}_m}{2ah}.$$

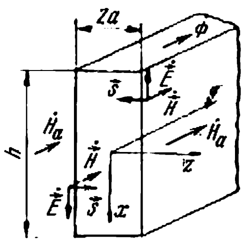


Fig. 471

Le problème consiste à rechercher les lois de variation de $\dot{H}$ et de $\dot{E}$ dans la coupe de la tôle. En vertu de la symétrie les intensités du champ magnétique sont les mêmes sur les surfaces gauche et droite de la tôle. Désignons-les par $\dot{H}_a$ et supposons qu'elles soient connues (nous les exprimerons par la suite en fonction de $\dot{B}_{moy}$).

L'épaisseur de la tôle $2a$ étant nettement inférieure à sa hauteur h, on peut négliger, en première approximation, l'effet perturbateur des bords de la tôle et supposer qu'une onde électromagnétique plane pénètre des deux côtés dans cette tôle.

Disposons les coordonnées du système cartésien conformément à la fig. 471. Posons comme auparavant $\vec{\dot{H}} = \vec{j}\dot{H}$. La solution générale pour $\dot{H}$ s'écrit comme suit:

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}.$$

Trouvons les constantes d'intégration à partir des conditions aux limites. Pour $z = -a$, c'est-à-dire pour les points se trouvant sur le côté gauche de la tôle nous avons

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{-pa} + \dot{C}_2 e^{pa}; \tag{17.20}$$

pour $z = +a$

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{pa} + \dot{C}_2 e^{-pa}. \tag{17.21}$$

La résolution en commun de (17.20) et (17.21) par rapport à $\dot{C}_1$ et $\dot{C}_2$ donne:

$$\dot{C}_1 - \dot{C}_2 = \frac{\dot{H}_a}{e^{pa} + e^{-pa}} = \frac{\dot{H}_a}{2\operatorname{ch} pa}.$$

Par conséquent, en un point arbitraire

$$\dot{H} = \frac{\dot{H}_a}{2\operatorname{ch} pa}(e^{pz} + e^{-pz}) = \dot{H}_a \frac{\operatorname{ch} pz}{\operatorname{ch} pa}. \tag{17.22}$$

L'intensité du champ électrique

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i}\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz}\right) = -\vec{i}\left(\frac{p}{\gamma}\dot{H}_a\frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa}\right) = -\vec{i}\dot{E}.$$

Ici

$$\dot{E} = \frac{p}{\gamma}\dot{H}_a\frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa}. \qquad (17.23)$$

Pour $z = +a$, $\dot{\vec{E}}$ est dirigé vers le naut (le long de l'axe des $-x$). Pour $z = -a$, $\dot{\vec{E}}$ est dirigé vers le bas (le long de l'axe des $+x$, fig. 471). Le vecteur de Poynting est dirigé vers le plan médian de la tôle (vers l'intérieur de la tôle).

Nous avons indiqué dans la deuxième partie de ce cours que les courants engendrés du fait de passage dans une tôle d'un flux magnétique variable sont appelés courants de Foucault.

Le vecteur de la densité du courant de Foucault $\dot{\vec{\delta}} = \gamma\dot{\vec{E}}$ en un point quelconque de la tôle est colinéaire au vecteur $\dot{\vec{E}}$ au même point.

Induction magnétique $\dot{B}$ en un point arbitraire quelconque est

$$\dot{B} = \mu\dot{H} = \frac{\mu\dot{H}_a \operatorname{ch} pz}{\operatorname{ch} pa}. \qquad (17.24)$$

Valeur moyenne de l'induction magnétique dans la tôle

$$\dot{B}_{moy} = \frac{1}{a}\int_0^a \dot{B}\,dz = \frac{\mu\dot{H}_a \operatorname{sh} pa}{ap \operatorname{ch} pa} = \frac{\mu\dot{H}_a \operatorname{th} pa}{ap}. \qquad (17.25)$$

Si on considère $\dot{B}_{moy}$ connue et égale à $\frac{\dot{\Phi}_m}{2ah}$, on peut trouver à partir de (17.25) l'intensité du champ $\dot{H}_a$ existant à la surface de la tôle.

$$\dot{H}_a = \frac{ap\dot{B}_{moy}}{\mu \operatorname{th} pa}. \qquad (17.26)$$

Remarquons que l'argument $pa = ka + jka$ est une quantité complexe et que th pa est la tangente hyperbolique de cet argument complexe: par conséquent, elle est également complexe

$$\operatorname{th} pa = \operatorname{th}(ka + jka) = \frac{\operatorname{sh} 2ka + j\sin 2ka}{\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka}. \qquad (17.27)$$

Le rapport de la valeur moyenne de l'induction magnétique B_{moy} suivant la coupe de la tôle, à l'intensité du champ $\dot{H}_a$ à la surface de cette tôle est appelé *perméabilité complexe* et est désigné par $\widetilde{\mu}$

$$\widetilde{\mu} = \frac{\mu . \operatorname{th} pa}{ap} \; (\widetilde{\mu} = \mu_0\widetilde{\mu}_r).$$

Elle dépend de μ_r, de la fréquence ω et de l'épaisseur de la tôle. Pour de grandes valeurs de l'argument $2ka$ sh $2\,ka \approx$ ch $2\,ka$ et ces fonctions ont une valeur nettement plus grande que 1. Par conséquent, pour de grandes valeurs de $2ka$

$$\operatorname{th} pa \approx \frac{\operatorname{sh} 2ka}{\operatorname{ch} 2ka} \approx 1.$$

Et la perméabilité complexe $\tilde{\mu}_r$ devient

$$\tilde{\mu}_r = \frac{\mu_r}{pa}.$$

Ainsi, par exemple, pour une épaisseur de la tôle $2a = 0{,}015\ cm$, $\mu_r = 20\,000$,

$$\gamma = 1{,}8 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \cdot m^{-1} \quad \text{et} \quad f = 50\,000\,Hz;$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}} = 84\,200; \quad p = 84\,200\sqrt{2}\,e^{j45^\circ}; \quad ka = 6{,}31;$$

$$2ka = 12{,}62; \ \operatorname{th} pa \approx \frac{\operatorname{sh} 12{,}62}{\operatorname{ch} 12{,}62} \approx 1.$$

Par conséquent,

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu_r}{pa} = \frac{20\,000}{84\,200\sqrt{2}\,e^{j45^\circ} \cdot 0{,}000075} = 2250e^{-j45^\circ}.$$

L'intensité du champ dans le plan médian de la tôle pour ($z = 0$) est égale à $\dot{H}_{z=0} = \frac{\dot{H}_a}{ch_{pa}}$. Le rapport de l'intensité du champ au bord de la tôle (pour $z = a$) à l'intensité du champ dans le plan médian de cette tôle est

$$\frac{\dot{H}_a}{\dot{H}_{z=0}} \operatorname{ch} pa. \tag{17.28}$$

Des quantités complexes figurent dans les premier et second membres de (17.28). Le module de ch pa montre de combien de fois le module de $\dot{H}_a$ est plus grand que le module de $\dot{H}_{z=0}$. Trouvons le module de ch pa. A cette fin écrivons les quantités complexes conjuguées

$$\operatorname{ch}(ka + j\,ka) = \operatorname{ch} ka \cos ka + j \operatorname{sh} ka \sin ka;$$

$$\operatorname{ch}(ka - j\,ka) = \operatorname{ch} ka \cos ka - j \operatorname{sh} ka \sin ka.$$

Le produit des quantités complexes conjuguées est égal au carré du module. Par conséquent,

$$|\operatorname{ch} pa|^2 = \operatorname{ch}(ka + j\,ka)\operatorname{ch}(ka - j\,ka) = \frac{1}{2}[\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka]^*.$$

* Du fait que $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$.

Ainsi

$$|\operatorname{ch} pa| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka}{2}}. \qquad (17.29)$$

Examinons un exemple numérique. Soit $\mu_r = 100$; $f = 500$ *Hz*; $\gamma = 10^7\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. Dans ces conditions $k = 1410$ $1/m$.

Trouvons le rapport de l'intensité du champ dans le plan médian à l'intensité du champ à la surface de la tôle, lorsque l'épaisseur de cette dernière

$$2a = 1\ mm;\ 2\ mm;\ 4\ mm;$$

$$2ka = 1{,}41;\ 2{,}82;\ 5{,}64;$$

$$\frac{1}{|\operatorname{ch} pa|} = 0{,}91;\ 0{,}52;\ 0{,}1$$

Ainsi, l'intensité du champ dans le plan médian de la tôle peut être nettement inférieure à l'intensité du champ à la surface de cette dernière.

Le phénomène de distribution inégale du champ suivant la coupe d'un corps conducteur, dû à l'affaiblissement de l'onde électromagnétique, est appelé *effet pelliculaire*. Si c'est un flux magnétique qui est dirigé le long de la tôle, on appelle souvent cet effet pelliculaire magnétique et s'il s'agit d'un courant alternatif, dirigé le long d'une barre plate, l'effet pelliculaire se manifestant dans ces conditions est habituellement appelé effet pelliculaire électrique.

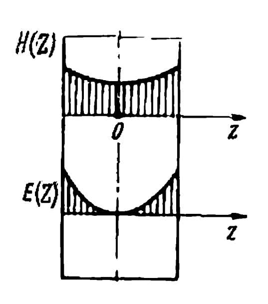


Fig. 472

La nature de ces deux effets est identique. Et l'adjectif complémentaire utilisé (magnétique ou électrique) n'indique que la nature du phénomène (flux ou courant) dont il s'agit.

Deux courbes ont été construites sur la fig. 472. La première d'entre elles donne l'allure de variation du module de l'intensité du champ magnétique, en fonction de z. Dans le plan médian de la tôle H ne s'annule pas, puisque ch $0 \neq 0$. La courbe $H(z)$ est construite conformément à l'équation (17.22). La deuxième courbe de la fig. 472 donne le caractère de variation du module de l'intensité du champ électrique en fonction de z. Cette courbe est construite d'après (17.23); sh $pz = 0$ et, par conséquent, la courbe passe par zéro pour $z = 0$. La courbe de la densité des courants de Foucault $\dot{\delta} = \gamma \dot{E}$ reproduit qualitativement la courbe $\dot{E}$ en fonction de z (elle n'en diffère que par son échelle).

§ 471. Passage d'un courant alternatif dans une barre plate (effet électrique pelliculaire). Examinons un problème similaire au précédent. Supposons que c'est un courant alternatif et non un flux magnétique alternatif qui circule le long de la barre.

Le sens positif choisi par le courant et la disposition des axes du système des coordonnées cartésien sont indiqués sur la fig. 473.

Conformément à la loi du courant total, trouvons l'intensité du champ magnétique sur la surface de la barre. Dans le problème considéré, de même que dans le problème précédent, $h \gg 2a$; on peut donc, en calculant $\oint \vec{H}\,\vec{dl}$, négliger en première approximation la composante de l'intégrale, orientée le long des côtés horizontaux de largeur $2a$.

On a alors, en désignant l'intensité du champ sur la surface de la barre par $\dot{H}_a$

$$\dot{H}_a 2h = \dot{I}.$$

D'où

$$\dot{H}_a = \frac{\dot{I}}{2h}.$$

Fig. 473

En écrivant les équations de calcul des constantes d'intégration, n'oublions pas qu'à gauche de la barre l'intensité est orientée suivant le sens positif de l'axe des y et qu'à sa droite elle est dirigée dans le sens négatif du même axe.

Solution générale pour l'onde plane est

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}.$$

Constantes d'intégration: pour $z = -a$

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{-pa} + \dot{C}_2 e^{pa},$$

et pour $z = a$

$$-\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{pa} + \dot{C}_2 e^{-pa}.$$

La résolution en commun de ces dernières équations donne

$$\dot{C}_1 = -\dot{C}_2 = \frac{-\dot{H}_a}{2\,\mathrm{sh}\,pa}.$$

Substituons $\dot{C}_1$ et $\dot{C}_2$ dans la solution générale. Nous aurons

$$\dot{H} = -\dot{H}_a \frac{\mathrm{sh}\,pz}{\mathrm{sh}\,pa} = -\frac{\dot{I}}{2h}\frac{\mathrm{sh}\,pz}{\mathrm{sh}\,pa}.$$

L'intensité du champ électrique $\dot{E}$ est dirigée suivant l'axe des x, conformément à ce qui a été établi précédemment elle est

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz}$$

ou

$$\dot{E} = \frac{p}{\gamma}\frac{\dot{I}}{2h}\frac{\mathrm{ch}\,pz}{\mathrm{sh}\,pa}.$$

La densité du courant en un point quelconque de la barre est

$$\dot{\delta} = \gamma \dot{E} = p \frac{\dot{I}}{2h} \frac{\operatorname{ch} pz}{2h \operatorname{sh} pa}.$$

La densité du courant aura sa valeur minimale dans le plan médian de la barre, pour $z = 0$. Ce minimum est

$$\dot{\delta}_{z=0} = p \frac{\dot{I}}{2h} \frac{1}{\operatorname{sh} pa}.$$

La courbe de variation du module $\dot{H}$ en fonction de z est tracée sur la fig. 474. Une deuxième courbe, donnant la valeur du module de la densité du courant en fonction de z, figure sur la même figure. Si on compare les deux courbes de la fig. 474 avec celles de la fig. 472 on peut constater que les courbes de variation de E et de H lors de l'effet pelliculaire électrique et de l'effet pelliculaire magnétique ont pour ainsi dire changé de place.

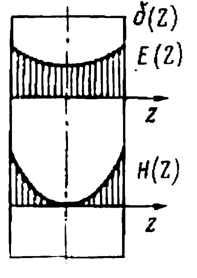


Fig. 474

L'effet pelliculaire est d'autant plus prononcé, c'est-à-dire que la répartition de la densité du courant suivant la coupe de la barre est d'autant plus irrégulière, que l'épaisseur de la barre est grande et que les valeurs de γ, μ et ω sont élevées. Et lorsque la fréquence angulaire ω est très haute, il peut arriver que le courant ne circule que dans la couche superficielle, très fine, de la barre.

Pour des barres peu épaisses et des fréquences relativement basses, l'effet pelliculaire ne se manifeste que très faiblement.

Examinons un exemple numérique. Soit une barre en cuivre d'une hauteur $h = 2$ *cm* et d'une épaisseur $2a = 0{,}1$ *cm*; pour cette barre

$$\gamma = 5{,}6 \cdot 10^7 \, \Omega^{-1} \cdot m^{-1}; \quad \mu_r = 1.$$

Elle est parcourue par un courant alternatif $I = 10\,A$, dont la fréquence angulaire est $\omega = 10^5$ *rad/s*.

On demande de calculer de combien de fois la densité du courant sur la surface de la barre est plus grande, que la densité du courant en cas d'une répartition uniforme du courant (en l'absence de l'effet pelliculaire).

Calculons

$$k = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = 1870 \; 1/m; \quad ka = 1870 \cdot 0{,}0005 = 0{,}935; \quad 2ka = 1{,}87.$$

La densité du courant sur la surface de la barre

$$\dot{\delta} = p \frac{\dot{I}}{2h} \frac{1}{\operatorname{th} pa},$$

$$\operatorname{th} pa = \frac{\operatorname{sh} 2ka + j \sin 2ka}{\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka} = \frac{3{,}167 + j0{,}956}{3{,}32 - 0{,}292} = 1{,}09 e^{j16°25'}.$$

Par conséquent,

$$\dot{\delta}_{z=a}=1870\sqrt{2}\,e^{j45°}\cdot\frac{10}{2\cdot 0{,}02\cdot 1{,}09\cdot e^{j16°25'}}=60{,}6\cdot 10^4 e^{j28°35'}\ A/m^2.$$

Densité du courant en cas de répartition uniforme est

$$\delta=\frac{I}{h\cdot 2a}=-\frac{10}{0{,}02\cdot 0{,}001}=50\cdot 10^4\ A/m^2.$$

Ainsi, dans l'exemple considéré la densité du courant sur la surface de la barre n'est que de 20% $\left(\frac{60{,}6}{50}\approx 1{,}2\right)$ plus grande que la densité du courant en cas de répartition uniforme.

§ 472. **Application du théorème d'Oumov — Poynting au calcul de la résistance active et de réactance inductive interne des conducteurs en courant alternatif.** Le calcul de la résistance active et de la réactance inductive interne des conducteurs en courant alternatif se fait souvent a l'aide du théorème d'Oumov — Poynting, écrite sous sa forme complexe. A cette fin on calcule le flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale d'un conducteur sur une longueur de 1 m, on divise le résultat obtenu par le carré du courant circulant dans le conducteur et on obtient ainsi la valeur complexe de la résistance du conducteur par unité de longueur (pour 1 m).

En effet

$$-\oint(\vec{\dot{E}}\times\vec{\overset{*}{H}})\,\vec{ds}=P+jQ=I^2R+jI^2X=I^2Z$$

et

$$Z=R+jX=\frac{-\oint(\vec{\dot{E}}\times\vec{\overset{*}{H}})\,\vec{ds}}{I^2}.$$

À titre d'exemple, calculons la résistance active et la réactance inductive interne d'une barre rectangulaire de 1 m de longueur. L'énergie pénètre dans la barre de deux côtés. La surface des deux côtés de la barre pour une longueur de 1 m, est égale à $2h\cdot 1$.

$$Z=R+jX=\frac{\dot{E}\overset{*}{H}\cdot 2h\cdot 1}{I^2}=\frac{\left(\frac{I}{2h}\right)^2\frac{p}{\gamma}\frac{1}{\operatorname{th}pa}}{I^2}\,2h=\frac{p}{\gamma\cdot 2h\operatorname{th}pa}$$

ou

$$Z=\frac{1870\sqrt{2}\,e^{j45°}}{5{,}6\cdot 10^7\cdot 0{,}04\cdot 1{,}09e^{j16°20'}}=9{,}5\cdot 10^{-4}+j5{,}16\cdot 10^{-4}\ \Omega/m.$$

Par conséquent, la résistance active de conducteur, par mètre de longueur de la barre, est égale à $9{,}5\cdot 10^{-4}\ \Omega$.

À titre de comparaison rappelons que la résistance ohmique par unité de longueur d'une barre plate, c.-à-d. sa résistance en courant continu, est égale à $8{,}92\cdot 10^{-4}\ \Omega$. Ainsi, en vertu de l'effet pelliculaire, la résis-

tance active est passée de $8{,}92 \cdot 10^{-4}$ à $9{,}5 \cdot 10^{-4}\ \Omega$, c'est-à-dire qu'elle a augmenté de 6%. Du fait que la barre est relativement mince et que la fréquence est comparativement basse, la résistance active de la barre, dans l'exemple numérique considéré, n'est que légèrement supérieure à sa résistance ohmique. Dans d'autres cas, cette augmentation peut être nettement plus grande.

§ 473. **Effet de proximité.** Jusqu'ici nous avons examiné la circulation d'un courant alternatif dans un conducteur isolé (seul). Si à proximité d'un conducteur, dont on étudie le champ intérieur, il existe un autre conducteur parcouru par un courant, ce deuxième conducteur influence, naturellement, l'image du champ dans le premier conducteur. Du fait de cette influence, la résistance active d'un tel conducteur augmente en général par rapport à la résistance active d'un conducteur isolé. L'influence des conducteurs, se trouvant à proximité et parcourus par un courant, sur la résistance complexe du conducteur examiné est appelée *effet de proximité*. Examinons l'effet de proximité pour le cas concret de deux barres plates, situées à proximité l'une de l'autre (fig. 475). L'une de ces barres sert de conducteur d'aller et la deuxième est le conducteur de retour.

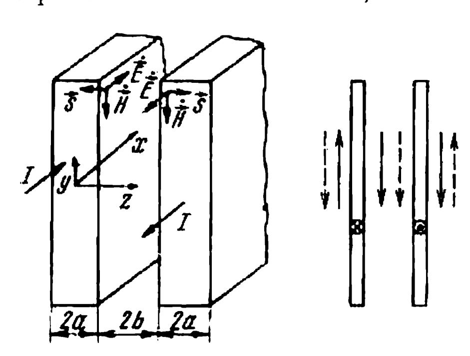


Fig. 475

Si la distance $2b$ entre ces barres est du même ordre que l'épaisseur des barres ($2a$) tout en étant nettement inférieure à la hauteur h, on peut démontrer avec une précision suffisante que l'intensité du champ magnétique dans l'espace entre les barres est deux fois plus grande que l'intensité du champ magnétique, dû à une seule barre, à proximité immédiate de cette dernière. A l'extérieur des barres, par contre, l'intensité du champ magnétique est nulle.

Pour s'en assurer, ayons recours au principe de superposition.

Les flèches en traits pleins de la fig. 475 représentent l'intensité du champ, dû à la barre gauche, et les flèches en pointillé celle du champ de la barre droite. Dans l'espace entre les barres les intensités s'ajoutent et à l'extérieur de ces dernières ces intensités se déduisent. Il en résulte que l'intensité du champ dans l'espace entre les barres est $H = 2 \cdot \frac{I}{2h} = \frac{I}{h}$ et qu'à l'extérieur des barres l'intensité du champ magnétique est nulle. Trouvons les constantes d'intégration dans l'expression $H = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}$.

Pour $z = -a \quad 0 = C_1 e^{-pa} + \dot{C}_2 e^{pa}$.

Pour $z = a \quad -\frac{\dot{I}}{h} = \dot{C}_1 e^{pa} + \dot{C}_2 e^{-pa}$.

D'où

$$\dot{C}_1 = \frac{-\dot{I}e^{pa}}{h\cdot 2\,\mathrm{sh}\,2pa} \quad \text{et} \quad \dot{C}_2 = \frac{\dot{I}}{h}\,\frac{e^{-pa}}{2\,\mathrm{sh}\,2pa}.$$

Par conséquent,

$$\dot{H} = \frac{-\dot{I}}{h\cdot 2\,\mathrm{sh}\,2pa}\left(e^{pa+pz} - e^{-pa-pz}\right) = \frac{-\dot{I}\,\mathrm{sh}\,p\,(a+z)}{h\,\mathrm{sh}\,2pa}$$

et l'intensité du champ électrique,

$$\dot{E} = \frac{p}{\gamma}\,\frac{\dot{I}}{h}\,\frac{\mathrm{ch}\,p\,(a+z)}{\mathrm{sh}\,2pa}.$$

Si on confère à z des valeurs allant de $-a$ à a, on peut en partant des expressions données ci-dessus, construire les courbes de variation des modules de $\dot{E}$ et de $\dot{H}$ en fonction de z. Ces courbes sont représentées qualitativement sur la fig. 476. Les courbes pour la barre de droite sont construites en tenant compte de la symétrie du champ. Si on néglige l'effet perturbateur des extrémités, l'onde électromagnétique pénètre dans chacune des barres uniquement par leurs surfaces orientées l'une vers l'autre. L'onde n'entre pas par les surfaces extérieures, puisque pour elles $H = 0$.

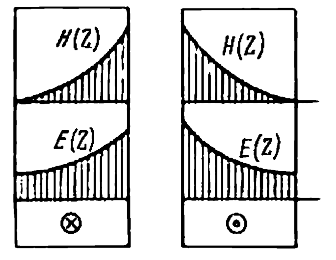


Fig. 476

Résistance complexe d'une barre par unité de longueur

$$Z_{dans\ une\ barre} = \frac{\dot{E}\overset{*}{\dot{H}}h\cdot 1}{I^2} = \frac{p}{\gamma h\,\mathrm{th}\,2pa}.$$

Examinons un exemple numérique. Soit un courant de 10 A circulant le long des deux barres identiques à celle auxquelles nous avons eu affaire au paragraphe précédent ($h = 2$ cm, $2a = 0{,}1$ cm). L'une des barres est le conducteur d'aller, et le deuxième, le conducteur de retour. Calculons l'impédance complexe d'une des barres par unité de longueur, en tenant compte de l'effet de proximité, et comparons-la à l'impédance d'une barre seule (lorsqu'il n'existe pas d'effet de proximité) :

$$\mathrm{th}\,2pa = \frac{\mathrm{sh}\,3{,}74 + j\sin 214^\circ}{\mathrm{ch}\,3{,}74 + \cos 214^\circ} = 1{,}04e^{-j1^\circ 30'}.$$

Par conséquent, 168

$$Z_{inter} = \frac{p}{\gamma h\,\mathrm{th}\,2pa} = \frac{1870\cdot\sqrt{2}\cdot e^{j45^\circ}}{5{,}6\cdot 10^7\cdot 0{,}02\cdot 1{,}04\cdot e^{-j1^\circ 30'}} = 22{,}5\cdot 10^{-4}\cdot e^{j46^\circ 30'}.$$

$$R = 15{,}7\cdot 10^{-4}\,\Omega/m;\quad X_{inter} = 16{,}34\cdot 10^{-4}\,\Omega/m.$$

Ainsi, l'influence de la deuxième barre sur le champ existant dans la première barre a donné lieu à un accroissement de la résistance active de la barre de $9{,}5\cdot 10^{-4}$ à $15{,}7\cdot 10^{-4}$ Ω/m.

Pour calculer l'impédance complexe d'une unité de longueur d'une boucle formée par deux barres, il faut ajouter à la résistance propre des barres elles-mêmes la réactance inductive, due au flux magnétique traversant l'espace entre les barres.

Cette dernière est

$$X_{exter} = \omega L_{exter} = \omega \frac{\Phi_{exter}}{I} = \frac{\omega \mu_0 H \cdot 2b \cdot 1}{I} = \frac{\mu_0 \omega 2b}{h}.$$

La valeur complexe de l'impédance totale par unité de longueur de la boucle est

$$Z_{tot} = 2R_{inter} + j\,(2X_{inter} + X_{exter}).$$

A titre d'exemple, trouvons la valeur complexe de l'impédance totale par mètre de longueur d'une ligne, constituée par les deux barres du problème précédent, lorsque $2b = 0{,}4$ cm:

$$X_{exter} = \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{5} \cdot 0{,}004}{0{,}02} = 2{,}51 \cdot 10^{-2}\ \Omega/m.$$

$$Z_{tot} = 3{,}14 \cdot 10^{-3} + j28{,}4 \cdot 10^{-3}\ \Omega/m.$$

CHAPITRE XVIII

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN DIÉLECTRIQUE HOMOGÈNE ET ISOTROPE

§ 474. Propagation des ondes électromagnétiques dans un diélectrique homogène et isotrope. La conductivité d'un diélectrique parfait est nulle. Par conséquent, dans la première équation de Maxwell (16.1), le premier terme du deuxième membre ($\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$) s'annule et l'équation de Maxwell pour un diélectrique prend la forme suivante:

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}, \tag{18.1}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}. \tag{18.2}$$

$$\operatorname{div}\dot{\vec{B}} = 0 \text{ et } \operatorname{div}\dot{\vec{E}} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}.$$

Puisque nous allons examiner des diélectriques homogènes et isotropes, μ = const et la condition div $\mu\dot{\vec{H}} = 0$ est équivalente à la condition div $\dot{\vec{H}} = 0$.

Procédons à la résolution en commun des équations (18.1) et (18.2). A cette fin prenons le rotationnel de l'équation (18.1). Nous obtenons

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{H}} - \nabla^2\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}.$$

Puisque div $\dot{\vec{H}} = 0$ on a grad div $\dot{\vec{H}} = 0$. A son tour rot $\dot{\vec{E}}$ en vertu de la deuxième équation de Maxwell est égal à $-j\omega\mu\dot{\vec{H}}$. Par conséquent,

$$-\nabla^2\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon(-j\omega\mu\dot{\vec{H}})$$

ou

$$\nabla^2\dot{\vec{H}} = -\omega^2\varepsilon\mu\dot{\vec{H}}. \tag{18.3'}$$

Le produit $\varepsilon\mu$ est mesuré en s^2/m^2:

$$[\varepsilon][\mu] = \frac{A\cdot s\cdot V\cdot s}{V\cdot m\cdot A\cdot m} = s^2/m^2,$$

c.-à-d. $\varepsilon\mu$ a les dimensions inverses aux dimensions du carré de la vitesse et, par conséquent, on peut écrire $\varepsilon\mu = \frac{1}{v^2}$. Après substitution de cette

désignation dans l'équation (18.3′) celle-ci prend la forme suivante:

$$\nabla^2\dot{\vec{H}} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2\dot{\vec{H}}. \qquad (18.3)$$

Examinons maintenant la propagation d'une onde électromagnétique plane. Pour une onde plane se propageant dans la direction de l'axe des z, on peut admettre conformément à ce qui a été dit précédemment, que l'intensité du champ magnétique soit dirigée le long de l'axe des y, autrement dit que

$$\dot{\vec{H}} = \vec{j}\dot{H}. \qquad (18.4)$$

En d'autres termes, pour une onde plane $\dot{H}$ dépend seulement de la coordonnée z et ne dépend pas des coordonnées x et y et, par conséquent, l'équation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{j}\dot{H} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2\vec{j}\dot{H}$$

prend la forme suivante:

$$\frac{d^2\dot{H}}{dz^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2\dot{H}. \qquad (18.5)$$

L'équation caractéristique correspondante est $p^2 = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2$; les racines de cette équation étant $p_1 = j\frac{\omega}{v}$ et $p_2 = -j\frac{\omega}{v}$. Solution générale de l'équation (18.5) est

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z} + \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z}; \qquad (18.6)$$

$\dot{C}_1$ et $\dot{C}_2$ sont des coefficients complexes, dépendant des conditions aux limites. Comme tout nombre complexe ils peuvent être mis sous forme exponentielle

$$\dot{C}_1 = C_1 e^{j\psi_{réf}} \quad \text{et} \quad \dot{C}_2 e^{j\psi_{inc}}.$$

Le terme $\dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z}$ représente une onde incidente se déplaçant dans le sens positif de l'axe des z et le terme $\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z}$ est l'onde réfléchie se propageant dans le sens négatif de l'axe des z.

L'intensité du champ électrique $\dot{\vec{E}}$ peut être trouvée à l'aide de l'équation (18.1)

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}}.$$

Conformément à ce qui précède (voir expression 17.10) on a pour une onde plane

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} = \vec{i}\left(-\frac{d\dot{H}}{dz}\right).$$

Par conséquent,

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i}\left\{\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\left(-j\frac{\omega}{v}\right)\left(\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z} - \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z}\right)\right]\right\}.$$

On désigne la grandeur $\frac{1}{\varepsilon v} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ par Z_C et on l'appelle impédance caractéristique d'un diélectrique:

$$Z_C = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Cette impédance caractéristique est un nombre réel, mesuré en *ohms*

$$Z_C = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{1{,}256\cdot 10^{-6} H/m\cdot\mu_r}{8{,}86\cdot 10^{-12} F/m\cdot\varepsilon_r}} = 377\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ \Omega.$$

Elle ne dépend pas de la fréquence angulaire des oscillations ω. Pour le vide $\varepsilon_r = 1$ et, par conséquent, $Z_C = 377\ \Omega$. Donc:

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i}\,\dot{E} \tag{18.7}$$

où

$$\dot{E} = Z_C\dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z} - Z_C\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z}.$$

La présence du vecteur unitaire de l'axe des x (du vecteur unitaire $\vec{i}$) dans l'équation (18.7) indique que le vecteur de l'intensité du champ électrique est dirigé suivant l'axe des x. Ainsi, pour une onde électromagnétique plane se propageant dans un diélectrique, de même que pour un milieu conducteur, $\dot{\vec{E}}$ et $\dot{\vec{H}}$ sont respectivement perpendiculaires et $-\dot{\vec{H}}$ est dirigé suivant l'axe des y, $\dot{\vec{E}}$ étant dirigé suivant l'axe des x.

Ecrivons les expressions pour les valeurs instantanées de H et de E d'une onde incidente.

Pour obtenir la valeur instantanée d'une onde incidente H il faut multiplier la valeur complexe $\dot{H} = C_2 e^{j\psi_{\text{inc}}}\ e^{-j\frac{\omega}{v}z}$ par $e^{j\omega t}$ et prendre la partie imaginaire du produit ainsi obtenu. Nous aurons

$$H = C_2\sin\left(\omega t + \psi_{inc} - \frac{\omega}{v}z\right) \tag{18.8}$$

de même

$$E = C_2 Z_C\sin\left(\omega t + \psi_{inc} - \frac{\omega}{v}z\right). \tag{18.9}$$

Au fur et à mesure du déplacement de l'onde incidente le long de l'axe des z, l'amplitude E et l'amplitude H restent invariables; en d'autres termes l'onde n'est pas amortie. Et ceci est parfaitement naturel puisqu'il n'existe pas dans un diélectrique de courants de conduction, ni de dégagement d'énergie sous forme de chaleur.

On voit sur la fig. 477 les courbes spatiales, donnant les valeurs instantanées de H et de E. Ces courbes ont été construites suivant les équations (18.8) et (18.9) pour l'instant

$$\omega t + \psi_{inc} = 0.$$

Pour un instant postérieur, pour $\omega t + \psi_{inc} = 90°$, par exemple, les courbes analogues sont représentées sur la fig. 478.

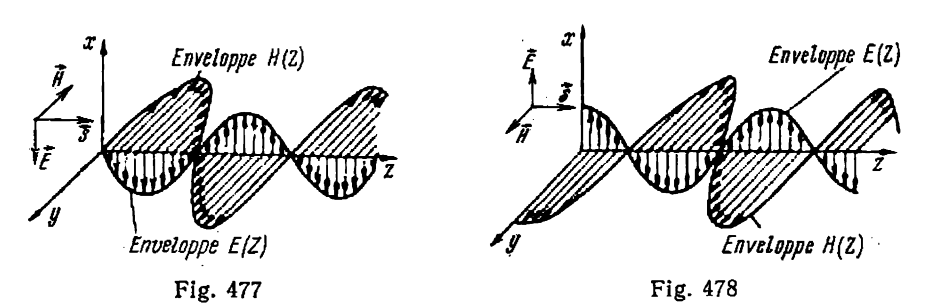


Fig. 477 Fig. 478

Comme on peut le voir sur les fig. 477 et 478, le vecteur $\dot{\vec{E}}$ au cours de ses variations dans l'onde plane reste dirigé le long de l'axe des x et le vecteur $\dot{\vec{H}}$ le long de l'axe des y et il n'existe pas de déphasage entre H et E.

Assurons-nous que la courbe $E = f(z)$ de la fig. 477 a été construite correctement. Les courbes de la fig. 477 ont été construites pour $\omega t = \psi_{inc} = 0$ et, par conséquent, l'équation de la courbe $E = f(z)$ de la fig. 477 est l'expression suivante (conformément à 18.9):

$$E_{pour\,\omega t+\psi inc=0} = C_2 Z_C \sin\left(-\frac{\omega}{v} z\right).$$

Pour $z = 0$, $E = 0$. Dans l'intervalle entre $\frac{\omega}{v} z = 0$ et $\frac{\omega}{v} z = \pi$ E est négative. Pour $\frac{\omega}{v} z = \pi$ $E = 0$, etc.

Le vecteur de Poynting d'une onde incidente est dirigé le long de l'axe des z. Le module S varie comme suit

$$S = C_2^2 Z_C \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi_{inc}\right).$$

Puisque

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

on a

$$S = \frac{C_2^2 Z_C}{2}\left[1 - \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega}{v} z + 2\psi_{inc}\right)\right],$$

c.-à-d. que le vecteur de Poynting varie en fonction du temps à une fréquence angulaire double et possède une composante constante $\frac{C_2^2 Z_C}{2}$.

La vitesse de phase de l'onde électromagnétique dans un diélectrique est

$$v_{phase} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \qquad (18.10)$$

Si l'onde se propage dans le vide, c.-à-d., si $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$ et lorsque la vitesse de phase est égale à la vitesse de la lumière $v = 300\,000$ *km/s*:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}}} \approx 300\,000 \ km/s.$$

Ainsi, la vitesse de phase d'une onde électromagnétique se propageant dans un diélectrique est très grande, incommensurablement plus grande que la vitesse de phase d'une onde électromagnétique plane dans un milieu conducteur.

La lonqueur de l'onde λ est la distance, comptée le long de l'axe des z, pour laquelle la phase de l'oscillation varie de 2π. Elle peut être trouvée à partir de la relation

$$\frac{\omega}{v}\lambda = 2\pi.$$

D'où

$$\lambda = \frac{v}{f}. \qquad (18.11)$$

Il découle de (18.11), que la longueur de l'onde dans un diélectrique est inversement proportionnelle à la fréquence f. Ainsi pour $f = 10^6$ *Hz*:

$$\lambda = \frac{300\,000 \ km/s}{10^6 \ 1/s} = 300 \ m.$$

Examinons un exemple numérique.

Exemple 215. Dans le plan $z = 0$, l'intensité du champ électrique d'une onde plane varie suivant la loi: $E = E_m \sin(\omega t + \psi_{inc})$, où $E_m = 0,2$ *V/m*, $\omega = 10^6 \ s^{-1}$ et $\psi_{inc} = 30°$; le diélectrique est constitué par l'air.

On demande d'écrire les expressions pour la valeur instantanée de l'intensité du champ magnétique et du vecteur de Poynting dans le plan $z = 0,5$ *km*.

Solution.

$$H = \frac{E_m}{Z_C} \sin\left(\omega t + \psi_{inc} - \frac{\omega}{V} z\right);$$

$$\frac{E_m}{Z_C} = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{377} = 5,315 \cdot 10^{-4} A/m;$$

$$\frac{\omega}{v} z = \frac{10^6 \cdot 0,5}{3 \cdot 10^5} \approx 1,665 \ \text{rad} \approx 95°20'.$$

Par conséquent,

$$H = 5,315 \cdot 10^{-4} \sin(10^6 t - 65°20') \ A/m.$$

Valeur instantanée du vecteur de Poynting pour $z = 0,5$ *km*

$$S = \frac{E_m H_m}{2}\left[1 - \cos\left(2\omega t + 2\psi_{inc} - \frac{2\omega z}{v}\right)\right] =$$

$$= 5,31 \cdot 10^{-5} [1 - \cos(2 \cdot 10^6 t - 130°40')] \ W/m^2.$$

CHAPITRE XIX

POTENTIELS RETARDÉS DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE VARIABLE ET RAYONNEMENT D'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

§ 475. **Etablissement des équations pour $\vec{A}$ et φ dans un champ électromagnétique variable et solution de ces équations.** Un champ électromagnétique variable est créé par des courants et des charges dépendant non seulement des coordonnées, mais également du temps. Recherchons les équations qui régissent le potentiel vecteur $\vec{A}$ et le potentiel scalaire φ dans un champ électromagnétique variable. A cette fin écrivons le système d'équations de Maxwell

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \qquad (19.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad (19.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \qquad (19.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{lib}{}^{*}}{\varepsilon}. \qquad (19.4)$$

Complétons ce système par l'équation de continuité

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{d\rho}{dt} \qquad (19.5)$$

et par l'expression de l'induction magnétique en fonction du potentiel vecteur

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \qquad (19.6)$$

Pour pouvoir écrire l'équation du potentiel vecteur, il faut effectuer un certain nombre d'opérations préalables. Multiplions (19.1) par μ ; il vient :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu\vec{\delta} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Dans cette dernière équation substituons $\frac{1}{v^2}$ à $\mu\varepsilon$:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu\vec{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (19.7)$$

---

* Par la suite pour simplifier les écritures nous supprimerons l'indice « *lib* ».

Substituons ensuite dans (19.7) rot $\vec{A}$ à $\vec{B}$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu\vec{\delta} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Ou

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu\vec{\delta} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (19.8)$$

Après ceci substituons $\frac{\partial}{\partial t}$ rot $\vec{A}$ = rot $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ à $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dans (19.2) (l'opération rotationnel et celle de dérivation par rapport au temps sont des opérations indépendantes l'une de l'autre et par conséquent commutatifs. L'équation (19.2) prend ainsi la forme suivante:

$$\text{rot } \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \qquad (19.9)$$

Si les rotationnels de deux fonctions $\left(\text{de } \vec{E} \text{ et de } -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$ sont égaux, les fonctions elles-mêmes sont égales, au gradient d'une certaine fonction scalaire près. Cette dernière réserve doit être faite puisque le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire est identiquement nul

$$(\text{rot grad } \varphi \equiv 0).$$

Ainsi

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \qquad (19.10)$$

Dans (19.10) nous avons pris le grad φ comme gradient de la fonction scalaire. Ceci a été fait pour que l'équation (19.10) soit satisfaite même pour un champ statique. Et puisque dans un champ statique $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, l'équation qui découle de (19.10) pour un champ statique doit correspondre à l'expression d'électrostatique bien connue

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

On peut dire conformément à (19.10) que dans un champ magnétique variable, l'intensité du champ électrique a deux composantes. L'une d'elles $\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$ est due au champ magnétique variable et l'autre (—grad φ) est due aux charges fixes *. Pour s'en assurer, il suffit de prendre la circulation du vecteur $\vec{E}$ le long d'un circuit fermé quelconque

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A}\, d\vec{l} - \oint \text{grad } \varphi\, d\vec{l}.$$

* On peut appeler la première d'entre elles composante rotationnelle, et la deuxième, composante potentielle ou coulombienne.

La circulation du gradient de φ est identiquement nulle et $\oint \vec{A}\,\vec{dl}$, conformément à l'équation (15.26), est le flux magnétique Φ traversant le contour choisi. Ainsi

$$\oint \vec{E}\,\vec{dl} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

La dérivée $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ figure dans l'équation (19.8). Calculons-la à partir de (19.10)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

et substituons-la dans (19.8)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu\vec{\delta} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\frac{1}{v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Cette dernière équation peut être récrite de la manière suivante:

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{\delta}. \qquad (19.11)$$

Le potentiel vecteur est une fonction artificiellement introduite, dont le rotationnel est égal à $\vec{B}$. En examinant le problème du potentiel vecteur $\vec{A}$ dans la section traitant du champ magnétique nous avons indiqué que le potentiel vecteur doit satisfaire à une certaine condition, à savoir que dans un champ magnétique permanent $\operatorname{div}\vec{A} = 0$; autrement dit les lignes du vecteur $\vec{A}$ sont des lignes fermées sur elles-mêmes.

Dans un champ électromagnétique variable la condition à laquelle doit satisfaire le potentiel vecteur s'écrit comme suit:

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \qquad (19.12)$$

Il est facile de constater que pour un champ invariable dans le temps, la condition (19.12) dégénère en condition $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Nous montrerons par la suite que la condition (19.12) n'est autre chose que l'équation de la continuité (19.5), écrite sous une forme différente.

En outre, l'équation (19.12) indique qu'il existe dans un champ magnétique variable une certaine relation entre le potentiel vecteur $\vec{A}$ et le potentiel scalaire φ et que les fonctions A et φ sont des fonctions dépendantes l'une de l'autre.

En tenant compte de (19.12), l'équation (19.11) prend la forme suivante *

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{\delta}. \qquad (19.13)$$

* L'équation (19.13) est habituellement appelée équation d'Alembert.

Si $\vec{A}$ n'est pas fonction de t, on a $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$ et l'équation (19.13) se transforme en l'équation de Poisson, déjà examinée dans la section traitant le champ magnétique.

L'équation (19.13) est une équation d'onde vectorielle avec second membre. On l'écrit souvent sous une forme différente

$$\Box^2 \vec{A} = -\mu \vec{\delta}. \qquad (19.13')$$

L'opérateur $\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ est appelé opérateur laplacien quadridimensionnel (la « quatrième dimension » étant le temps t). Recherchons l'équation qui régit le potentiel φ dans un champ électromagnétique variable. A cette fin, substituons dans l'équation (19.4) à $\vec{E}$, son équivalent tiré de (19.10)

$$\operatorname{div}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

ou

$$-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Mais

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

et, par conséquent,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

A son tour div grad $\varphi = \nabla^2 \varphi$. Par conséquent, l'équation (19.4) prend la forme suivante:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (19.14)$$

Ainsi, dans un champ électromagnétique variable le potentiel scalaire φ satisfait à une équation caractéristique non homogène (19.14). Si le champ est statique et si le potentiel n'est pas fonction du temps, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$, l'équation (19.14) se réduit à l'équation de Poisson $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$, examinée dans la section consacrée à l'électrostatique.

Pour s'assurer que l'équation (19.12) correspond à l'équation de continuité (19.5), effectuons les opérations suivantes.

Appliquons l'opérateur $\Box^2$ aux deux membres de l'équation (19.12)

$$\Box^2 \operatorname{div} \vec{A} = -\Box^2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Introduisons l'opérateur $\Box^2$ sous le signe divergence et sous le signe de dérivation par rapport au temps. Nous obtenons ainsi

$$\operatorname{div} \Box^2 \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \Box^2 \varphi. \qquad (19.15)$$

Conformément à (19.13′) substituons dans (19.15) $-\mu\vec{\delta}$ à $\Box^2\vec{A}$ et substituons $-\frac{\rho}{\varepsilon}$ à $\Box^2\varphi$. Nous aurons alors

$$-\operatorname{div}\mu\vec{\delta}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{19.15′}$$

Mettons μ en facteur devant la divergence et ε devant le signe de dérivation par rapport au temps, changeons les signes et divisons les deux membres de l'équation par μ:

$$\operatorname{div}\vec{\delta}=-\frac{1}{v^2\varepsilon\mu}\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{19.16}$$

Du fait que $\frac{1}{v^2\varepsilon\mu}=1$, l'équation (19.16) n'est autre chose que l'équation de continuité (19.5). Ainsi on peut considérer comme démontré que l'équation $\operatorname{div}\vec{A}=-\frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ correspond à l'équation de continuité $\operatorname{div}\vec{\delta}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

Discutons la manière de résoudre l'équation (19.14). Procédons pour cela de la manière suivante: écrivons la solution de cette équation pour les deux cas particuliers suivants; pour celui où $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$, mais $\frac{\rho}{\varepsilon}\neq 0$ et ensuite pour $\frac{\rho}{\varepsilon}=0$, mais $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\neq 0$. Ensuite et en partant de considérations physiques, écrivons la solution de l'équation (19.14) sous sa forme générale, de manière qu'elle comprenne les solutions déjà connues pour les deux cas particuliers ci-dessus.

Si $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$ l'équation (19.14) se réduit à l'équation de Poisson, dont la solution générale a été donnée dans la section traitant d'électrostatique (voir § 397):

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V\frac{\rho\,dV}{R}.$$

La composante du potentiel φ, due à la charge élémentaire $\rho\,dV$, est

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\rho\,dV}{R}.$$

Pour $\rho=0$ l'équation (19.14) prend la forme suivante:

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{19.17}$$

Dans le cas particulier de l'onde plane, φ ne dépend que de la coordonnée spatiale z:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{19.17′}$$

La solution de (19.17′) est donnée par l'expression

$$\varphi=f_1\left(t-\frac{z}{v}\right)+f_2\left(t+\frac{z}{v}\right).$$

Il y a lieu de remarquer que les fonctions f_1 et f_2 peuvent être quelconques, pourvu qu'elles soient deux fois dérivables en t et en z. La nature de la fonction sera déterminée par les conditions aux limites.

Assurons-nous que la fonction $f_1\left(t-\frac{z}{v}\right)$ satisfait à l'équation (19.17'). En effet

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial f_1\left(t-\frac{z}{v}\right)}{\partial\left(t-\frac{z}{v}\right)}\frac{\partial\left(t-\frac{z}{v}\right)}{\partial z}=f_1'\left(t-\frac{z}{v}\right)\left[-\frac{1}{v}\right],$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\left[-\frac{1}{v}\right]\frac{\partial f_1'\left(t-\frac{z}{v}\right)}{\partial\left(t-\frac{z}{v}\right)}\frac{\partial\left(t-\frac{z}{v}\right)}{\partial z}=\left(-\frac{1}{v}\right)\left(-\frac{1}{v}\right)f_1''\left(t-\frac{z}{v}\right).$$

A son tour

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial f_1\left(t-\frac{z}{v}\right)}{\partial\left(t-\frac{z}{v}\right)}\frac{\partial\left(t-\frac{z}{v}\right)}{\partial t}=f_1'\left(t-\frac{z}{v}\right)$$

et

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=f_1''\left(t-\frac{z}{v}\right).$$

Substituons $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ dans l'équation (19.17'). Nous obtenons

$$\frac{1}{v^2}f_1''\left(t-\frac{z}{v}\right)=\frac{1}{v^2}f_1''\left(t-\frac{z}{v}\right),$$

c.-à-d. que nous avons une identité indépendamment de la nature de la fonction f_1. Par conséquent, on peut dire qu'une fonction quelconque $f_1\left(t-\frac{z}{v}\right)$, satisfait à l'équation (19.17'), si elle est deux fois dérivable par rapport à z et t. Il n'est pas difficile de s'assurer d'une manière analogue que la fonction $f_2\left(t+\frac{z}{v}\right)$ satisfait également à l'équation (19.17').

Rappelons que nous avons déjà rencontré l'équation caractéristique (19.17') au chapitre XII dans l'étude du problème des phénomènes transitoires dans les lignes à paramètres distribués.

$f_1\left(t-\frac{z}{v}\right)$ représente l'onde incidente se propageant dans la direction de l'axe des $+z$ *, et la fonction $f_2\left(t+\frac{z}{v}\right)$ est l'onde réfléchie, se

---

* Pour déterminer la direction dans laquelle se déplace l'onde $f_1\left(t-\frac{z}{v}\right)$, il faut savoir comment z varie lorsque le temps t croît afin que l'argument de la fonction $f_1\left(t-\frac{z}{v}\right)$ reste constant, égal à zéro par exemple. Si on prend $t-\frac{z}{v}=0$, on a $z=vt$, autrement dit, z croît lorsque t augmente. Il en découle que l'onde se propage dans le sens positif de l'axe des z.

déplaçant dans le sens de l'axe des $-z$. Démontrons que l'équation (19.17) est satisfaite en coordonnées sphériques par la fonction $\frac{f\left(t-\frac{R}{v}\right)}{R}$; R — coordonnée du système sphérique, v — vitesse de propagation de l'onde. En effet nous avons dans le système de coordonnées sphérique

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}.$$

Puisque, en vertu de la symétrie sphérique, φ n'est fonction que de R, $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0$. Par conséquent,

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{R}\right).$$

Si on substitue $\frac{f\left(t-\frac{R}{v}\right)}{R}$ dans $\nabla^2\varphi$, il s'avère que

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{Rv^2}f''\left(t-\frac{R}{v}\right);$$

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ est de même égal à $\frac{1}{Rv^2}f''\left(t-\frac{R}{v}\right)$.

Ainsi la fonction $\frac{f\left(t-\frac{R}{v}\right)}{R}$ satisfait à l'équation (19.17) dans un système de coordonnées sphérique.

Pour un champ invariable dans le temps (voir § 397) $\varphi=\frac{\rho\,dV}{4\pi\varepsilon R}$ et la solution pour φ, dans un espace ne comportant pas de charges, ont la forme suivante

$$\varphi=\frac{f\left(t-\frac{R}{v}\right)}{R}.$$

En comparant ces deux expressions nous trouvons

$$f\left(t-\frac{R}{v}\right)=\frac{\rho\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{4\pi\varepsilon}.$$

Ainsi la composante du potentiel de la charge $\rho\,(t)\,dV$, variant en fonction du temps, est

$$\frac{\rho\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{4\pi\varepsilon R}. \tag{19.18}$$

L'expression $\rho\left(t-\frac{R}{v}\right)$ doit être interprétée comme suit: la charge volumique ρ est une fonction de l'argument $\left(t-\frac{R}{v}\right)$. La valeur résul-

tante du potentiel est obtenue en sommant les composantes du potentiel dues aux charges réparties dans le volume V

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{R} \qquad (19.19)$$

Examinons la solution de l'équation (19.13). Dans le cas le plus général, l'équation (19.13) peut être décomposée en trois équations pour les trois projections du potentiel vecteur. Chacune de ces équations pour les projections sera écrite par rapport à une grandeur scalaire (la projection d'un vecteur est une grandeur scalaire). La solution générale pour chacune des projections est obtenue, comme a été obtenue la solution pour la grandeur scalaire φ, avec la seule différence qu'au lieu de la charge volumique on y aura affaire à la projection appropriée de la densité du courant et qu'au lieu de $\frac{1}{\varepsilon}$ on aura μ.

Après multiplication des solutions ainsi obtenues par les vecteurs unitaires respectives et leur addition, nous trouverons que la composante du potentiel vecteur de l'élément de courant $\overleftarrow{\delta}\,dV$ en un certain point de l'espace, se trouvant à la distance R de l'élément du courant, est :

$$d\vec{A}=\frac{\mu\vec{\delta}\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{4\pi R}. \qquad (19.20)$$

Pour obtenir la valeur résultante de $\vec{A}$, il faut faire la somme géométrique des composantes de tous les éléments du courant

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{\delta}\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{R}. \qquad (19.21)$$

§ 476. Potentiels retardés d'un champ électromagnétique variable. Examinons le sens physique des expressions (19.18) et (19.20). L'onde électromagnétique se propage à la vitesse v. Elle couvre la distance R dans l'intervalle de temps $\frac{R}{v}$. Par conséquent, la valeur de la composante du potentiel φ dans un champ électromagnétique variable en un certain point, se trouvant à la distance R de la charge à l'instant t, dépend de la valeur de la charge à l'instant $\left(t-\frac{R}{v}\right)$.

Il faut interpréter de même l'expression

$$d\vec{A}=\frac{\mu\vec{\delta}\left(t-\frac{R}{v}\right)dV}{4\pi R}.$$

Du fait que la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique est finie, la valeur du potentiel vecteur de l'élément de courant $\vec{\delta}\,dV$

en un point, se trouvant à la distance R de cet élément de courant, varie avec un retard dans le temps, la valeur de ce retard étant $\frac{R}{v}$.

Grâce à la présence de ce retard, les potentiels du champ électromagnétique variable sont appelés *potentiels retardés*. Du fait que la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans un diélectrique est très grande (v = 300 000 *km/s*), le retard ne se manifeste d'une manière appréciable, que pour des valeurs très grandes de R; pour des R peu importants le retard est tellement insignifiant qu'on peut le négliger dans la pratique.

La notion des potentiels retardés est utilisée le plus souvent en radiotechnique dans l'étude des problèmes liés au rayonnement de l'énergie électromagnétique.

§ 477. Potentiel vecteur retardé sous forme complexe. Nous avons indiqué au chapitre « Champ magnétique de courant continu » (voir équation 15.27), que la composante du potentiel vecteur de l'élément du courant linéaire $i\vec{dl}$ est égale à $d\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{i\vec{dl}}{R}$.

Dans un champ électromagnétique variable on a, compte tenu du phénomène du retard,

$$d\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{i\left(t-\frac{R}{v}\right)}{R}\vec{dl}.$$

Le courant i peut varier en fonction du temps suivant une loi quelconque. Au point de vue pratique, c'est la loi sinusoïdale de variation du courant dans le temps qui présente le maximum d'intérêt. Soit

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Le courant peut être mis sous la forme exponentielle $\dot{I}_m e^{j\omega t}$, où $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$ (rigoureusement parlant, il aurait fallu écrire aussi le symbole de la partie imaginaire, mais on l'omet habituellement).

Le courant $i\left(t-\frac{R}{v}\right) = I_m \sin\left[\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)+\psi)\right]$ ou, sous forme exponentielle, $\dot{I}_m e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}$.

Par conséquent, la valeur complexe du potentiel vecteur de l'élément du courant $\vec{dl} I_m \sin\left[\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)+\psi\right]$ s'écrit comme suit

$$\dot{d\vec{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\dot{I}_m e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\vec{dl}}{R}. \tag{19.22}$$

De même, si les charges électriques créant le champ varient en fonc-

tion du temps suivant une loi sinusoïdale, la composante du potentiel complexe $\dot{\varphi}$ de la charge volumique

$$\dot{\rho}_m e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)} dV$$

est

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\dot{\rho}_m e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)} dV}{R}. \tag{19.23}$$

E x e m p l e 216. Trouver la loi de variation du potentiel vecteur du courant 100 sin $(10^5 t + 30°)$ A, circulant dans un élément conducteur de longueur $dl = 30$ cm, en un point se trouvant à la distance $R = 100$ km de l'élément du courant.

S o l u t i o n.

$$d\dot{A} = \frac{\mu I_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{R}{v}\right) + \psi\right] dl}{4\pi R} =$$

$$= \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}3 \cdot 100 \sin\left[10^5\left(t - \frac{100}{300\,000}\right) + 30°\right]}{4\pi \cdot 100 \cdot 10^3} =$$

$$= 3 \cdot 10^{-11} \sin(10^5 t - 80°)\, V \cdot s/m.$$

$$(33{,}3 \text{ rad} \approx 110°; -110° + 30° = -80°).$$

§ 478. Rayonnement de l'énergie électromagnétique. Examinons la question du rayonnement de l'énergie électromagnétique par un élément de courant. Supposons que le courant $I_m \sin \omega t$ circule dans un tronçon du conducteur, de longueur dl (fig. 479). Par la suite nous allons utiliser les systèmes cylindrique et parfois sphérique de coordonnées. Orientons l'axe des z du système cylindrique le long du conducteur. Supposons que le sens positif du courant dans le conducteur correspond au sens positif de l'axe des z.

Trouvons la valeur du potentiel-vecteur en un point arbitraire quelconque se trouvant à la distance R de l'élément de courant. Conformément à (19.22)

Fig. 479

$$d\dot{\vec{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\dot{I}_m e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)} \vec{dl}}{R} \tag{19.22}$$

ou, si on supprime le facteur $e^{j\omega t}$

$$d\dot{\vec{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\dot{I}_m e^{-j\frac{R}{v}\omega} \vec{dl}}{R}.$$

La direction de $d\dot{\vec{A}}$ * coïncide avec la direction du vecteur $\vec{dl}$ (le long de l'axe des z).

Trouvons l'induction magnétique en un point arbitraire du champ

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}.$$

Développons le rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\dot{\vec{B}} = \operatorname{rot} \dot{\vec{A}} = \vec{r}^{\circ} \left(\frac{\partial \dot{A}_z}{r\partial \alpha} - \frac{\partial \dot{A}\alpha}{\partial z} \right) + \vec{\alpha}^{\circ} \left(\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) + \vec{z}^{\circ} \left(\frac{\partial (r\dot{A}\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial \dot{A}_r}{r\partial \alpha} \right).$$

Puisque $\dot{\vec{A}}$ n'a qu'une composante unique $\dot{\vec{A}}_z$, qu'elle ne dépend que de R et qu'en vertu de la symétrie du champ, ce dernier ne dépend pas de α, on a

$$\dot{\vec{B}} = \vec{\alpha}^{\circ} \left(-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right). \tag{19.24}$$

Cette dernière expression signifie que l'induction magnétique est toujours dirigée suivant l'angle alpha.

Pour trouver la valeur complexe de l'induction magnétique, il faut calculer $-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r}$; $\dot{A}_z$ sous sa forme explicite dépend de R et non pas de r. Par conséquent,

$$\frac{-\partial \dot{A}_z}{\partial r} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r}. \tag{19.25}$$

La relation suivante découlant du théorème de Pythagore est vraie naturellement pour n'importe quel point de l'espace

$$z^2 + r^2 = R^2. \tag{19.26}$$

Dérivons (19.26) par rapport à r ; nous obtenons

$$2r = 2R \frac{\partial R}{\partial r}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{R} = \sin \theta. \tag{19.27}$$

La composante $\dot{A}_z$ est constituée par le produit de deux fonctions de R : la fonction $e^{-j\omega \frac{R}{v}}$ et la fonction $\frac{1}{R}$. Par conséquent,

$$\dot{B} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{R} \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\mu \dot{I}_m \, dl}{4\pi} \sin \theta \left[-\frac{1}{R^2} e^{-j\omega \frac{R}{v}} - j \frac{\omega}{vR} e^{-j\omega \frac{R}{v}} \right]$$

ou

$$\dot{B} = \frac{\mu \dot{I}_m \, dl \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{R^2} + \frac{j\omega}{vR} e^{-j\omega \frac{R}{v}} \right]. \tag{19.28}$$

---

* Par la suite et pour simplifier les écritures nous écrirons $\dot{\vec{A}}$ au lieu de $\overrightarrow{d\dot{A}}$.

L'expression (19.28) peut être récrite sous une autre forme encore en passant aux valeurs instantanées

$$B=\frac{\mu I_m\,dl\sin\theta}{4\pi}\left[\frac{\sin\left(\omega t-\frac{\omega R}{v}\right)}{R^2}+\frac{\omega}{vR}\cos\left(\omega t-\frac{\omega R}{v}\right)\right]. \quad (19.28')$$

On peut déduire de cette dernière expression qu'en un point quelconque de l'espace l'induction magnétique, due à un élément de courant alternatif, a deux composantes dont l'une décroît en raison inverse du carré du rayon et varie suivant le sinus du temps, tandis que l'autre décroît en raison directe de la première puissance du rayon et varie dans le temps suivant le cosinus du temps.

Cherchons la loi de variation du champ électrique. Conformément à la première équation de Maxwell:

$$\dot{\vec{E}}=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}. \quad (19.29)$$

Mais comme $\dot{\vec{H}}=\frac{\dot{\vec{B}}}{\mu}$,

$$\dot{\vec{H}}=\vec{\alpha}^{\circ}\left[\frac{\dot{I}_m\,dl\sin\theta}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{R^2}+\frac{j\omega e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{vR}\right)\right]. \quad (19.30)$$

Il est commode de passer ensuite en coordonnées sphériques. Les projections de rot $\dot{\vec{H}}$ dans un système sphérique s'écrivent comme suit:

$$\operatorname{rot}_R\dot{\vec{H}}=\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dot{H}_\alpha)-\frac{\partial\dot{H}_\theta}{\partial\alpha}\right];$$

$$\operatorname{rot}_\theta\dot{\vec{H}}=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\dot{H}_R}{\partial\alpha}-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\dot{H}_\alpha);$$

$$\operatorname{rot}_\alpha\dot{\vec{H}}=\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R\dot{H}_\theta)-\frac{\partial\dot{H}_R}{\partial\theta}\right].$$

Puisque $\dot{H}_\theta=0$, $\dot{H}_R=0$, on a

$$\operatorname{rot}_R\dot{\vec{H}}=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dot{H}_\alpha); \quad (19.31)$$

$$\operatorname{rot}_\theta\dot{\vec{H}}=-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\dot{H}_\alpha); \quad (19.32)$$

$$\operatorname{rot}_\alpha\dot{\vec{H}}=0.$$

Trouvons la projection de rot $\dot{\vec{H}}$ sur la direction R :

$$\operatorname{rot}_R\dot{\vec{H}}=\frac{\dot{I}_m\,dl\cos\theta\sin\theta}{2\pi R\sin\theta}\left(\frac{e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{R^2}+\frac{j\omega e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{vR}\right)$$

ou après réduction de $\sin\theta$

$$\text{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{\dot{I}_m \, dl \cos\theta e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2\pi R^3} + \frac{\dot{I}_m \, dl \cos\theta j\omega e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2\pi R^2 v}. \tag{19.33}$$

A son tour, la projection de $\text{rot}\,\dot{\vec{H}}$ sur la direction θ s'écrit comme suit:

$$\text{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\dot{I}_m \, dl \sin\theta e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R} + \frac{\dot{I}_m \, dl \sin\theta j\omega e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi v}\right) = \frac{\dot{I}_m \, dl \sin\theta e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R^3} + \frac{\dot{I}_m \, dl \sin\theta j\omega}{4\pi R^2 v} e^{-j\omega\frac{R}{v}} - \frac{\dot{I}_m \, dl \sin\theta \omega^2 e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R v^2}. \tag{19.34}$$

Pour obtenir les projections de $\dot{\vec{E}}$ sur les directions R et θ, il faut diviser les projections appropriées du $\text{rot}\,\dot{\vec{H}}$ par $j\omega\varepsilon$ (voir équation 19.29). Nous aurons alors

$$\dot{E}_\theta = \frac{-j\dot{I}_m \, dl \sin\theta}{4\pi R^3 \omega\varepsilon} e^{-j\omega\frac{R}{v}} + \frac{\dot{I}_m \, dl \sin\theta e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi\varepsilon R^2 v} + \frac{j\dot{I}_m \, dl \sin\theta \omega e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R v^2 \varepsilon} \tag{19.35}$$

et

$$\dot{E}_R = \frac{-j\dot{I}_m \, dl \cos\theta e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2\pi R^3 \omega\varepsilon} + \frac{\dot{I}_m \, dl \cos\theta e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{2\pi R^2 v\varepsilon}. \tag{19.36}$$

Ainsi l'intensité d'un champ électrique a deux composantes: l'une d'elles est dirigée suivant θ et l'autre, suivant R; la composante suivant θ comporte trois termes (voir équation 19.35), variant en raison inverse des troisième, second et premier degrés de la distance r respectivement; E_R comprend deux termes, variant en raison directe de R^3 et R^2. Le quotient

$$\frac{v}{\omega} = \frac{v}{2\pi f} = \frac{vT}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Le rapport du module du premier terme (de 19.33) au module du second terme est égal à $\frac{\lambda}{2\pi R}$.

Si $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ on peut négliger le premier terme par rapport au deuxième; si $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ le deuxième terme est tout au contraire beaucoup plus petit que le premier.

Des relations analogues existent entre les modules des termes de (19.34).

L'ensemble du champ est habituellement réparti en zones proche, moyenne et éloignée. Pour la zone proche $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$. Pour la zone éloignée $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$. Dans la zone moyenne R est commensurable à $\frac{\lambda}{2\pi}$. Conformément à ceci on a pour la zone proche

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \vec{\alpha}^{\circ} \frac{\dot{I}_m\, dl \sin\theta}{4\pi R^2} e^{-j\omega\frac{R}{v}} \\ \dot{E}_\theta &= \frac{-j\dot{I}_m\, dl \sin\theta e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R^3 \omega\varepsilon} \\ \dot{E}_R &= \frac{-j\dot{I}_m\, dl \cos\theta e^{-j\omega\frac{R}{v}}}{4\pi R^3 \omega\varepsilon} \end{aligned}\right\}. \qquad (19.37)$$

De même pour la zone éloignée

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \frac{\vec{\alpha}^{\circ} j\dot{I}_m\, dl \sin\theta}{2R\lambda} e^{-j\omega\frac{R}{v}} \\ \dot{E}_\theta &= \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, j\dot{I}_m\, dl \sin\theta}{2R\lambda} e^{-j\omega\frac{R}{v}} \end{aligned}\right\}. \qquad (19.38)$$

Ecrivons les valeurs instantanées de H et de E pour la zone éloignée:

$$\left.\begin{aligned} H_\alpha &= \frac{I_m\, dl \sin\theta}{2R\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{v}\right) \\ E_\theta &= \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, I_m\, dl \sin\theta}{2R\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{v}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (19.39)$$

Ainsi, dans la zone éloignée, c.-à-d. dans la zone où $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$, l'intensité du champ magnétique ne possède que la composante en alpha et l'intensité du champ électrique n'a qu'une composante en théta (voir équation 19.38). Si on trace une sphère de rayon R, en tous les points de cette sphère H aura la même phase des oscillations à un instant concret quelconque (la phase des oscillations est déterminée par l'argument du cosinus). L'amplitude H pour tous les points de la sphère à R = const est différente et dépend de l'angle θ; aux pôles pour $\theta = 0$ et pour $\theta = 180°$, l'amplitude des oscillations à un instant quelconque est nulle puisque

$$\sin\theta = \sin 180° = 0.$$

L'amplitude des oscillations est maximale à l'« équateur » pour $\theta = 90°$. H et E ont la même phase (voir équation 19.39). Le module de E est de $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_C$ fois plus grand que le module de H, c.-à-d.

$$E = HZ_C.$$

Le diagramme polaire, donnant la valeur du module de E ou de H en fonction de l'angle θ, dans la zone éloignée, est habituellement appelé *diagramme de directivité*. Dans le cas considéré il est représenté par deux circonférences tangentes (fig. 480, *a*).

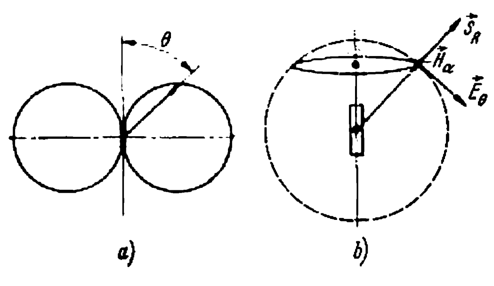


Fig. 480

Ecrivons l'expression du vecteur de Poynting pour la zone éloignée :

$$\tilde{\vec{S}} = \dot{\vec{E}}_\theta \times \dot{\vec{H}}_\alpha = \tilde{\vec{S}}_R.$$

Le produit de deux vecteurs, dont l'un est dirigé suivant θ et l'autre suivant α, donne un vecteur dirigé suivant le rayon (fig. 480, *b*).

Puisque H et E dans la zone éloignée sont en phase, lorsque la direction de H s'inverse (H varie suivant le cosinus du temps), la direction du vecteur E s'inverse en même temps. Mais le vecteur $\vec{S}$ ne change pas de direction, étant tout le temps orienté le long du rayon.

Trouvons la valeur du module du vecteur de Poynting. A cette fin, multiplions le module de E par le module de H

$$S = \frac{Z_C (dl)^2 I_m^2 \sin^2\theta \cos^2\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)}{4R^2\lambda^2}. \qquad (19.40)$$

La valeur moyenne du module du vecteur de Poynting pendant la période T est

$$S_{moy\ par\ pér.} = \frac{Z_C (dl)^2 I_m^2 \sin^2\theta}{8R^2\lambda^2};$$

$$\left[\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega R}{v}\right) dt = \frac{1}{2}\right].$$

Calculons le flux du vecteur de Poynting à travers la surface sphérique de rayon R. L'élément ds de la surface sphérique de rayon R est dirigé suivant le rayon. Le vecteur de Poynting S est également dirigé suivant le rayon. L'angle entre le vecteur et le rayon est donc nul (fig. 481). L'élément d'une surface sphérique peut être considéré comme un rectangle curviligne et son aire (fig. 481) est :

$$ds = R\,d\theta R \sin\theta\,d\alpha = R^2 \sin\theta\,d\theta\,d\alpha;$$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta = -\int_1^{-1} \sin^2\theta\,d\cos\theta = \int_1^{-1} (\cos^2\theta - 1)\,d\cos\theta = \frac{4}{3};$$

$$\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi.$$

Substituons ensuite $2\,I^2$ à I_m^2 (I étant la valeur efficace du courant). Il en résulte que le flux du vecteur de Poynting à travers la surface sphérique de rayon R, ce flux étant la puissance P_s rayonné par l'élément de courant, ne dépend pas du rayon R et est

$$\oint \vec{S}\,\vec{ds} = P_s = R_s I^2, \tag{19.41}$$

où

$$R_s = \frac{2}{3}\,\frac{\pi Z_C (dl)^2}{\lambda^2}\,. \tag{19.42}$$

R_s est appelé *résistance de rayonnement*. La puissance obtenue pour le même courant I est d'autant plus grande que la valeur de R_s est élevée. La résistance de rayonnement est directement proportionnelle au carré de la longueur du radiateur et, ce qui est particulièrement important, inversement proportionnelle au carré de la longueur d'onde λ.

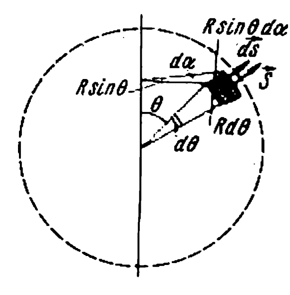


Fig. 481

Puisque la longueur d'onde $\lambda = \frac{v}{f}$, la puissance rayonnée est directement proportionnelle au carré de la fréquence. Si la fréquence est basse, par exemple égale à 50 Hz seulement, il n'y a pratiquement pas de rayonnement. Mais pour les fréquences radio-électriques le rayonnement est très important. Ainsi, par exemple, à la fréquence de $50 \cdot 10^6$ Hz, le rayonnement est de 10^{12} fois plus grand qu'à la fréquence de 50 Hz.

E x e m p l e 217. Un courant alternatif $I = 0{,}2$ A circule dans un tronçon de conducteur linéaire de longueur $\Delta l = 3$ cm. La fréquence du courant $f = 10^9$ Hz. Trouver la résistance de rayonnement et la puissance de ce dernier.

S o l u t i o n. Longueur d'onde $\lambda = 30$ cm. Conformément à l'expression (19.42)

$$R_s = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{377 \cdot 3^2}{30^2} = 7{,}8\ \Omega.$$

Suivant l'expression (19.41)

$$P_s = R_s I^2 = 7{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}312\ W.$$

§ 479. Notion de dipôle rayonnant. Pour établir les expressions figurant au § 479, nous avons pris comme radiateur d'énergie électromagnétique un petit tronçon de conducteur, parcouru par un courant sinusoïdal. Mais on aurait obtenu exactement les mêmes expressions, si au lieu d'un élément du courant, on avait pris un dipôle (doublet) rayonnant. On appelle dipôle rayonnant un tronçon de conducteur linéaire, ayant des capacités concentrées à ses extrémités sous forme de sphères (fig. 482, *a*).

On suppose que la longueur l du dipôle soit nettement inférieur à la longueur d'onde λ et que la section du conducteur soit négligeable. Dans ces conditions on peut négliger en première approximation la capacité distribuée du conducteur lui-même et ne tenir compte que de la capacité des sphères.

On voit sur la fig. 482, *b* un schéma dans lequel un générateur de tension sinusoïdale à haute fréquence est raccordé par un câble coaxial à deux petits conducteurs, disposés verticalement et représentés en gros traits sur la fig. 482, *b*, ces conducteurs sont raccordés à leur tour aux deux sphères (boules), constituant le dipôle.

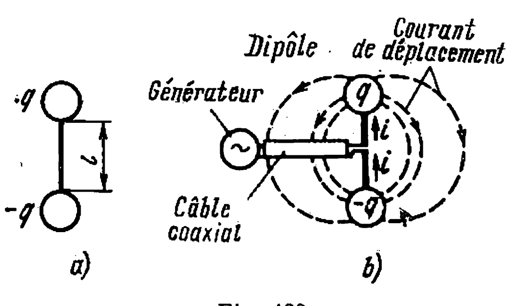


Fig. 482

Sous l'effet de la tension du générateur, les sphères du dipôle se chargent et se déchargent périodiquement.

Supposons que la charge q de la sphère supérieure varie suivant la loi $-Q_m \cos \omega t$ et que la charge $-q$ de la sphère inférieure le fait suivant la loi $Q_m \cos \omega t$. Alors les petits conducteurs verticaux, raccordés aux sphères seront parcourus par un courant de conduction lors des changements périodiques du signe de la charge des boules

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega Q_m \sin \omega t.$$

Ce courant se ferme à travers le diélectrique sous forme de courant de déplacement, comme ceci est représenté par des lignes en pointillé sur la fig. 482, *b*.

Il y a lieu de rappeler que les deux petits conducteurs verticaux, de longueur $\frac{l}{2}$ chacun, sont parcourus par le courant de conduction i pendant chaque changement périodique de signe de la charge. En d'autres termes les deux conducteurs verticaux de longueur $\frac{l}{2}$ $\left(\text{ou } \frac{dl}{2}\right)$ à courant i, raccordant les deux sphères du dipôle, constituent un élément de courant $i\vec{l}$ (ou $id\vec{l}$), dont il était question au § 479. Le fait qu'il existe une rupture au milieu de l'élément du courant de la fig. 482, *b* et que l'élément de courant de la fig. 479 n'en comportait pas, n'a pas de grande importance, puisque cette rupture peut être très petite par rapport à la longueur l (dl).

Ainsi, toutes les conclusions du § 479 concernant un radiateur, constitué par un élément de courant idl, sont applicables également à un radiateur ayant la forme d'un dipôle, autrement dit à un radiateur constitué par deux sphères, se déchargeant et se rechargeant périodiquement et raccordés par un conducteur fin.

§ 480. **Analyse complémentaire d'un champ rayonné.** Comme nous l'avons déjà signalé au § 479, dans la zone rapprochée du radiateur, le plus grand rôle est joué par les composantes E_θ et E_R de l'intensité du champ électrique, inversement proportionnelles au cube de la distance entre le point considéré et le radiateur.

Ces composantes sont en retard de 90° sur le courant circulant dans le conducteur ou, en d'autres termes, sont en phase avec la charge de l'une des sphères du dipôle rayonnant.

Il découle de ce qui précède [voir expressions (13.74 — 13.75)] que l'intensité du champ électrique, créée par un dipôle dont les charges sont invariables dans le temps, est également inversement proportionnelle au cube de la distance entre le point considéré et le centre du dipôle.

Par conséquent, pour calculer la valeur instantanée de l'intensité du champ électrique rayonnée par le dipôle dans la zone proche, on peut utiliser dans la pratique les expressions découlant de la loi de Coulomb. A son tour, l'intensité du champ magnétique dans la zone proche au radiateur [voir expression (19.37)] est inversement proportionnelle au carré de la distance entre le point considéré et l'élément de courant et est en phase avec ce dernier.

Conformément à la loi de Biot — Savart — Laplace [voir expression (15.36)], intensité du champ magnétique créée par un élément de courant continu est également inversement proportionnelle au carré de la distance entre le point considéré et l'élément de courant.

En partant de ces considérations, on peut arriver à la conclusion, que dans la zone proche (pour $R \ll \lambda$) on peut, pour calculer la valeur instantanée de l'intensité du champ magnétique, utiliser dans la pratique la formule de Biot — Savart — Laplace. La possibilité d'utiliser dans la zone proche (pour $R \ll \lambda$) les expressions décrivant les champs statiques pour le calcul des valeurs instantanées de E et de H des champs variables s'explique par le fait qu'on peut négliger le retard dans cette zone.

Les limites de la zone proche dépendent de la fréquence. Ainsi, par exemple, pour $f = 50$ *Hz*, $\lambda = 6 \cdot 10^6$ *m*. Pour $f = 10^{10}$ *Hz*, $\lambda = 3$ *cm*. Par conséquent, pour la fréquence de 50 *Hz* on peut utiliser les lois de Coulomb et de Biot — Savart — Laplace pratiquement pour une distance quelconque entre le point considéré et l'élément de courant ou le dipôle. Pour la fréquence de 10^{10} *Hz* la situation est entièrement différente. Dans ce cas les limites de la zone proche sont éloignées du radiateur seulement à des fractions de centimètre et, pratiquement, tout l'espace autour du radiateur peut être considéré comme zone éloignée. Dans la zone éloignée la composante coulombienne de l'intensité du champ électrique est infiniment petite par rapport à la composante ondulatoire E et la composante de Biot — Savart de l'intensité du champ magnétique et infiniment petite par rapport à sa composante ondulatoire H.

Dans la zone proche le flux du vecteur de Poynting a deux composantes. La première d'entre elles varie dans le temps comme $\sin 2\omega t$ ou $\cos 2\omega t$. La deuxième composante varie dans le temps comme $\sin^2 \omega t$ ou $\cos^2 \omega t$.

En calculant le flux du vecteur de Poynting à travers une surface sphérique de rayon R se trouvant dans la zone proche, pour une période de courant alternatif, on trouve que le flux de la première composante est nul, puisque la valeur moyenne de la fonction $\sin 2\omega t$ ou $\cos 2\omega t$ pendant une période est nulle. Le flux du vecteur de Poynting, dû à la deuxième composante, ne sera pas nul. Au point de vue physique cela signifie que deux phénomènes, différant qualitativement au point de vue énergétique, se déroulent dans la zone proche. Le premier phénomène est celui des échanges périodiques d'énergie entre la source d'énergie, branchée au radiateur, et la zone proche.

L'énergie est tantôt prélevée de la source et accumulée dans le champ électromagnétique de la zone proche, tantôt restituée à la source. Ce phénomène est typique pour les champs coulombiens et de Biot — Savart de la zone proche.

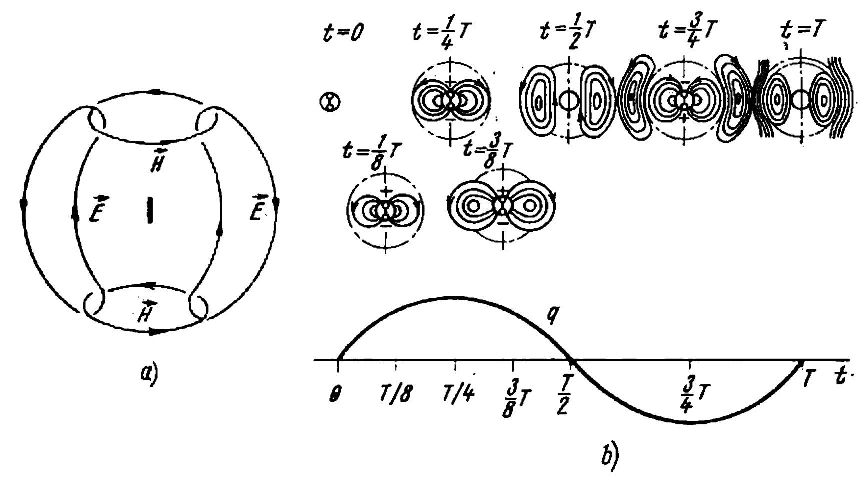


Fig. 483

Le deuxième phénomène est celui de rayonnement d'énergie. Il caractérise le phénomène ondulatoire dans la zone proche.

L'énergie rayonnée n'a qu'une valeur relativement faible par rapport à l'énergie accumulée périodiquement dans le champ électromagnétique de la zone proche et restituée ensuite à la source d'alimentation.

A partir du radiateur les ondes électromagnétiques se propagent dans l'espace. Ces ondes sont représentées schématiquement sur la fig. 483, *a*, pour un certain instant déterminé. Sur cette figure les lignes E forment des figures fermées, situées dans des plans méridiens. Les lignes E sont embrassées par les lignes H. Ces dernières sont des circonférences, dont le centre est situé sur l'axe de l'élément de courant.

Afin de ne pas encombrer la figure 483, *a*, nous avons représenté sur ce dernier seulement deux lignes E et deux lignes H.

On voit sur la fig. 483, *b* le caractère du champ électrique dans le plan méridien pour la zone ondulatoire du radiateur aux instants diffé-

rents. On y voit également la courbe de variation en fonction du temps de la charge d'un dipôle rayonnant. Le nombre de lignes E commençant ou se terminant respectivement sur les sphères du dipôle est d'autant plus grand que les charges de ces sphères ont une valeur absolue plus élevée.

Au fur et à mesure que l'onde électromagnétique se propage dans l'espace environnant, la forme des lignes E varie continuellement. Lorsque les charges du dipôle commencent à diminuer en valeur absolue, le nombre des lignes E partant de ces charges diminue également. Dans ces conditions les lignes E se ferment sur elles-mêmes. Le train des lignes E, fermées sur elles-mêmes, est couplé avec les lignes H, qui les transpercent (fig. 483, *a*). Dans l'alternance suivante, lorsque les charges des sphères changent de signe, il se forme un train identique de lignes E, fermées sur elles-mêmes, différant du précédent seulement par le sens du rotationnel E.

§ 481. **Calcul du champ des radiateurs réels.** Dans la pratique on utilise des antennes comme radiateurs d'énergie électromagnétique. L'antenne la plus simple est constituée par un tronçon de conducteur de

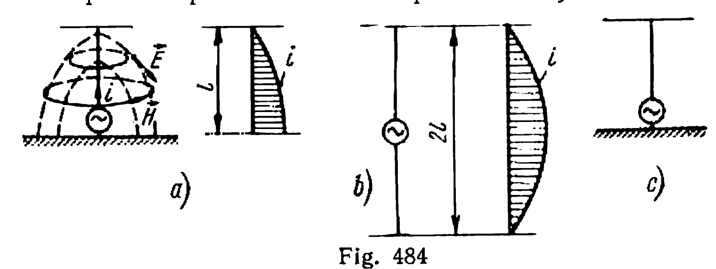


Fig. 484

longueur l, placé verticalement par rapport à la surface de la terre (fig. 484, *a*). Un générateur à haute fréquence est intercalé entre l'antenne et la terre. Grâce à la présence des capacités réparties dans l'antenne et des courants de déplacement circulant dans ces capacités, l'amplitude et la phase du courant varient en fonction de la hauteur de l'antenne (voir l'épure de variation des amplitudes sur la fig. 484, *a*). L'antenne a un pouvoir émetteur élevé du fait que le champ électrique et le champ magnétique, créés par elle, sont répartis dans la même région de l'espace environnant cette antenne (fig. 484, *a*).

On tient compte de l'influence de la terre sur le champ, en introduisant dans le calcul l'image symétrique de l'antenne (et en supposant que la terre soit un conducteur parfait). Dans ces conditions la longueur de l'antenne s'avère égale à $2l$ et l'épure du courant doit être complétée par sa seconde moitié (fig. 484, *b*). Pour calculer un champ créé par une antenne, on remplace cette dernière par un ensemble de petits tronçons de longueur dl, en supposant que le courant dans chacun de ces tronçons ait une amplitude et une phase constantes. Alors l'intensité du champ en un point quelconque de l'espace peut être trouvée comme la somme géométrique des intensités créées par l'ensemble de ces petits éléments de l'antenne.

Pour augmenter la capacité de l'antenne et, par conséquent, l'intensité du courant qui y circule pour la même tension du générateur, l'antenne est souvent complétée par un tronçon horizontal (fig. 484, *c*).

§ 482. Passage d'une onde électromagnétique plane d'un milieu dans un autre. Examinons les conditions de passage d'une onde électromagnétique plane, variant suivant une loi sinusoïdale, d'un premier milieu à impédance caractéristique Z_{C1} dans un second à impédance Z_{C2}. Supposons que l'onde arrive perpendiculairement à la surface de séparation des deux milieux (fig. 485). L'onde passe partiellement dans le second milieu et en est partiellement réfléchie.

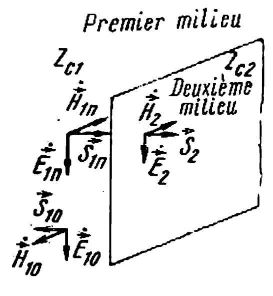


Fig. 485

Convenons que l'indice 1 correspond au premier milieu et l'indice 2 au second. L'indice *inc* correspond à l'onde incidente et l'indice *réf* à l'onde réfléchie. Des ondes incidente et réfléchie existent dans le premier milieu, mais une onde incidente seulement (ne comportant pas par conséquent d'indice *inc*) existe dans le second. L'onde incidente, existant dans le second milieu, est appelée également, onde réfractée.

Pour faciliter la compréhension de la fig. 485, les vecteurs caractérisant l'onde incidente et réfléchie dans le premier milieu sont décalés suivant la verticale et éloignés quelque peu de la surface de séparation des deux milieux. Les composantes tangentielles de l'intensité du champ électriques, ainsi que les composantes tangentielles du champ magnétique à la surface de séparation des deux milieux doivent être respectivement égales;

$$\dot{E}_{1\,inc}+\dot{E}_{1\,réf}=\dot{E}_2\,; \qquad (19.43)$$

$$\dot{H}_{1\,inc}+\dot{H}_{1\,réf}=\dot{H}_2. \qquad (19.44)$$

Les équations (19.43) et (19.44) sont entièrement identiques aux équations donnant la relation entre les tensions et les courants des ondes incidente, réfléchie et réfractée, lors du passage de l'onde d'une ligne à paramètres distribués sur une autre ligne (voir § 351 de la seconde partie).

La valeur complexe de l'intensité du champ électrique $\dot{E}_{1inc}$ est égale à la valeur complexe de l'intensité du champ magnétique $\dot{H}_{1inc}$, multipliée par Z_{C1},

$$\dot{E}_{1\,inc}=\dot{H}_{1\,inc}Z_{C1}.$$

Pour l'onde réfléchie, du fait de l'inversion du sens de déplacement de l'énergie, on a

$$\dot{E}_{1\,réf}=-\dot{H}_{1\,réf}Z_{C1}.$$

Pour l'onde réfractée

$$\dot{E}_2=\dot{H}_2Z_{C2}.$$

En partant des équations (19.43) et (19.44) et en tenant compte des expressions précédentes, on obtient

$$\dot{E}_{1\,réf}=\frac{Z_{C2}-Z_{C1}}{Z_{C2}+Z_{C1}}\dot{E}_{1\,inc}; \tag{19.45}$$

$$\dot{H}_2=\frac{2Z_{C1}}{Z_{C1}+Z_{C2}}\dot{H}_{1\,inc}; \tag{19.46}$$

$$\dot{H}_{1\,réf}=\frac{Z_{C1}-Z_{C2}}{Z_{C1}+Z_{C2}}\dot{H}_{1\,inc}. \tag{19.47}$$

Analysons le résultat obtenu. Les valeurs de $\dot{E}_{1réf}$, $\dot{H}_{1réf}$ et $\dot{E}_2$, $\dot{H}_2$ dépendent de la relation entre les impédances caractéristiques des deux milieux. Au point de vue pratique, c'est le cas où l'onde se propageant dans l'air atteint une surface métallique qui présente le plus d'intérêt. Dans ce cas le premier milieu est constitué par l'air et le second par le métal. Puisque l'impédance caractéristique d'un milieu conducteur dépend non seulement de sa conductivité et de sa perméabilité, mais également de la fréquence (voir expression 17.12), supposons que dans le cas considéré le milieu conducteur soit constitué par du cuivre et que la fréquence $f = 10^8\ Hz$. Comparons les valeurs des impédances caractéristiques pour le diélectrique et pour le métal (voir les expressions de Z_C aux pp. 655 et 671. Pour l'air $Z_{C1} = 377\ \Omega$. Pour le cuivre ($\gamma = 5{,}6\cdot 10^7\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$) ; $f = 10^8\ Hz$, $Z_{C2} = 0{,}00357\ e^{j\,45°}\ \Omega$. Si on substitue ces valeurs de Z_{C1} et Z_{C2} dans l'expression (19.45) on obtient

$$\dot{E}_{1\,réf}\approx -\dot{E}_{1\,inc};\quad \dot{H}_{1\,réf}\approx \dot{H}_{1\,inc},$$

autrement dit, l'onde électromagnétique est presque totalement réfléchie par la surface du métal, et le signe de l'intensité de son champ électrique s'inverse. La partie de l'onde qui pénètre quand même dans le métal y est atténuée très rapidement. Si la conductivité γ du milieu conducteur tendait vers l'infini, ce milieu jouerait le rôle d'un miroir parfait pour une onde électromagnétique.

Le phénomène de réflexion des ondes électromagnétiques par des milieux conducteurs est à la base de la détection radio-électrique (du radar).

§ 483. Blindage dans un champ électromagnétique variable. Le phénomène d'atténuation de l'onde électromagnétique dans la couche superficielle du métal est employé pour réaliser le blindage dans un champ électromagnétique variable.

Les blindages électromagnétiques sont constitués par des enveloppes creuses, cylindriques, sphériques ou rectangulaires, à l'intérieur desquelles on place le dispositif à blinder (par exemple une bobine d'inductance, un appareil de mesure, etc.)

Le blindage assume deux fonctions. La première d'entre elles est de protéger le dispositif placé à l'intérieur du blindage de l'effet d'un

champ électromagnétique qui lui est extérieur. La deuxième est de protéger l'espace extérieur au blindage contre le champ électromagnétique, créé par le dispositif placé à l'intérieur.

Du fait que l'onde électromagnétique est atténuée presque en totalité dans le métal à une distance égale à sa longueur, il faut, pour assurer un blindage efficace, que l'épaisseur de la paroi du blindage soit approximativement égale à la longueur de l'onde dans le métal. Dans la pratique il faut tenir compte d'autres facteurs également (résistance mécanique du blindage, son prix de revient, etc.).

§ 484. **Comparaison des principes de blindage dans les champs électrostatique, magnétique et électromagnétique.** Le blindage électrostatique repose sur la compensation du champ extérieur par le champ des charges, apparues sur les parois du blindage du fait de l'induction électrostatique (§ 399). L'épaisseur des parois lors du blindage électrostatique, contrairement à ce qui a lieu pour le blindage dans des champs magnétique et électromagnétique, peut être aussi faible que possible. Le blindage dans un champ magnétique du courant continu (§ 457) repose en première approximation sur le passage préférentiel des lignes de force d'un champ magnétique le long des parcours à réluctance moindre (le long des parois du blindage).

Le blindage dans un champ électromagnétique variable repose sur l'atténuation très rapide de l'onde électromagnétique, pénétrant dans les parois du blindage par suite de la dépense de son énergie pour compenser les pertes dues aux courants de Foucault dans les parois.

§ 485. **Chauffage à haute fréquence des pièces métalliques et des diélectriques imparfaits. Trempe superficielle des pièces en acier.** Le chauffage des pièces métalliques avant leur forgeage ou leur estampage, le séchage du bois, le rechargement et la restauration des outils sont réalisés souvent en plaçant ces pièces dans un champ électromagnétique à fréquence relativement peu élevée (de 1 à 20 *kHz*). Les pièces en aicer (par exemple, les arbres, les pignons) sont souvent soumises à une trempe superficielle par l'action du champ électromagnétique à fréquence plus élevée (de l'ordre de 10 à 500 *kHz*).

Nous avons indiqué précédemment (au § 468), que l'onde électromagnétique, en pénétrant dans l'épaisseur du métal, y est atténuée très rapidement. Par conséquent, la chaleur est dégagée essentiellement dans la couche superficielle, relativement fine, de la pièce en acier.

Sous l'effet de la chaleur dégagée dans la couche superficielle, cette dernière s'échauffe rapidement jusqu'à la température nécessaire pour la trempe superficielle. Une bande des fréquences encore plus élevées (de 1 à 30 *MHz*) est utilisée pour le chauffage à haute fréquence des matières plastiques avant leur moulage, pour le traitement thermique des produits alimentaires, la vulcanisation du caoutchouc et à d'autres fins encore.

§ 486. **Notions sur les guides d'ondes.** La canalisation d'énergie à hyperfréquences le long des lignes de transport habituelles à deux conducteurs s'avère pratiquement impossible. En effet 1) les conducteurs de la ligne jouent le rôle d'antennes et, au lieu de transmettre

l'énergie à l'utilisateur, la rayonnent dans l'espace, et 2) la résistance active des conducteurs de la ligne pour de très hautes fréquences, s'avère tellement grande par suite de l'effet pelliculaire très prononcé, qu'une partie notable de l'énergie est dépensée au chauffage des conducteurs.

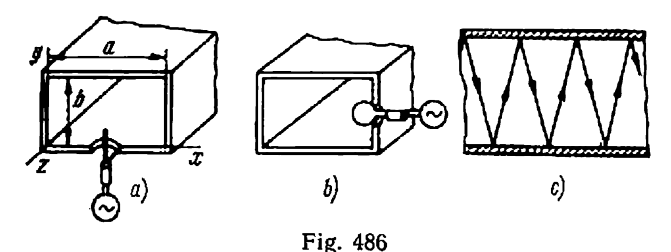


Fig. 486

L'utilisation d'un câble coaxial (d'une ligne coaxiale) de la fig. 464 pour canaliser l'énergie à très haute fréquence n'est pas avantageuse non plus. Quoique dans ce cas l'énergie ne soit pas rayonnée dans l'espace environnant (puisque la gaine du câble sert en même temps de blindage), les pertes d'énergie dans le conducteur et les rondelles diélectriques, utilisées pour centrer ce conducteur et fixées à l'intérieur de la gaine, s'avèrent très élevées.

De ce fait pour des fréquences supérieures à 10^9 *Hz*, l'énergie est transmise par des guides d'ondes. Un guide d'ondes est constitué par un tube creux, de section rectangulaire ou ronde.

Un guide d'onde rectangulaire est représenté sur la fig. 486, *a*. Les cotes *a* et *b* doivent être choisies dans un rapport déterminé avec la longueur de l'onde *. Ainsi, par exemple, pour une longueur d'onde $\lambda = 10$ *cm* on prend $b = 3{,}54$ *cm* et $a = 7{,}2$ *cm*.

L'énergie est amenée à l'intérieur du guide d'ondes à l'aide d'une petite cheville placée dans ce dernier et d'un câble coaxial branché au générateur à haute fréquence (fig. 486, *a*), ou à l'aide d'une boucle traversée par le courant, également placée à l'intérieur du guide d'ondes et d'un câble coaxial raccordé au générateur à haute fréquence (fig. 486, *b*).

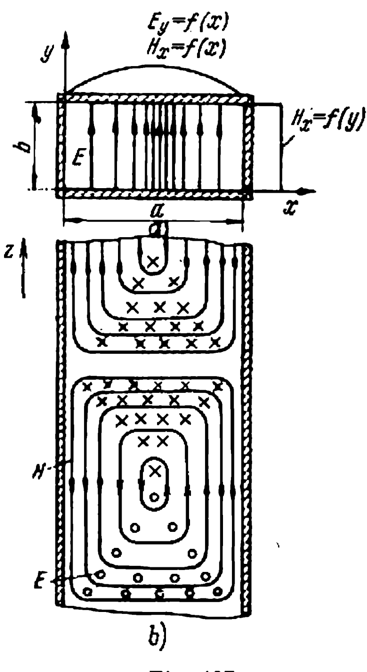


Fig. 487

* Les cotes *a* et *b* sont inscrites sur la fig. 487, *a*.

Le prélèvement de l'énergie à l'autre extrémité du guide d'ondes se fait également à l'aide d'une cheville ou d'une boucle.

L'énergie se propage le long du guide d'ondes en se reflétant sur ses parois (fig. 486, *c*). Les parois du guide d'ondes jouent pour ainsi dire le rôle de rails pour le flux d'énergie. Une faible partie de l'énergie pénètre dans les parois du guide d'ondes et y est dégagée sous forme de chaleur. Pour réduire la perte d'énergie dans les parois du guide d'ondes, la surface interne des tubes est d'abord polie, puis recouverte d'une couche de métal bon conducteur, de l'argent, par exemple. Les éléments fondamentaux de la théorie des guides d'ondes sont examinés dans l'appendice B.

* * *

APPENDICES À LA IIe PARTIE DU COURS

APPENDICE A

PROPRIÉTÉS DE CERTAINS MATÉRIAUX CONDUCTEURS ET DE CERTAINS DIÉLECTRIQUES

Valeurs de la conductivité γ en S/m, à 20° C, de divers matériaux conducteurs

Aluminium de 3,47 à $3{,}8 \cdot 10^7$
Bronze de 1,92 à $4{,}76 \cdot 10^7$
Laiton de 1,26 à $3{,}23 \cdot 10^7$
Cuivre de 5,5 à $5{,}72 \cdot 10^7$
Nickel de 1,26 à $1{,}32 \cdot 10^7$
Acier de 0,73 à $0{,}97 \cdot 10^7$
Argent de 6,17 à $6{,}25 \cdot 10^7$
Fonte de 2 à $2{,}5 \cdot 10^6$
Constantan de 1,9 à $2{,}22 \cdot 10^6$
Nickelchrome de 0,735 à $0{,}48 \cdot 10^6$

Propriétés fondamentales de certains diélectriques

Dans le tableau ci-dessous nous donnons les valeurs de la permittivité relative ε_r à la fréquence de 100 *Hz*, de la tangente de l'angle de perte tg δ à la fréquence de 1 000 *Hz* et de la rigidité diélectrique (kV_{eff}/cm) dans un champ uniforme à la fréquence de 50 *Hz*.

Matériau	ε_r	tg δ	E_{per}
Bakélite	4,9	0,03	240
Papier	3,7	0,009	160
Quartz	3,8	0,001	80
Plexiglas	3,4	0,06	400
Chlorure de polyvinyle	3,2	0,01	320
Polystyrène	2,55	0,0005	240
Mica	5,4	0,002	100—1000
Huile de transformateur	2,24	0,001	120
Porcelaine	7	—	57

BASES DE LA THÉORIE DES GUIDES D'ONDES

Examinons le phénomène de propagation des ondes électromagnétiques à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire, en supposant que les parois de ce guide d ondes soient en matériau superconducteur ($\delta = \infty$). Dans ces conditions le champ électrique est nulle dans les parois du guide d'ondes (la densité du courant dans les parois du guide d'ondes $\delta = \gamma E$ étant une grandeur finie, on a pour $\gamma = \infty$ $E \to 0$).

L'intérieur du guide d'ondes est rempli d'un diélectrique, dont la permittivité est ε et dont la perméabilité est μ. Orientons les axes des coordonnées conformément à la fig. 487, *a*. Appelons *a* la cote de l'intérieur du guide d'ondes le long de l'axe des *x* et désignons par *b* la cote orientée dans le sens de l'axe des *y*. La longueur du guide d'ondes dans le sens de l'axe des *z* n'est pas limitée. Le champ électromagnétique dans le guide d'ondes est décrit par l'équation (18.3'):

$$\nabla^2\dot{\vec{H}} + \omega^2\varepsilon\mu\dot{\vec{H}} = 0$$

ou par l'équation analogue

$$\nabla^2\dot{\vec{E}} + \omega^2\varepsilon\mu\dot{\vec{E}} = 0.$$

Les ondes électromagnétiques qui se propagent à l'intérieur d'un guide d'ondes sont des ondes progressives le long de l'axe de ce guide d'ondes (le long de l'axe des *z*) et ce sont des ondes stationnaires dans les deux autres directions. Les ondes stationnaires dans les directions *x* et *y* se forment par suite des réflexions multiples des ondes par les parois du guide d'ondes.

Le fait que les ondes soient progressives le long de l'axe des *z*, est exprimé, au point de vue mathématique formel, par le fait que chacune des composantes de ces ondes, de même que les ondes progressives dans une ligne à paramètres distribués, comporte le facteur $e^{-k_p z}$, où k_p est le coefficient de propagation.

Les ondes se propageant dans les guides d'ondes peuvent être de deux types. Les ondes de ces deux types sont appelées respectivement ondes *H* et ondes *E*.

La structure de l'onde *H* est telle que sa composante le long de l'axe du guide d'ondes ne comporte que l'intensité du champ magnétique, tandis que l'intensité du champ électrique est disposée dans des plans, perpendiculaires à l'axe du guide d'ondes. En d'autres termes, pour une onde *H*

$$\dot{\vec{H}} = \vec{i}\dot{H}_x + \vec{j}\dot{H}_y + \vec{k}\dot{H}_z;$$

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i}\dot{E}_x + \vec{j}\dot{E}_y. \qquad (A.1)$$

Un tableau tout différent est observé pour l'onde *E*.

Sa composante le long de l'axe du guide d'ondes ne comporte que l'intensité du champ électrique, tandis que les vecteurs de l'intensité du champ magnétique sont disposés dans les plans perpendiculaires à l'axe du guide d'ondes, c.-à-d. que pour une onde *E* on peut écrire

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i}\dot{E}_x + \vec{j}\dot{E}_y + \vec{k}\dot{E}_z$$

et

$$\dot{\vec{H}} = \vec{i}\dot{H}_x + \vec{j}\dot{H}_y.$$

Le type des ondes se propageant dans le guide d'ondes dépend des conditions d'excitation de ce dernier. Si l'excitation est faite à l'aide de la chevelle de la fig. 486, *a*, les ondes *E* sont engendrées dans le guide d'ondes.

Lorsque l'excitation se fait à l'aide d'une boucle, parcourue par le courant, et disposée auprès de la paroi étroite du guide d'ondes, conformément à la fig. 486, *b*, des ondes *H* ont engendrées dans ce dernier.

Les opérations ci-dessous sont effectuées pour l'onde *H*, mais elles sont presque les mêmes pour l'onde *E*. Si on substitue (A.1) dans l'équation (18.3'), cette dernière peut être décomposée en trois équations suivant les trois projections. Pour la projection sur l'axe des *z* nous aurons l'équation suivante:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\dot{H}_z+\dot{\omega}^2\varepsilon\mu\dot{H}_z=0. \qquad (A.2)$$

Utilisons la méthode de la séparation des variables de Fourier—Bernoulli, dont le principe a été examiné au § 416. A cette fin posons

$$\dot{H}_z=XYe^{-k_pz}, \qquad (A.3)$$

où X n'est fonction que de x, Y n'est fonction que de y. Le facteur e^{-k_pz} indique que l'onde progressive se déplace le long de l'axe des z. Substituons (A.3) dans (A.2):

$$Ye^{-k_pz}\frac{\partial^2X}{\partial x^2}+Xe^{-k_pz}\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}+k_p^2XYe^{-k_pz}+\omega^2\varepsilon\mu XYe^{-k_pz}=0. \qquad (A.2')$$

Désignons

$$k_p^2+\omega^2\varepsilon\mu=k^2 \qquad (A.4)$$

et divisions (A.2') par XYe^{-k_pz}.
Nous aurons alors

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}+k^2=0. \qquad (A.5)$$

La somme des deux fonctions $\frac{1}{X}\frac{\partial^2X}{\partial x^2}$ et $\frac{1}{Y}\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}$, dont l'une est fonction de x seulement et l'autre n'est fonction que de y, ne peut être égale au nombre constant $-k^2$ que si chacune de ces fonctions est un nombre constant. Passons des dérivées partielles aux dérivées ordinaires et désignons

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-p^2 \qquad (A.5a)$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-q^2. \qquad (A.5b)$$

Ici p et q sont des nombres constants. La solution des équations (A.5a et b) est donnée par les fonctions

$$X=C_1\sin(px+\varphi)$$

$$Y=C_2\sin(qy+\psi).$$

Ici C_1, C_2, φ et ψ sont des constantes d'intégration qui seront trouvées à partir des conditions aux limites. Ainsi, conformément à (A.3)

$$\dot{H}_z=H_m\sin(px+\varphi)\sin(qy+\psi)\,e^{-k_pz}. \qquad (A.6)$$

Ici l'amplitude complexe

$$\dot{H}_m=C_1C_2.$$

Pour calculer les valeurs de p, q, φ et ψ rapportons-nous à la première et à la deuxième équations de Maxwell, écrites en utilisant les projections des champs

sur les axes des coordonnées

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}=j\omega\varepsilon\dot{E}_x, \qquad (A.7) \qquad \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z}=-j\omega\mu\dot{H}_x, \qquad (A.10)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z}-\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}=j\omega\varepsilon\dot{E}_y, \qquad (A.8) \qquad \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}=-j\omega\mu\dot{H}_y, \qquad (A.11)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}=j\omega\varepsilon\dot{E}_z, \qquad (A.9) \qquad \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y}=-j\omega\mu\dot{H}_z. \qquad (A.12)$$

Du fait que pour l'onde $H\dot{E}_z=0$ et puisque ces ondes sont des ondes progressives se propageant le long de l'axe des z, on a $\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z}=-k_p\dot{E}_y$; $\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}=-k_p\dot{E}_x$ et il découle des équations (A.10 et A.11) que

$$\left.\begin{aligned} k_p\dot{E}_y&=-j\omega\mu\dot{H}_x,\\ k_p\dot{E}_x&=j\omega\mu\dot{H}_y. \end{aligned}\right\} \qquad (A.13)$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, le champ électrique est nul sur les surfaces intérieures des parois du guide d'ondes. Par conséquent, $\dot{E}_x=0$ pour $y=0$ et $y=b$, et $\dot{E}_y=0$ pour $x=0$ et $x=a$. Si l'on en tient compte, l'équation (A.13) prend la forme

$$\underset{y=0}{\dot{H}_y}=\underset{y=b}{\dot{H}_y}=0 \text{ et } \underset{x=0}{\dot{H}_x}=\underset{x=a}{\dot{H}_x}=0.$$

Du fait que $\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}=-k_p\dot{H}_y$, $\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z}=-k_p\dot{H}_x$ et que $\dot{H}_y$ est nul pour $y=0$ et $y=b$, et $\dot{H}_x=0$ pour $x=0$ et $x=a$, on trouve en partant de (A.7) et (A.8)

$$\left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}\right)_{y=0}=0; \quad \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}\right)_{y=b}=0; \qquad (A.14)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}\right)_{x=0}=0; \quad \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}\right)_{x=a}=0. \qquad (A.15)$$

Les équations (A.14 et A.15) sont utilisées pour calculer les valeurs de p, q, φ et ψ.

Substituant (A.6) dans (A.14), on trouve $\psi=\frac{\pi}{2}$ et $q=\frac{n\pi}{b}$.

En partant de (A.15) calculons $\varphi=\frac{\pi}{2}$ et $p=\frac{m\pi}{a}$, où m et n sont des nombres entiers; m est égal au nombre des demi-ondes de l'onde électromagnétique, qui peuvent être disposées suivant la largeur du guide d'ondes. Le nombre n indique combien de demi-ondes peuvent se loger suivant la hauteur du guide d'ondes. Ainsi,

$$\dot{H}_z=\dot{H}_m\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-k_p z}. \qquad (A.16)$$

Trouvons maintenant $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$ et $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$. Pour calculer $\dot{E}_x$ procédons de la manière suivante: dans l'équation (A.7) substituons $-k_p\dot{H}_y=-k_p\frac{k_p\dot{E}_x}{j\omega\mu}$ à $\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}$. Nous

aurons alors

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}+\frac{k_p^2\dot{E}_x}{j\omega\mu}=j\omega\varepsilon\dot{E}_x.$$

D'où

$$\dot{E}_x=\frac{j\omega\mu}{k^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}=\frac{j\mu\omega}{k^2}\frac{n\pi}{b}\dot{H}_m\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-k_pz}, \quad \text{(A.17)}$$

$$k^2=k_p^2+\omega^2\varepsilon\mu.$$

De même

$$\dot{H}_y=\frac{k_p\dot{E}_x}{j\omega\mu}=\frac{k_p}{k^2}\frac{n\pi}{b}\dot{H}_m\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-k_pz}; \quad \text{(A.18)}$$

$$\dot{E}_y=\frac{j\omega\mu}{k^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}=-j\frac{\omega\mu}{k^2}\frac{m\pi}{a}\dot{H}_m\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-k_pz}; \quad \text{(A.19)}$$

$$\dot{H}_x=-\frac{k_p}{j\omega\mu}\dot{E}_y=\frac{k_p}{k^2}\frac{m\pi}{a}\dot{H}_m\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-k_pz}. \quad \text{(A.20)}$$

Analysons les résultats ainsi obtenus. Le coefficient k_p joue le rôle de constante de propagation de l'onde électromagnétique le long de l'axe des z.

Si k_p est un nombre réel, l'onde est atténuée au cours de son déplacement le long du guide d'ondes. Il n'y aura pas d'atténuation si k_p est un nombre imaginaire.

Afin d'établir le lien entre k_p, les cotes géométriques a et b du guide d'ondes et les nombres m et n, substituons (A.16) dans (A.2), nous obtenons $k^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+$ $+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$. Mais $k^2=k_p^2+\omega^2\varepsilon\mu$. Par conséquent,

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2=k_p^2+\omega^2\varepsilon\mu\ ;\ k_p=0 \text{ pour}$$

$$\omega=\omega_0\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}; \quad \text{(A.21)}$$

k_p est un nombre imaginaire pour $\omega>\omega_0$.

Ainsi dans un guide d'ondes aux cotes a et b données, les ondes électromagnétiques peuvent se propager si leur fréquence est supérieure à ω_0. Les cotes a et b des guides d'ondes sont normalisées.

Les nombres m et n peuvent prendre des valeurs quelconques, mais ne peuvent être nuls simultanément, puisque alors toutes les composantes de E et toutes les composantes de H seraient nulles.

Le plus grand rôle est joué dans la pratique par l'onde fondamentale, pour laquelle $m=1$ et $n=0$. Pour cette onde une seule demi-onde peut être placée suivant la largeur du guide d'ondes, tandis que l'intensité de champ ne varie pas suivant la hauteur du guide d'ondes.

Pour pouvoir évaluer l'ordre de grandeur de ω_0 pour l'onde fondamentale, prenons la cote $a=7{,}2$ *cm* et à l'aide de l'expression (A.21) trouvons

$$\omega_0\approx 13{,}1\cdot10^9\ rad/s.$$

Ainsi, seule une énergie à hyperfréquence peut être transmise le long d'un guide d'ondes.

L'image du champ pour l'onde fondamentale H, à un certain instant, est donnée sur la fig. 487, *b*.

SOMMAIRE

Ire PARTIE

Chapitre I

Circuits électriques linéaires à courant continu

Chapitre II

Circuits électriques non linéaires à courant continu

Chapitre III

Circuits magnétiques

Chapitre IV

Induction électromagnétique et forces mécaniques agissant dans un champ magnétique

Chapitre V

Circuits électriques à courant sinusoïdal monophasé

Chapitre VI

Théorie des quadripôles et diagrammes circulaires

Chapitre VII

Circuits triphasés, champ magnétique tournant et méthode des composantes symétriques

IIe PARTIE

Chapitre VIII

Courants périodiques non sinusoïdaux dans les circuits électriques linéaires

Chapitre IX

Circuits électriques non linéaires à courant alternatif

Chapitre X

Phénomènes transitoires dans les circuits électriques linéaires

Chapitre XI

Régimes permanents dans les circuits électriques et magnétiques comprenant des lignes à paramètres distribués. Bases de la théorie des filtres électriques

Chapitre XII

Phénomènes transitoires dans les circuits électriques comprenant des lignes à paramètres distribués

IIIe PARTIE

Chapitre XIII
Champ électrostatique

Chapitre XIV

Champ électrique de courant continu dans un milieu conducteur

Chapitre XV

Champ magnétique de courant continu

Chapitre XVI

Equations fondamentales d'un champ électromagnétique variable

Chapitre XVII

Champ électromagnétique variable dans un milieu conducteur homogène et isotrope

Chapitre XVIII

Propagation des ondes électromagnétiques dans un diélectrique homogène et isotrope

Chapitre XIX

Potentiels retardés dans un champ électromagnétique variable et rayonnement d'énergie électromagnétique